PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 30 (44), 1981, pp. 89–109

О СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СОБСТВЕННЫМ И ПРИСОЕДИНЕННЫМ ФУНКЦИЯМ НЕСАМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА ТИПА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Небойша Лажетич

(Представлено 4. январи 1980.)

§ I. ВВедение

I. Цель настоящей статьи показать, что главные результаты из работ В. А. Ильина [**2,3**], в которых установлены необходимые и достаточные условия базисности и равномерниая равносходимость с тригонометрическим рядом Фурье для спектральных разложений, отвечающих обыкновенному несамосопряженному дифференциальному оператору

$$L(u) = u^{(n)} + p_1(x)^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)u' + p_n(x)u \tag{1}$$

с коэффициентими $p_k(x)$ из класса $C^{(n-k+1)}(G)$, рассматриваемому на произвольном интервале G действительной прямой, можно перенести полностью на случай несамосопряженного оператора Шредингера

$$L(u) = -u'' + q(x)u \tag{2}$$

с потенциалном $q(x)$ из класса $L_p^{\mathrm{loc}}(G)$, $1 < p < \infty$, и частью на случай несамосопряженного оператора Штурма-Лиувилля

$$L(u) = -(p(x)u')' + q(x)u \tag{3}$$

с разрывным коэффициентом $p(x)$.

2. Следуя В. А. Ильину, определим собственным и присоединенные функции оператора (2) следующим образом.

Определение 1. *Комплекснозначная функция* $\overset{0}{u}(x)$ *из класса* $L_2(G)$, $\overset{0}{u}(x) \neq 0$, *называется собственной функцией оператора* (2), *отвечающей* *комплексному собственному значению λ, если она абсолютно непрерывна вместе со своей первой производной на любом отрезке интервале G и удовлетворяет почти всюду в G уравнению*

$$-\overset{0}{u}''(x) + q(x)\overset{0}{u}(x) = \lambda \cdot \overset{0}{u}(x)).$$

Комплекснозначная функция $\overset{0}{u}(x)$ из класса $L_2(G)$ называется присоединенноий функцией порядка $i\,(i = 1, 2, \dots)$ оператора (2), отвечанощей собственому значению λ и собственной функции $\overset{0}{u}(x)$, если абсолютно непрерывна вместе со своей первой производной на любом отрезке интервала G и удовлетворяет почти всюду в G уравнению

$$-\overset{i}{u}''(x) + q(x)\overset{i}{u}(x) = \lambda \cdot \overset{i}{u}(x) + \overset{i-1}{u}(x).$$

Будем предполагать, что любому собственному значению оператора (2) отвечает собственная функция и присоединненная функция первого порядка. Пусть $\{\overset{i}{u}_n(x)\}n\underset{i=0,1}{\overset{\infty}{=}}1$—произвольная полная в $L_2(G)$ и минимальная система собственных и присоединенных функций оператора (2), и $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$– соответствующая система собственных значений, не имеющих конечных точек сгущения и занумерованных в порядке неубывания величины $\nu_n = |\sqrt{\lambda_n}|$.*

Обозначим через $\{\overset{i}{\nu}_n(x)\}n\underset{i=0,1}{\overset{\infty}{=}}1$ биортогонально сопряженную $k\{\overset{i}{u}_m(x)\}$ в $L_2(G)$ систему функций, т.е. такую систему, что $\overset{i}{\nu}_n(x) \in L_2(G)$ и

$$(\overset{i}{u}_n, \overset{j}{\nu}_m) = \int\limits_G \overset{i}{u}_n(x)\overline{\overset{j}{\nu}_m(x)}\,dx = \begin{cases} 1, & \text{при } n = m \text{ и } i = j; \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Пусть $f(x)$— произвольная функция из класса $L_2(G)$ и μ—произвольное положительное число. Составим частичную сумму порядка μ разложения функции $f(x)$ в биортогональный ряд

$$\sigma_\mu(x, f) = \sum_{\substack{1 \le n \le \mu \\ i=1,0}} (f, \overset{i}{\nu}_n)\overset{i}{u}_n(x).$$

Для той же функции составим модифицированную частичную сумму тригонометрического ряда Фурье

$$S_\mu(x, f) = \frac{1}{\pi} \cdot \int\limits_{|x-y| \le R} \frac{\sin\,\mu(x-y)}{x-y} f(y)\,dy,$$

где x пробегает какой-либо компакт K интервала G, а R—достаточно малое положительное число. Известно, что на этом компакте сума $S_\mu(x, f)$ отличается от частичной суммы тригонометрического ряда Фурье порядка $\left[\frac{2\pi}{|G|} \cdot \mu\right]$* на величину, равномерно на компакте K стремящуюся

---

*Если $\lambda = r \cdot e^{i\varphi}$, $r \ge 0$, то $\sqrt{\lambda} = \sqrt{r} \cdot e^{\frac{i\varphi}{2}}$, где $-\frac{\pi}{2} < \varphi \le \frac{3\pi}{2}$.

*$[\alpha]$ обозначает целую частть числа α.

к нулю.

Следуя Б. А. Ильину [**2**], введем следующее определение.

Определение 2. *Система функций* $\{\overset{i}{u}_n(x)\}n\underset{i=0,1}{\overset{\infty}{=}}1$ *обладает свойством базисности, если для любой функции* $f(x)$ *из класса* $L_2(G)$ *и для любого компакта* K *интервала* G *справедливо равенство*

$$\lim_{\mu\to+\infty}\|\sigma_\mu(x,f)-f(x)\|_{L_2(K)}=0.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\{\overset{i}{u}_n(x)\}n\underset{i=0,1}{\overset{\infty}{=}}1$*—произвольная, полная и минимальная система собственных и присоединенных функций оператора* (2), *потенциал* $q(x)$ *которого принадлежит классу* $L_p^{\mathrm{loc}}(G)$, $1<p<\infty$, $\{\overset{i}{v}_n(x)\}n\underset{i=0,1}{\overset{\infty}{=}}1$*— биортогонально сопряженная* $k\{\overset{i}{u}_n(x)\}$ *в* $L_2(G)$ *система функций. Пусть собственные числа* λ_n, $n\in N$, *удовлетворяют условиям*

(4) 1) $|Im\sqrt{\lambda_n}|\le A,\quad n\in N;$

(5) 2) $\sum\limits_{\|Re\sqrt{\Lambda_n}|-\mu|\le1}1\le B$, *для любого числа* $\mu\ge0$,

При этом постоянная A *не зависит от* λ_n, *а постоянная* B *не зависит от* μ, *и* λ_n.

Тогда следующие предложения равносильны:

а) *Для любого компакта* K *интервала* G *существует постояная* $S(K)$, *не зависящая от* $n\in N$ *и такая, что сраведливы неравенства*

$$\|\overset{i}{u}_n\|_{L_2(K)}\cdot\|\overset{i}{v}_n\|_{L_2(G)}\le C(K),\quad n\in N,\ i=0,1. \tag{6}$$

б) *Система функций* $\{\overset{i}{u}_n(x)\}n\underset{i=0,1}{\overset{\infty}{=}}1$ *обладает свойством базисности.*

в) *Для любой функции* $f(x)$ *из класса* $L_2(G)$ *имеет место равенство*

$$\lim_{\mu\to+\infty}(\sigma_\mu(x,f)-S_{\nu_{[\mu]}}(x,f))=0,$$

равномерно относительно x *на любом компакте* K *интервала* G.

3. Теорема 1 доказывается методом, разработанным В. А. Ильиным в статьях [**2, 3**]. В силу того, что потенциал $q(x)$ оператора (2) принадлежит лишь классу $L_p^{\mathrm{loc}}(G)$ "антиаприопные" оценки (см. лемму 2) в нашем случае нельзя доказывать при помощи фундаментального решения, как это сделано в рабите [**3**]. И. С. Ломов [**6**] эти оценки доказал при помощи асимптотического метода. И. Йо [**4**] использовал формулы среднего значения. Наше доказателство этих оценок тоже основано лишь на

формулах среднего значенија для собственных и присоединенних функций оператора (2).

