L'espace (Ω) n'est pas une classe $(\mathscr{E})$

Par

GEORGES KUREPA

I. L'espace (Ω) est constitué de tous les nombres ordinaux finis ou de puissance $\aleph_0$, la définition de la limite y étant comme suit: un point ζ de (Ω) sera dit un point d'accumulation d'un sous-ensemble F de (Ω) si tout intervalle de (Ω) contenant ζ contient un point de F distinct de ζ ou, ce qui revient au même, si, quel que soit l'ordinal $\alpha < \zeta$, il y ait un $\varphi \varepsilon F$ tel que $\alpha < \varphi < \zeta$.[1]) On sait que ζ est dit de première ou de seconde espèce suivant que ζ est un point isolé ou non-isolé dans (Ω) et que, dans le dernier cas, il y ait une suite de type ω d'ordinaux $\zeta_1 < \zeta_2 < \cdots$ inférieurs à ζ et tendant vers ζ.

Remarquons qu'aucun point ζ de (Ω) n'est point d'accumulation d'un ensemble dont les points succèdent à ζ, ce qu'on peut dire que tout point de (Ω) est isolé du côté droit.

II. Ceci étant, démontrons le théorème suivant:

L'espace (Ω) n'est pas une classe $(\mathscr{E})$.[2])

---

[1]) Comme d'ordinaire, Ω (ou ω_1) désigne le premier nombre ordinal infini non dénombrable; par conséquent, les signes $\alpha < \Omega$ et $\alpha \varepsilon (\Omega)$ veulent dire la même chose. Remarquons que ω (ou ω_0) désigne le plus petit ordinal infini.

[2]) Pour la définition des classes $(\mathscr{E})$ et de l'écart de deux points, voir mon autre Note de ce tome.

Supposons, par impossible, que (Ω) soit une classe $(\mathscr{E})$. Si $\alpha < \Omega$ [1]), soit $m(\alpha)$ le plus petit entier $n > 0$ tel que l'écart de α à tout nombre entre α et Ω soit supérieur à $\frac{1}{n}$; α étant isolé du côté droit, $m(\alpha)$ est bien déterminé.

Si $\alpha < \beta < \Omega$, désignons par $\nu(\alpha, \beta)$ le plus petit entier $n \geqslant 0$ tel que α non $\varepsilon\, S\left(\beta, \frac{1}{n+1}\right)$, $S\left(\beta, \frac{1}{n+1}\right)$ désignant l'ensemble de tous les points de (Ω) dont l'écart du point β est $< \frac{1}{n+1}$; en posant

$$\nu(\alpha) = \underset{\alpha<\beta<\Omega}{\text{borne sup.}}\ \nu(\alpha, \beta)$$

on voit que $0 \leqslant \nu(\alpha) \leqslant \omega$ pour tout $\alpha < \Omega$.

Nous disons que $\nu(\alpha) \leqslant m(\alpha)$, pour tout $\alpha < \Omega$. Dans le cas contraire, il y aurait un $\alpha < \Omega$ tel que $\nu(\alpha) > m(\alpha)$; il existerait donc un β entre α et Ω tel que $\alpha\, \varepsilon\, S\left(\beta, \frac{1}{m(\alpha)}\right)$, ce qui est absurde.

Or, la relation $\nu(\alpha) \leqslant m(\alpha)$ entraînerait celle-ci: $\nu(\alpha) < \omega$ pour tout $\alpha < \Omega$ ce qui est en contradiction avec le lemme suivant:

En désignant par $(\Omega)^n$ *l'ensemble de tous les* $\alpha < \Omega$ *tel que* $\nu(\alpha) = n$, $(n \leqslant \omega)$, *les ensembles* $(\Omega)^n$, $(n \leqslant \omega)$, *sont deux à deux disjoints et tels que* $\sum_{n \leq \omega} (\Omega)^n = (\Omega)$. *Si* $n < \omega$, *on aura* $p(\Omega)^n < \aleph_0$, *et donc* $p(\Omega)^\omega = \aleph_1$ [3]).

Démontrons seulement que pour tout $n < \omega$, l'ensemble $(\Omega)^n$ est fini. Si $p(\Omega)^n \geqslant \aleph_0$, $(n < \omega)$, soit ζ un point d'accumulation [4]) de $(\Omega)^n$; par conséquent, le „spheroïde" $S\left(\zeta, \frac{1}{n+1}\right)$ contiendrait un point, soit α, de $(\Omega)^n$ tel que $\alpha < \zeta$.

On aurait donc $\nu(\alpha, \zeta) \geqslant n+1$ et à plus forte raison, $\nu(\alpha) \geqslant n+1$ ce qui est incompatible avec $\alpha\, \varepsilon\, (\Omega)^n$ c'est-à-dire $\nu(\alpha) = n$.

Ainsi le lemme et le théorème sont démontrés.

---

[3]) pX veut dire „puissance de X".

[4]) Que ζ existe, cela résulte de ce que — comme l'a déjà prouvé Georg Cantor — l'espace (Ω) est compact.

Remarque. Puisque l'espace (Ω) est homéomorphe à un