Напомним, что И. Йо в работе [**4**] замечает, что можно доказать равносильносттв предложений а) и б), если предложить что, $q(x)$ принадлежит лишь классу $L_1^{\rm loc}(G)$.

Результаты, касающиеся оператора Штурма–Лиувилля (3), будут сформулированы в §4 настоящей статьи.

§ 2. Оценка спектральной функции оператора Шредингера

1. Оценки собственных и присоединенных функций оператора (2) и "антиаприорные" оценки, сформулированные в следующих двух леммах, играют важную роль в доказательстве теоремы 1, а имеют и самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Пусть собственные числа λ_n, $n \in N$, оператора (2) удовлетворяют условиям (4)–(5) и $q(x) \in L_1^{\rm loc}(G)$. Для любого компакта K интервала G существует постоянная $C(K,q)$ такая, что имеют место оценки*

$$\max_{x\in K}|\overset{i}{u}_n(x)| \le C(K,q)\cdot \|\overset{i}{u}_n\|_{L_2(K_R)}, \quad n\in N,\ i=0,1,2,\dots, \tag{7}$$

где $0<R<\varrho(K,\partial(G)$. При этом $C(K,q)$ не зависит от $n\in N$ и i.

Лемма 2. *Пусть собственные числа λ_n, $n \in N$, оператора 2) удовлетворяют условиям (4)–(5) и $q(x) \in L_1^{\rm loc}(G)$. Для любого компакта K интервала G существует постоянная $A(K,q)$ такая, что справедливы оценки*

$$\max_{x\in K}|\overset{i-1}{u}_n(x)| \le A(K,q)\cdot|\sqrt{\lambda_n}|\cdot \|\overset{i}{u}_n\|_{L_2(K_R)},\ \ \textit{при}\ \ \lambda_n\ne 0, \tag{8}$$

и

$$\max_{x\in K}|\overset{j-1}{u}_n(x) \le A(K,q)\cdot \|\overset{i}{u}_n\|_{L_2(K_R)},\ \ \textit{при}\ \ \lambda_n = 0, \tag{9}$$

где $0<R<\varrho(K,\partial G)$, При этом $A(K,q)$ не зависит от λ_n.

Здесь через $\varrho(K,\partial G)$ обозначено расстояние компакта K от границы интервала G, а через K_R множенство $\{x\in G : \varrho(x,\tilde K)\le R\}$, где $\tilde K$— пресечение всех отрезков интервала G, содержащих K.

Как уже замечено, оценки (7)–(9) появились в работах [**4**] и [**6**]. Доказательства весьма обширные и мы здесь не будем их проводить (см., например, [**5**]).

2. Приведем теперь формулы среднего значения для собственных и присоединенных функций оператора (2). Для любой точки x интервала

G и любого числа $h>0$ такого, что $x-h$ и $x+h$ принадлежат интервалу G, имеют место следующие соотношения:

$$\text{(10)}\quad 1)\frac{\overset{0}{u}_n(x+h)+\overset{0}{u}_n(x-h)}{2}=\overset{0}{u}_n(x)\cos\sqrt{\lambda_n}h- -\frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}}\cdot\int\limits_{x-h}^{x+h}q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)\,d\xi;$$

$$2)\frac{\overset{1}{u}_n(x+h)+\overset{1}{u}_n(x-h)}{2}=\overset{1}{u}_n(x)\cos\sqrt{\lambda_n}h-\overset{0}{u}_n(x)\cdot\frac{h}{2\sqrt{\lambda_n}}\cdot\sin\sqrt{\lambda_n}h-$$

$$\text{(11)}\qquad -\frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}}\cdot\int\limits_{x-h}^{x+h}q(\xi)\overset{1}{u}_n(\xi)\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)\,d\xi-$$

$$-\frac{1}{4\cdot\lambda_n}\cdot\int\limits_{x-h}^{x+h}(|x-\xi|-h)q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\cos\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)\,d\xi+$$

$$+\frac{1}{4\cdot\lambda_n^{3/2}}\cdot\int\limits_{x-h}^{x+h}q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)\,d\xi.$$

Соответсвующие формулы имеют место для тех $n\in N$, для которых $\lambda_n=0$. Не уменьшая общности, всюду в дальнейшем будем предполагать, что $\lambda_n\neq 0,\ n\in N$.

Формула (10) принадлежит Э. Ч. Титчмаршу [**8**], а формула (11) Е. И. Моисееву [**7**].

3. Важную роль в доказательстве импликации а)$\Rightarrow$ в) играет следующая оценка спектральной функции

$$\text{(12)}\qquad \theta(x,y,\mu)=\sum_{\substack{1\le n\le\mu\\ i=1,0}}\overset{i}{u}_n(x)\cdot\overline{\overset{i}{v}_n(y)},\quad \mu>0,$$

отвечающей прооизвольной полной в $L_2(G)$ и минимальной системе $\{\overset{i}{u}_n(x)\}_{\substack{n=1\\ i=0,1}}^{\infty}$ собственных и присоединенных функций оператора (2).

Лемма 3. *Пусть собственные числа* λ_n, $n\in N$, *оператора* (2) *удовлетворяют условиям* (4)–(5) *и справедливо утверждение* а). *Если* $q(x)\in L_p^{\mathrm{loc}}(G)$, $1<p<\infty$, *то имеет место оценка*

$$\text{(13)}\qquad \int\limits_G\left|\theta(x,y,\mu)-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin\nu_{[\mu]}(x-y)}{x-y}\right|^2dy=O(1),\ \mu\to+\infty,$$

равномернаја относительно x на любом компакте K интеграла G.

Доказательство. Пусть K—произвольный компакт, лежащий строго внутри интервала G и R_0—число такое, что $0 < 2R_0 < \varrho(K, \partial G)$. Пусть μ—фиксированное положительное число. В дальнейшем будем пользоваться функцией

$$\omega_R(x,y,\mu) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\sin\,\mu|x-y|}{|x-y|}, & \text{при } |x-y| \le R \\ \qquad\qquad 0\ , & \text{при } |x-y| > R, \end{cases} \tag{14}$$

где $x \in K,\ y \in G,\ R \in [R_0, 2R_0]$.

Если $f(R)$ интегрируемая на сегменте $[R_0, 2R_0]$ функция, то величину

$$S_{R_0}(f) = \frac{1}{R_0}\int\limits_{R_0}^{2R_0} f(R)\,dR$$

называют усреднением функции $f(R)$.

Первый шаг в доказательстве оценки (13) заключается в доказательстве оценки

$$\int\limits_G \Big| \sum_{\substack{\mu_n \le \mu \\ i=0,1}} \overset{i}{u}_n(x)\overline{\overset{i}{v}_n(y)} - S_{R_0}(\omega_R(x,y,\mu)) \Big|^2 dy = O(1), \quad \mu \to +\infty, \tag{15}$$

равномерной относительно x на компакте K. Здесь введено обозначение

$$\mu_n = \Big| Re\sqrt{\lambda_n} \Big|, \quad n \in N.$$

Фиксируя точку $x \in K$, начнем ц функции

$$\overset{0}{\omega}{}^R_n(x,\mu) = \int\limits_G \omega_R(x,y,\mu)\overset{0}{u}_n(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_0^R \frac{\sin\,\mu h}{h}(\overset{0}{u}_n(x+h) + \overset{0}{u}_n(x-h))dh.$$

Исользуя формулу среднего значения (10), отсюда получим соотношение

$$\begin{gathered} \overset{0}{\omega}{}^R_n(x,\mu) = \overset{0}{u}_n(x)\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\int\limits_0^R \frac{\sin\,\mu h\cos\sqrt{\lambda_n}h}{h}\,dh- \\ -\frac{1}{\pi\sqrt{\lambda_n}}\cdot\int\limits_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\Bigg[\int\limits_{x-h}^{x+h} q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)\,d\xi\Bigg]dh. \end{gathered} \tag{16}$$

Аналогично, при помощи формулы среднего значения (11), получим соотношения

(17)

$$\overset{1}{\omega}{}_n^R(x,\mu)=\int\limits_G \omega_R(x,y,\mu)\overset{1}{u}_n(y)dy=$$

$$\overset{1}{u}_n(x)\frac{2}{\pi}\cdot\int\limits_0^R \frac{\sin\,\mu\,h\cos\sqrt{\lambda_n}}{h}\,dh-\overset{0}{u}_n(x)\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_0^R \frac{\sin\,\mu h\sin\sqrt{\lambda_n}h}{\sqrt{\lambda_n}}\,dh-$$

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{\lambda_n}}\cdot\int\limits_0^R \frac{\sin\,\mu h}{h}\left[\int\limits_{x-h}^{x+h} q(\xi\overset{1}{u}_n(\xi)\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)\delta\,\xi\right]dh-$$

$$-\frac{1}{2\pi\cdot\lambda_n}\cdot\int\limits_0^R \frac{\sin\,\mu h}{h}\left[\int\limits_{x-h}^{x+h}(|xi-\xi|-h)q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\cos\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)\,d\xi\right]dh+$$

$$+\frac{1}{2\pi\cdot\lambda^{3/2}}\cdot\int\limits_0^R \frac{\sin\,\mu h}{h}\left[\int\limits_{x-h}^{x+h} q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)\,d\xi\right]dh.$$

Умножим равенства (16) и (17) на $\overline{\overset{0}{v}_n(y)}$ и $\overline{\overset{1}{v}_n(y)}$ соответственно. Получаются равенства

$$\overset{0}{\omega}{}_n^R(x,\mu)\overline{\overset{0}{v}_n(y)}=\overset{0}{u}_n(x)\overline{\overset{0}{v}_n(y)}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\int\limits_0^R \frac{\sin\,\mu h\cos\sqrt{\lambda_n}h}{h}\,dh-$$

(18)

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{\lambda_n}}\cdot\overline{\overset{0}{v}_n(y)}\cdot\int\limits_0^R \frac{\sin\,\mu h}{h}\left[\int\limits_{x-h}^{x+h} q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)\,d\xi\right]dh,$$

и

$$\overset{1}{\omega}{}_n^R(x,\mu)\overline{\overset{1}{v}_n(y)}=\overset{1}{u}_n(x)\overline{\overset{1}{v}_n(y)}\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\int\limits_0^R \frac{\sin\,\mu h\cos\sqrt{\lambda_n}h}{h}\,dh-$$

(19)

$$-\overset{1}{u}_n(x)\overline{\overset{1}{v}_n(y)}\cdot\frac{1}{\pi\sqrt{\lambda_n}}\cdot\int\limits_0^R \sin\,\mu h\sin\sqrt{\lambda_n}h\,dh-$$

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{\lambda_n}}\cdot\overline{\overset{1}{v}_n(y)}\cdot\int\limits_0^R \frac{\sin\,\mu h}{h}\left[\int\limits_{x-h}^{x+h} q(\xi)\overset{1}{u}_n(\xi)\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)\,d\xi\right]dh-$$

$$-\frac{1}{2\pi\lambda_n}\cdot\overline{\overset{1}{v}_n(y)}\cdot\int\limits_0^R \frac{\sin\,\mu h}{h}\left[\int\limits_{x-h}^{x+h}(|x-\xi|-h)q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\cos\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)\,d\xi\right]dh+$$

$$-\frac{1}{2\pi\lambda_n^{3/2}}\cdot\overline{\overset{1}{v}_n(y)}\cdot\int\limits_0^R\frac{\sin\,\mu h}{h}\left[\int\limits_{x-h}^{x+h}q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)\,d\xi\right]dh. \tag{19}$$

Введен обозначения

$$I^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^R\frac{\sin\,\mu h\cos\sqrt{\lambda_n}h}{h}\,dh, \tag{20}$$

и

$$\sqrt{\lambda_n}=\alpha_n+i\cdot\beta_n, \tag{21}$$

т.е. $\alpha_n=Re\sqrt{\lambda_n}$, $\beta_n=Im\sqrt{\lambda_n}$.

Тогда усреднение величины $I^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R)$ можно представить (см. [**3**]) в виде

$$S_{R_0}(I^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R))=\delta^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}+S_{R_0}(J^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R)). \tag{22}$$

При этом

$$\delta^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}=\frac{2}{\pi}\cdot\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\,\mu h\cos\alpha_n h}{h}\,dh=\begin{cases}1 & \text{при }\ \alpha_n<\mu,\\ \dfrac{1}{2} & \text{при }\ \alpha_n=\mu,\\ 0 & \text{при }\ \alpha_n>\mu,\end{cases} \tag{23}$$

и $J^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R)$—величина такая, что имеют место оценки

$$|S_{R_0}(J^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R))|\le\begin{cases}C_1(R_0,A), & \text{при любых }\ \sqrt{\lambda_n}\ \text{ и }\ \mu,\\ \dfrac{C_2(R_0,A)}{|\mu-\alpha_n|^2}, & \text{при }\ |\mu-\alpha_n|>1.\end{cases} \tag{24}$$

Здесь постоянные $C_1(R_0,A)$ и $C_0(R_1,A)$ не зависят от $\sqrt{\lambda_n}$ и μ.

Введем и обозначение

$$\overset{i}{\omega}{}^{R_0}_n(x,\mu)=\int\limits_G S_{R_0}(\omega_R(x,y,\mu))\overset{i}{u}_n(y)\,dy,\quad n\in N,\quad i=0,1.$$

Так как справедливо равенство

$$S_{R_0}(\overset{i}{\omega}{}^{R}_n(x,\mu))=\overset{i}{\omega}{}^{R_0}_n(x,\mu),\quad n\in N,\quad i=0,1,$$

то после применения операции усреднения к равенствам (18) и (19), получим следующие соотношения, имея в виду (22):

(25)

$$\overset{0}{\omega}{}^{R_0}_n(x,\mu)\overline{\overset{0}{v}_n(y)}=\overset{0}{u}_n(x)\overline{\overset{0}{v}_n(y)}\delta^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}+\overset{0}{u}_n(x)\overline{\overset{0}{v}_n(y)}S_{R_0}(J^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R))-$$

$$-\frac{1}{\pi\sqrt{\lambda_n}}\cdot\overline{\overset{0}{v}_n(y)}S_{R_0}\left(\int\limits_0^R\frac{\sin\,\mu h}{h}\left[\int\limits_{x-h}^{x+h}q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)\,d\xi\right]dh\right),$$

$$\overset{1}{\omega}{}^{R_0}_n(x,\mu)\overline{\overset{1}{v}_n(y)}=\overset{1}{u}_n(x)\overline{\overset{1}{v}_n(y)}\delta^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}+\overset{1}{u}_n(x)\overline{\overset{1}{v}_n(y)}S_{R_0}(J^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R))-$$

(26)

$$
-\frac{1}{\pi\sqrt{\lambda_n}}\cdot \overset{0}{u}_n(x)\overline{\overset{1}{v}_n(y)}S_{R_0}\left(\int\limits_0^R \sin\,\mu h \sin\sqrt{\lambda_n}h\,dh\right)-
$$

$$
-\frac{1}{\pi\sqrt{\lambda_n}}\cdot \overline{\overset{1}{v}_n(y)}S_{R_0}\left(\int\limits_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\left[\int\limits_{x-h}^{x+h} q(\xi)\overset{1}{u}_n(\xi)\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)d\xi\right]dh\right)-
$$

$$
-\frac{1}{2\pi\lambda_n}\overline{\overset{1}{v}_n(y)}S_{R_0}\left(\int\limits_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\left[\int\limits_{x-h}^{x+h}(|x-\xi|-h)q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\cos\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)d\xi\right]dh\right)+
$$

$$
+\frac{1}{2\pi\lambda_n^{3/2}}\overline{\overset{1}{v}_n(y)}S_{R_0}\left(\int\limits_0^R \frac{\sin\mu h}{h}\left[\int\limits_{x-h}^{x+h} q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)d\xi\right]dh\right).
$$

В силу условия (4), нетрудно убедиться в том. что из $\mu_n > A$ вытекает $\mu_n = \alpha_n$. Не уменьшая общности, можно считать что $\mu > A+1$.

Суммируя по всем $n \in N$ и имея в виду (23), из (25), и (26) получим следующее, пока формальное, соотношение в метрике $L_2(G)$ (относительно аргумента y):

(27)

$$
\sum_{\substack{n=1\\ i=1,0}}^{\infty} \overset{i}{\omega}{}_n^{R_0}(x,y)\overline{\overset{1}{v}_n(y)} = \sum_{\substack{\mu_n\le\mu\\ i=0,1}}^{\infty}\overset{i}{u}_n(x)\overline{\overset{1}{v}_n(y)} - \frac{1}{2}\sum_{\substack{\alpha_n=\mu\\ i=0,1}}^{\infty}\overset{i}{u}_n(x)\overline{\overset{1}{v}_n(y)}+
$$

$$
+\sum_{\substack{n=1\\ i=0,1}}^{\infty}\overset{i}{u}_n(x)\overline{\overset{1}{v}_n(y)}S_{R_0}(J^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R))-
$$

$$
-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\overset{0}{u}_n(x)\overline{\overset{1}{v}_n(y)}S_{R_0}\left(\int\limits_0^R \frac{\sin\mu h\sin\sqrt{\lambda_n}h}{\sqrt{\lambda_n}}\,dh\right)-
$$

$$
-\frac{1}{\pi}\cdot\sum_{\substack{n=1\\ i=0,1}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\overline{\overset{1}{v}_n(y)}S_{R_0}\left(\int\limits_0^R \frac{\sin\mu\, h}{h}\left[\int\limits_{x-h}^{x+h} q(\xi)\overset{i}{u}_n(\xi)\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)\,d\xi\right]dh\right)-
$$

$$
-\frac{1}{2\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\overset{1}{v}_n(y)}S_{R_0}\left(\int\limits_0^R \frac{\sin\mu\, h}{h}\left[\int\limits_{x-h}^{x+h}(|x-\xi|-h)q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\frac{\cos\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{\lambda_n}d\xi\right]dh\right)+
$$

$$
+\frac{1}{2\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\overset{1}{v}_n(y)}S_{R_0}\left(\int\limits_0^R \frac{\sin\mu\, h}{h}\left[\int\limits_{x-h}^{x+h} q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\frac{(\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{\lambda_n^{3/2}}\,d\xi\right]dh\right).
$$

Докажем теперь, что все ряды в правой части соотношения (27) сходятся б метрике $L_2(G)$, а L_2—нормы их сумм, кроме первой, ограничены сверху постоянными, не зависящими от точек $x \in K$ и чисел $\mu > A+1$. Этим будет доказано, что в метрике $L_2(G)$ справедливо равенство (27).

Поскольку число μ фиксированно и иммет место условие (5), то первые два ряда состоят из конечного числа членов, принадлежащих пространству $L_2(G)$. В силу оценок (5), (6) и (7), L_2—норму второй суммы можно оценить следующим образом:

$$\Big\| \sum_{\substack{\alpha_n=\mu \\ i=0,1}} \overset{i}{u}_n(x)\overline{\overset{i}{v}_n(y)} \Big\|_{L_2(G))} \le \sum_{\substack{\alpha_n=\mu \\ i=0,1}} \max_{x\in K} |\overset{i}{u}_n(x)| \cdot \|\overset{i}{v}_n\|_{L_2(G)} \le$$

$$\le C(K,\,q) \cdot \sum_{\substack{\alpha_n=\mu \\ i=0,1}} \Big\| \overset{i}{u}_n \Big\|_{L_2(K_{R_1})} \cdot \Big\| \overset{i}{v}_n \Big\|_{L_2(G)} \le 2C(K,q)C(K_{R_1})B,$$

где $0 < R_1 < \varrho(K, \partial G)$.

Что касается остальных рядов в правой части (27), мы докажем более сильные результаты: для любого $x \in K$ сходятся ряды, общие члены которых являются L_2—нормами общих членов исходных рядов, причем сумма каждого из этих числовых рядов есть $O(1)$ про $\mu \to +\infty$ равномерно односительно x на компакте K.

Ряд

$$\sum_{\substack{n=1 \\ j=0,1}}^{\infty} |\overset{i}{u}_n(x)|\ |S_{R_0}(J^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R))| \cdot \|\overset{i}{v}_n\|_{L_2(G)} \tag{28}$$

представим в виде*

$$\sum_{\substack{n=1 \\ i=0,1}}^{\infty} (\cdot) = \sum_{\substack{0\le\mu_n\le[A]+1 \\ i=0,1}} (\cdot) \sum_{\substack{[A']+1<\alpha_n<\mu-1 \\ i=0,1}} (\cdot) + \sum_{\substack{|\alpha_n-\mu|\le 1 \\ i=0,1}} (\cdot) + \sum_{\substack{\alpha_n>\mu+1 \\ i=0,1}} (\cdot),$$

и, используя оценки (5), (6), (7) и (24), оценим каждую из этих четырех сумм отдельно.

1) $$\sum_{\substack{0\le\mu_n\le[A]+1 \\ i=0,1}} (\cdot) \le \sum_{k=0}^{[A']+1} \Big(\sum_{\substack{k\le\mu_n<k+1 \\ i=0,1}} (\cdot) \Big) \le 2([A])+2)C_1(R_0,\,A)C(K,\,q)C(K_{R_1})B;$$

2) $$\sum_{\substack{[A]+1<\alpha_n<\mu-1 \\ i=0,1}} (\cdot) \le \sum_{\substack{[A]+1<\alpha_n\le\frac{\mu}{2} \\ i=0,1}} (\cdot) + \sum_{\substack{\frac{\mu}{2}<\alpha_n<\mu-1 \\ i=0,1}} (\cdot) \le$$

*[A] обозначает целую часть числа A.

$$\leq \sum_{k=[A]+1}^{[\frac{\mu}{2}]}\Bigg(\sum_{\substack{k<\alpha_n\leq k+1\\ i=0,1}}(\cdot)\Bigg)+\sum_{k=1}^{[\frac{\mu}{2}]}\Bigg(\sum_{\substack{\mu-k-1<\alpha_n\leq \mu-k\\ i=0,1}}(\cdot)\Bigg)\leq$$

$$\leq 2C_2(R_0,\,A)C(K,\,q)C(K_{R_1})\cdot\Bigg[\sum_{k=[A]+1}^{[\frac{\mu}{2}]}\Bigg(\sum_{k<\alpha_n\leq k+1}\frac{1}{\alpha_n^2}\Bigg)+$$

$$+\sum_{k=1}^{[\frac{\mu}{2}]}\Bigg(\sum_{\mu-k-1<\alpha_n\leq\mu-k}\frac{1}{|\alpha_n-\mu|^2}\Bigg)\Bigg]\leq 4C_2(R_0,\,A)C(K,\,q)C(K_{R_1})B\Bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\Bigg);$$

3) $$\sum_{\substack{|\alpha_n-\mu|\leq 1\\ i=0,1}}(\cdot)\leq 2C_1(R_0,\,A)C(K,\,q)C(K_{R_1})B;$$

4) $$\sum_{\substack{\alpha_n>\mu+1\\ i=0,1}}(\cdot)=\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(\sum_{\substack{\mu+k<\alpha_n\leq\mu+k+1\\ i=0,1}}(\cdot)\Bigg)\leq$$

$$\leq 2C_2(R_0,\,A)C(K,\,q)C(K_{R_1})\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(\sum_{\mu+k<\alpha_n\leq\mu+k+1}\frac{1}{|\alpha_n-\mu|^2}\Bigg)\leq$$

$$\leq 2C_2(R_0,\,A)C(K,\,q)C(K_{R_1})B\cdot\Bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\Bigg).$$

Рассмотрим теперь ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|\sqrt{\lambda_n}|}|\overset{0}{u}_n(x)|\,\Bigg|\,S_{R_0}\Bigg(\int\limits_0^R\sin\mu\,h\sin\sqrt{\lambda_n}h\,dh\Bigg)\Bigg|\,\cdot\|\overset{1}{v}_n\|_{L_2(G)}. \tag{29}$$

В силу оценки (4) и соотношения (21), имеют место следующие оценки:

1) $$\Bigg|\,S_{R_0}\Bigg(\int\limits_0^R\sin\mu h\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}h}{\sqrt{\lambda_n}}\,dh\Bigg)\Bigg|\leq C_3(R_0,\,A),\ \text{ для любых } \mu \text{ и } \sqrt{\lambda_n};$$

2) $$\Bigg|\,S_{R_0}\Bigg(\int\limits_0^R\sin\lambda h\sin\sqrt{\lambda_n}h\,dh\Bigg)\Bigg|\leq C_4(R_0,\,A),\ \text{ для любых } \mu \text{ и } \sqrt{\lambda_n};$$

(30) 3) $$\Bigg|\,S_{R_0}\Bigg(\int\limits_0^R\sin\mu h\sin\sqrt{\lambda_n}h\,dh\Bigg)\Bigg|\leq\frac{C_5(R_0,\,A)}{|\alpha_n-\mu|^2},\ \text{ при } |\alpha_n-\mu|>1.$$

При этом постоянные $C_i(R_0,\,A)$, $i=3,\,4,\,5$, зависят лишь от величин R_0 и A.

В доказательстве сходимости ряда (29) придется оценивать величину $\frac{1}{\|\sqrt{\lambda_n}|} \cdot \overset{0}{u}_n(x) \cdot \|\overset{1}{v}_n\|_{L_2(G)}$. При помощи овенок (6) и (8) эта величина оценивается следующим способом:

$$\frac{1}{|\sqrt{\lambda_n}|} \cdot |\overset{0}{u}_n(x)| \cdot \|\overset{1}{v}_n\|_{L_2(G)} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}|} \max_{x\in k} \|\overset{0}{u}_n(x)| \cdot \|\overset{1}{v}_n\|_{L_2(G)} \leq$$
$$\leq A\,(K,\, q) \|\overset{1}{u}_n\|_{L_2(K_{R_1})} \cdot \|\overset{1}{v}_n\|_{L_2(G)} \leq A\,(K,\, q)\, C\,(K_{R_1}).$$

Добавив оценки (5) и (30), сходимость ряда (29) и равномерую относительно $x \in K$ и $\mu > A+1$ ограниченность его суммы мы доказываем приемом, использованным в случае ряда (28).

Для того чтобы доказать сходимость ряда

$$\sum_{\substack{n=1\\ i=0,1}}^{\infty} \frac{1}{|\sqrt{\lambda_n}|} \cdot \Big| S_{R_0} \Big(\int_0^R \frac{\sin \mu h}{h} \Big[\int_{x-h}^{x+h} q(\xi) \overset{i}{u}_n(\xi) \sin \sqrt{\lambda_n} (|x-\xi| - h| d\xi \Big] \, dh \Big) \|\overset{i}{v}_n\|_{L_2(G)}, \tag{31}$$

нам будут нужны оценки интеграла

$$\begin{aligned} &\int_0^R \frac{\sin \mu\, h}{h} \Big[\int_{x-h}^{x+h} q(\xi) \overset{i}{u}_n(\xi) \sin \sqrt{\lambda_n} (|x-\xi| - h)\, d\xi \Big]\, dh = \\ &= \int_x^{x+R} q(\xi) \overset{i}{u}_n(\xi) \cdot \Big[\int_{\xi - x}^{R} \frac{\sin \mu h}{h} \sin \sqrt{\lambda_n} (\xi - x - h)\, dh \Big]\, d\xi + \\ &+ \int_{x-R}^{x} q(\xi) \overset{i}{u}_n(\xi) \Big[\int_{x-\xi}^{R} \frac{\sin \mu h}{h} \sin \sqrt{\lambda_n} (x - \xi - h)\, dh \Big]\, d\xi, \end{aligned} \tag{32}$$

и его усреднения.

Заметим сначала, что справедливь оценки

$$\Big| \int_{|x-\xi|}^{R} \frac{\sin \mu h}{h} \sin \sqrt{\lambda_n} (|x-\xi| - h) dh \Big| \leq \begin{cases} \dfrac{D_1'(R_0,\, A)}{|x-\xi|^{\delta}}, & \text{для любых } \mu \text{ и } \sqrt{\lambda_n} \\ \dfrac{D_2'(R_0,\, A)}{|x-\xi|^{\delta} \cdot |\alpha_n - \mu|^{\delta/2}}, & \text{при } |\alpha_n - \mu| > 1. \end{cases}$$

При этом δ—произвольное число из интервала (0, 1), а постоянные $D_1'(R_0, A)$ и $(D_2'(R_0, A)$ зависят лишь, от указанных величин. Доказательство этих оценок елементарно. В случае действительных чисел λ_n оценки, аналогичны оценкам (33)–(34), и использованы работе [**1**].

Рассмотрим теперь первый интеграл в правой части (32); аналогично рассматривается второй. В силу оценок (33)—(34), имеют место оценки

$$\Big| \int\limits_{x}^{x+R} q(\xi)\overset{i}{u}_n(\xi)\Big[\int\limits_{\xi-x}^{R} \frac{\sin\mu h}{h}\sin\sqrt{\lambda_n}(\xi-x-h)\,dh\Big]d\xi\Big| \le$$

$$(35)\quad \le \begin{cases} D_1'(R_0,\,A)\cdot\max\limits_{x\in K_{2R_0}}|\overset{i}{u}_n(x)|\cdot\displaystyle\int\limits_{x}^{x+R}\frac{|q(\xi)|}{(\xi-x)^{\delta}}\,d\xi, & \text{для любых } \sqrt{\lambda_n} \text{ и } \mu;\\ \dfrac{D_2'(R_0,\,A)}{|\alpha_n-\mu|^{\delta/2}}\cdot\max\limits_{x\in K_{2R_0}}|\overset{i}{u}_n(x)|\cdot\displaystyle\int\limits_{x}^{x+R}\frac{|q(\xi)|}{(\xi-x)^{\delta}}\,d\xi, & \text{при } |\alpha_n-\mu|>1.\end{cases}$$

Пусть r-число такое, что $\frac{1}{r}+\frac{1}{p}=1$. Определим число $\delta\in(0,\,1)$ так чтобы было $\delta\cdot r<1$. Тогда справедлива оценка

$$\int\limits_{x}^{x+R}\frac{|q(x)|}{(\xi-x)^{\delta}}\,d\xi \le \left[\frac{(2R_0)^{1-\delta\cdot r}}{1-\delta\cdot r}\right]^{\frac{1}{r}}\cdot\|q\|_{L_{p(K_2R_0)}}.$$

Отсюда, в силу (32) и (35), вытекают оценки

$$\Big|\int\limits_{0}^{R}\frac{\sin\mu\,h}{h}\Big[\int\limits_{x-h}^{x+h}q(\xi)\overset{i}{u}_n(\xi)\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)\,d\xi\Big]dh\Big| \le$$

$$(36)\qquad \le\begin{cases} D_1(R_0,\,A,\,q)\max\limits_{x\in K_{2R_0}}|\overset{i}{u}_n(x)|, & \text{для любых } \sqrt{\lambda_n} \text{ и } \mu;\\ \dfrac{D_2(R_0,\,A,\,q)}{|\alpha_n-\mu|^{\delta/2}}\max\limits_{x\in K_{2R_0}}|\overset{i}{u}_n(x)|, & \text{при } |\alpha_n-\mu|>1.\end{cases}$$

Справедлива и оценка

$$\Big|\int\limits_{0}^{R}\frac{\sin\mu h}{h}\Big[\int\limits_{x-h}^{x+h}q(\xi)\overset{i}{u}_n(\xi)\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{\sqrt{\lambda_n}}\,d\xi\Big]dh\Big| \le$$

$$\le D_3(R_0,\,A,\,q)\cdot\max_{x\in K_{2R_0}}|\overset{i}{u}_n(x)|,$$

для тех $n\in N$, для коротых $0\le\mu_n\le[A]+1$. При этом постоянные $D_i(R_0,\,A,\,q)$ зависят лишь от указанных величин, так что и для усреднений интегралов в левой части оценок (36)–(38) справедлибы те же самые оценки.

Перейдем к доказателству сходимости ряда (31). Представим его в виде

$$\sum_{\substack{n=1\\ i=0,1}}^{\infty}(\cdot)=\sum_{\substack{0\le\mu_n\le[A]+1\\ i=0,1}}(\cdot)+\sum_{\substack{[A]+1<\alpha_n\le\frac{\mu}{2}\\ i=0,1}}(\cdot)+\sum_{\substack{\frac{\mu}{2}<\alpha_n<\mu-1\\ i=0,1}}(\cdot)+\sum_{\substack{|\alpha_n-\mu|\le 1\\ i=0,1}}(\cdot)+$$
$$+\sum_{\substack{\mu+1<\alpha_n\le\frac{3\mu}{2}\\ i=0,1}}(\cdot)+\sum_{\substack{\alpha_n>\frac{3\mu}{2}\\ i=0,1}}(\cdot),$$

и оценим одельно каждую из полученных шести сумм.

1) В силу оценок $(5),(6),(7)$ и (38), имеет место оценка

$$\sum_{\substack{0\le\mu_n\le[A]+1\\ i=0,1}}(\cdot)\le 2D_3(R_0,\,A,\,q)\,C\,(K_{2R_0},q)\,C\,(K_{R_1})([A]+2)B.$$

Здесь и ниже K_{R_1}—компакт интервала G содержащий компакт K_{2R_0}.

2) Используя оценки $(5),(6),(7)$ и (37), получим неравенства

$$\sum_{\substack{[A]+1<\alpha_n\le\frac{\mu}{2}\\ i=0,1}}(\cdot)\le 2D_2(R_0,A,q)C(K_{2R_0},q)C(K_{R_1})\cdot\sum_{[A]+1<\alpha_n\le\frac{\mu}{2}}\frac{1}{|\sqrt{\lambda_n}|(\mu-\alpha_n)^{\delta/2}}\le$$
$$\le 2D_2(R_0,\,A,\,q)C(K_{2R_0},\,q)\,C\,(K_{R_1})\cdot\sum_{k=[A]+1}^{[\frac{\mu}{2}]}\left(\sum_{k<\alpha_n\le k+1}\frac{1}{\alpha_n^{1+\delta/2}}\right)\le$$
$$\le 2D_2(R_0,\,A,\,q)C(K_{2R_0},\,q)C(K_{R_1})B\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\delta/2}}\right).$$

3) Вполне аналогично доказываются и оценки

$$\sum_{\substack{\frac{\mu}{2}<\alpha_n<\mu-1\\ i=0,1}}(\cdot)\le 2D_2(R_0,\,A,\,q)\,C\,(K_{2R_0},\,q)\,C\,(K_{R_1})B\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1=\delta/2}}\right),$$
$$\sum_{\substack{\mu+1<\alpha_n\le\frac{3\mu}{2}\\ i=0,1}}(\cdot)\le 2D_2(R_0,\,A,\,q)\,C\,(K_{2R_0}\,q)\,C\,(K_{R_1})B\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1=\delta/2}}\right).$$

4) Полуьзуясь оценками $(5),(6),(7)$ и (36), получим оценку

$$\sum_{\substack{|\alpha_n-\mu|\le 1\\ i=0,1}}(\cdot)\le 2D_1(R_0,\,A,\,q)\,C\,(K_{2R_0},\,q)\,C\,(K_{R_1})B.$$

5) Для того чтобы оценить последнюю сумму, используем следующий факт: $\alpha_n > \frac{3\mu}{2} \Rightarrow \frac{1}{\alpha_n-\mu} < \frac{3}{\alpha_n}$. Тогда, в силу оценок (5), (6), (7) и (37), справедливы неравенства

$$\sum_{\substack{\alpha>\frac{3\mu}{2}\\ i=0,1}} (\cdot) \leq 2D_2(R_0,\, A,\, q)\, C\,(K_{2R_0},\, q)\, C\,(K_{R_1}) \cdot \sum_{\alpha_n>\frac{3\mu}{2}} \frac{1}{|\sqrt{\lambda_n}|(\alpha_n-\mu)^{\delta/2}} \leq$$

$$\leq 6D_2(R_0,\, A,\, q)\, C\,(K_{2R_0},\, q)\, C\,(K_{R_1}) \cdot \sum_{k=[\frac{3\mu}{2}]^\infty} \left(\sum_{k<\alpha_n\leq k+1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n^{1+\delta/2}} \right) \leq$$

$$\leq 6D_2(R_0,\, A,\, q)\, C\,(K_{2R_0},\, q)\, C\,(K_{R_1}) B \cdot \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\delta/2}} \right).$$

Итак, ряд (31) сходится, причем его сумма есть $O(1)$ при $\mu \to +\infty$ равномерно относительно x на компакте K.

Рассмотрим теперь ряд

(39)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big| S_{R_0}\Big(\int_0^R \frac{\sin\,\mu h}{h} \Big[\int_{x-h}^{x+h} (|x-\xi|-h) q(\xi) \overset{0}{u}_n(\xi) \frac{\cos\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{\lambda_n}\, d\xi \Big] dh \Big) \Big| \|\overset{1}{v}_n\|_{L_2(G)}.$$

Нетрудно убедитьсяв том, что для усреднения интеграла

$$\int_0^R \frac{sin\,\mu h}{h} \left[\int_{x-h}^{x+h} (|x-\xi|-h) q(\xi) \overset{0}{u}_n(\xi) \cos\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)\, d\xi \right] dh$$

справедливы оценки вида (36) и (37). Для усреднения этото интеграла, умноженного на $\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}$, справедлива оценка вида (38), в силу того, что числа $\sqrt{\lambda_n}$ не именют конечных точек сгущения.

Величина

$$\max_{x\in K_{2R_0}} |\overset{0}{u}_n(x)| \cdot \|\overset{1}{v}_n\|_{L_2G}$$

оценивается, при помощи оценок (6) и (8), следующим образом:

$$\max_{x\in K_{2R_0}} |\overset{0}{u}_n(x)| \cdot \|\overset{1}{v}_n\|_{L_2G} \leq A(K_{2R_0},\, q) |\sqrt{\lambda_n}| \|\overset{1}{u}_n\|_{L_2(KR_1)} \cdot \|\overset{1}{v}_n\|_{L_2(G)} \leq$$

$$\leq |\sqrt{\lambda_n}| \cdot A(K_{2R_0},\, q)\, C\,(K_{R_1}).$$

Учитывая эти замечания, сходимость ряда (39) мы доказываем приемом, использованным в случае ряда (31).

То же самое можно сказать и о ряде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big| S_{R_0}\Big(\int_0^R \frac{\sin\,\mu h}{h} \Big[\int_{x-h}^{x+h} q(\xi) \overset{0}{u}_n(\xi) \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{\lambda_n^{3/2}}\, d\xi \Big] dh \Big) \Big| \|\overset{1}{u}_n\|_{L_2(G)}.$$

Таким образом, мы доказали, что в метрике $L_2(G)$ имеет место равенство (27) и L_2—нормы сумм всех рядов в правой части (27), кроме первого, ограничены сверху равномерно относительно точек $x \in K$ и чисел $\mu > A+1$.

Заметим, что для любых фиксированных $x \in K$ и $\mu > A+1$ функция $S_{R_0}(\omega_R(x, y, \mu))$ принадлежит классу $L_2(G)$. Это вытелает из явного вида функции $S_{R_0}(\omega_R(x, y, \mu))$:

(40)

$$S_{R_0}(\omega_R(x,y,\mu)) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{\sin \mu|x-y|}{|x-y|}, \quad \text{при} \quad |x-y| \leq R_0, \\ \dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{\sin \mu|x-y|}{|x-y|} \cdot \dfrac{2R_0 - |x-y|}{R_0}, \ \text{при} \ R_0 \leq |x-y| \leq 2R_0, \\ 0, \quad \text{при} \quad |x-y| \geq 2R_0. \end{cases}$$

Используя полноту системы $\left\{ \overset{i}{u}_n(x) \right\}_{\substack{n=1 \\ i=0,1}}^{\infty}$, нетрудно убедиться в том, что имеет место следующее соотношение в метрике $L_2(G)$:

$$S_{R_0}(\omega_R(x, y, \mu)) = \sum_{\substack{n=1 \\ i=0,1}}^{\infty} \overset{i}{\omega}{}_n^{R_0}(x, \mu) \cdot \overline{\overset{i}{v}_n(y)}. \tag{41}$$

В силу соотношений (27) и (41), приходим к выводу, что для любых фиксированных $x \in K$ и $\mu > A+1$ справедливо следующее равенство в метрике $L_2(G)$:

$$S_{R_0}(\omega_R(x,y, \mu) - \sum_{\substack{\mu_n \leq \mu \\ i=1,0}} \overset{i}{u}_n(x)\overline{\overset{i}{v}_n(y)} =$$

$$= \sum_{i=1,0} n = 1^{\infty} \overset{i}{u}_n(x)\overline{\overset{i}{v}_n(y)} S_{R_0}(J^{\mu}_{\sqrt{\lambda_n}}(R)) - \frac{1}{2} \cdot \sum_{\substack{\alpha_n = \mu \\ i=0,1}} \overset{i}{u}_n(x)\overline{\overset{i}{v}_n(y)} -$$

(42)

$$- \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \overset{0}{u}_n(x)\overline{\overset{i}{v}_n(y)} S_{R_0}\left(\int_0^R \sin\, \mu h \frac{\sin\sqrt{\lambda_n}h}{\sqrt{\lambda_n}}\, dh\right) -$$

$$- \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{\substack{n=1 \\ i=0,1}}^{\infty} \overline{\overset{i}{v}_n(y)} S_{R_0}\left(\int_0^R \frac{\sin\, \mu h}{h}\left[\int_{x-h}^{x+h} q(\xi)\overset{i}{u}_n(\xi)\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{\sqrt{\lambda_n}}\, d\xi\right] dh\right) -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\overset{i}{v}_n(y)} S_{R_0}\left(\int_0^R \frac{\sin\, \mu h}{h}\left[\int_{x-h}^{x+h} (|x-\xi| - h) q(\xi)\overline{\overset{0}{u}_n(\xi)} \cdot\right.\right.$$

$$\cdot \frac{\cos\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{\lambda_n}\,d\xi\Bigg]dh\Bigg)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\overset{i}{v}_n(y)}S_{R_0}\Bigg(\int\limits_0^R\frac{\sin\mu h}{h}\Bigg[\int\limits_{x-h}^{x+h}q(\xi)\overset{0}{u}_n(\xi)\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}(|x-\xi|-h)}{\lambda_n^{3/2}}\,d\xi\Bigg]dh\Bigg).$$

При этом L_2—норма функции в левой части равенства (42) есть O (1) при $\mu\to+\infty$ равномерно относительно x на компакте K.

Оценка (15) доказана.

Второй шаг в доказательстве оценки (13) закльстве в доказательстве оценки

$$\Big\|\sum_{\substack{\mu_n\le\nu_{[\mu]}\\ i=0,1}}\overset{i}{u}_n(x)\overline{\overset{i}{v}_n(x)}-\frac{1}{\pi}\frac{\sin\,\nu_{[\mu]}(x-y)}{x-y}\Big\|_{L_{2(G)}}=O(1),\ \ \mu\to+\infty, \tag{43}$$

равномерной относительно x на компакте K. В силу (40), оценка (43) получается с помощью оценки (15) при $\mu=\nu_{[\mu]}$*

Осталоь еще доказать оценку

$$\Big\|\sum_{\substack{1\le n\le\mu\\ i=0,1}}\overset{i}{u}_n(x)\overline{\overset{i}{v}_n(x)}-\sum_{\substack{\mu_n\le\nu_{[\mu]}\\ i=0,1}}\overset{i}{u}_n(x)\overline{\overset{i}{v}_n(x)}\Big\|_{L_{2(G)}}=O(1),\ \mu\to+\infty, \tag{44}$$

равномерную относительно x на компакте K. Эта оценка доказывается при помощи оценок (4)–(7) (см. § 3, [**3**].

Из оценок (43)–(44) вытекает оценка (13). Лемма 3 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 1

В силу того, что тригонометрическая система образует базис в пространстве $L_2(G)$, утверждение б) бытекает из утверждения в) немедленно. Импликация б) $\Rightarrow$ а) доказывается методом, разработанным в § 1, [**2**]. Имея оценку (13), импликацию а) $\Rightarrow$ в) доказываем приемом, использованным в § 4, [**3**].

§ 4. Случай оператора Штурма-Лиувилля

1. Рассмотрим оператор Штурма-Лиувилля

$$L(u)=-(p(x)u'(x))'+q(x)u(x) \tag{45}$$

на конечном интервале $G=(a,b)$, причем точка $x_0\in G$ является точкой разрыва коэффициента $p(x)$. На коэффициенты оператора накладываются

---

*Заметим, что $\nu_{[\mu]}\to+\infty$ при $\mu\to\infty$.

следующие условия:

$$
(46)\quad
\begin{aligned}
&1)\ p_1(x) \in C^{(2)}[a,\, x_0],\ p_2(x) \in C^{(2)}[x_0,\, b];\\
&2)\ p_1(x) \geq \alpha_1 > 0 \text{ всюду на } [a,\ x_0],\ p_2(x) \geq \alpha_2 > 0 \text{ всюду на } [x_0,\ b];\\
&3)\ q(x)\text{—комплекснозначная функция из класса } L_p^{\mathrm{loc}}(G),\ \ 1 < p < \infty,
\end{aligned}
$$

Собственные и присоединенные функции оператора (45) определим следующим образом.

Определение 3. *Комплекснозначная функция* $\overset{0}{u}_n(x)$ *из класса* $L_2(G)$, $\overset{0}{u}_n(x) \neq 0$, *naзтвается собственной функцией оператора* (45), *отвечающей комплексному собственному значению* λ, *если:*

1) $\overset{0}{u}$ *и* $\overset{0}{u}{}'(x)$ *являытся абсолютно непрерывными функциями на любом полуотрезке* $[c, x_0) \subseteq (a,\, x_0]$, *и на любом отрезке* $[x_0,\, d] \subseteq [x_0,\, b)$;

2) $\overset{0}{u}(x)$ *удовлетворяем уравнению*

$$-(p_1(x)\overset{0}{u}{}'(x))' + q(x)\overset{0}{u}(x) = \lambda \cdot \overset{0}{u}(x)$$

почти вюду в интервале $(a,\, x_0)$, *и уравнению*

$$-(p_2(x)\overset{0}{u}{}'(x))' + q(x)\overset{0}{u}(x) = \lambda \cdot \overset{0}{u}(x)$$

почти всюду в интервале $(x_0,\, b)$;

3) $\overset{0}{u}(x)$ *удовлетцоряет следующим условиям сопряжения в точке разрыва* x_0:

a) $(p_1(x_0))^{\frac{1}{4}} \cdot \overset{0}{u}(x_0 - 0) = (p_2(x_0))^{\frac{1}{4}} \cdot \overset{0}{u}(x_0 + 0)$;

b) $(p_1(x_0))^{\frac{3}{4}} \cdot \overset{0}{u}{}'(x_0 - 0) = \frac{1}{4} p_1'(x_0 - 0) \cdot (p_1(x_0))^{-\frac{1}{4}} \cdot \overset{0}{u}(x_0 - 0) =$

$= (p_2(x_0))^{\frac{3}{4}} \cdot \overset{0}{u}{}'(x_0 + 0) + \frac{1}{4}\, p_2'(x_0 + 0) \cdot (p_2(x_0))^{-\frac{1}{4}} \cdot \overset{0}{u}(x_0 + 0)$.

Определение 4. *Комплекснозначная функция* $\overset{i}{u}(x)$ *из класса* $L_2(G)$ *называется присоединенной функцией порядка* $i (i = 1,\, 2, \dots)$ *оператора* (45), *отвечающей собственной функции* $\overset{0}{u}(x)$ *и собственному числу* λ, *если*

1') $\overset{i}{u}(x)$ *удовлетворяет условиям* 1) *и* 3) *определения рм 3;*

2') $\overset{i}{u}(x)$ *удовлетворяет уравнению*

$$-(p_1(x)\overset{i}{u}{}'(x))' + q(x)\overset{i}{u}(x) = \lambda \cdot \overset{i}{u}(x) + \overset{i-1}{u}(x)$$

почти всюду в интервале $(a,\, x_0)$, *и уравнению*

$$-(p_2(x)\overset{i}{u}{}'(x))' + q(x)\overset{i}{u}(x) = \lambda \cdot \overset{i}{u}(x) + \overset{i-1}{u}(x)$$

почти всюду в интервале $(x_0,\, b)$.

Будем предполагать, что любому собственному значению оператора(45) отвечает одна собственная и одна присоединенная функция. Пусть $\left\{\overset{i}{u}_n(x)\right\}_{\substack{n=1\\i=0,1}}^{\infty}$ –произвольная полная в $L_2(G)$ и минимальная система собственных и присоединенных функций оператора (45), $\left\{\lambda_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ — соответствующая система собственных значений, не имеющих конечных точек сгущения и занумерованных в порядке неубывания величины $|\sqrt{\lambda_n}|$. Пуст $\left\{\overset{i}{v}_n(x)\right\}_{\substack{n=1\\i=0,1}}^{\infty}$ –биортогонально сопряженная к системе $\left\{\overset{i}{u}_n(x)\right\}$ в $L_2(G)$ система функций.

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть собственные значения оператора* (45), *коэффициенты которого имеют свойства* (46), *удволетворяют условиям* (4)–(5). *Для того чтобы система* $\left\{\overset{i}{u}_n(x)\right\}_{\substack{n=1\\i=0,1}}^{\infty}$ *обладала свойством базисности, неопходимо и достаточно, чтобы для любого компакта K интервала G существовала постоянная $C(K)$, не зависящая от $n \in N$ и такая, что справедливы неравенмства*

$$\|\overset{i}{u}_n\|_{L_2(K)} \cdot \|\overset{i}{v}_n\|_{L_2(G)} \le C(K), \ \ n \in N, \ \ i = 0,1. \tag{47}$$

2. Следуя В. А. Ильину [**1**], введем в рассмотрение функции $\varrho_1(t)$ и $\varrho_2(t)$, определяемиы соотношениями

$$\int\limits_{x_0-\varrho_1(t)}^{x-0} (p_1(\tau))^{-\frac{1}{2}} d\tau = t, \qquad \int\limits_{x_0}^{x_0+\varrho_2(t)} (p_2(\tau))^{-\frac{1}{2}} d\tau = t.$$

Эти функции определены и монотоно возрастают на сегменте $0 \le t \le t_0$, где t_0—достаточно малое число. Обратные функции $t = \overline{\varrho}_1(h)$ и $t = \overline{\varrho}_2(h)$ можно представить в виде

$$\overline{\varrho}_1(x_0 - x) = \int\limits_x^{x_0} (p_1(\tau))^{-\frac{1}{2}} d\tau, \ \ \overline{\varrho}_2(x - x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} (p_2(\tau))^{-\frac{1}{2}} d\tau.$$

При помощи этих функций, определим следующее преобразование функции и аргумента: для любой функции $f(x)$ из класса $L_2G)$ определяется функция $\tilde{f}(t)$ из класса $L_2(\tilde{G})$, где

$$\tilde{G} = (-\overline{\varrho_1}(x_0 - a), \ \ \overline{\varrho_2}(b - x_0))$$

соотношениями

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f[x_0 - \varrho_1(-t)] \cdot (p_1[x_0 - \varrho_1(-t)])^{\frac{1}{4}}, & \text{при} \ \ -\overline{\varrho_1}(x_0 - a) \le t < 0, \\ f[x_0 + \varrho_2(t)] \cdot (p_2[x_0 + \varrho_2(t)])^{\frac{1}{4}} & \qquad 0 \le t \le \overline{\varrho_2}(b - x_0). \end{cases}$$

Спаведливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть собственные числа оператора* (45), *коэффициенты которого обладаюм свойствами* (46), *удовлетворяюм условиям* (4)–(5) *и пусть выполнены условия базисности* (47).

Если $f(x)$ произвольная функция из класса $L_2(G)$ и K произвольный компакт интервала G, то следующие предложения равносильны:

a) $\sigma_\mu(x,f)$ *сходися при $\mu \to \infty$ равномерно относительно x на компакте K.*

b) $S_{\nu_{[\mu]}}(t,\tilde{f})$ *сходистя при $\mu \to \infty$ равномерно относительно t на соответствующем компакте $\tilde{K} \subseteq \tilde{G}$.*

Теоремы 2 и 3 доказываютя при помощи теоремы 1, использованием указанного преобразования функции и аргумента (см. [**5**]).

Замечание. Теоремы 1–3 остаются справедливыми и в том случае, когда любому собственному значению λ соответствующих операторов отвечает конечное число (бльше единицы) присоединенных функций.

Автор благодарит профессора В. А. Ильина за постановку задачи и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Ильин В. А., *О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора*, Математические заметки, т. **22**, Н 5 (1977), 679–698.

[2] Ильин В. А., *Неопходимые и достаточные условя базиности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений*, I, Диффееренциальные уравнения, т. **16** Но, 5 (1980), 771–794.

[3] Ильин В. А., *Неопходимые и достаточные условя базиности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений*. II, Дифференциальные уравнения, т. **16** Но, 6 (1980), 980–1009.

[4] Йо И., *Некоторые вопросы спектральной теории для одномерного несамосопряженного оператора Шредингера с потенциалном из L_1*, ДАН СССР, т. 250 Но 1 (1980), 39–41.

[5] Лажетић Н., *О конвергенцији спектралних разлагања која одговарају обичним диференцијалним операторима другог реда*, Докторска дисертација, Београд, 1980.

[6] Ломов И. С., *Оценки собственых и просоединенных функций оператора типа Штурма-Лиувилля*, ДАН СССР, т. **248**, Но 6 (1979), 1303–1306.

[7] Моисеев Е. И., *Асимптотическая формула среднего значения для регулярного решения обыкновенного дифференциального уравнения*, Дифференциальные уравнения, т. **16**, Но 5 (1980), 827–844.

[8] Титчмарш Е. Ч., *Разложения по сопственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка*, ИЛ, Москва, 1960.

Природно-математички факултет
Институт за математику
Студентски трг 16/1
11000 Београд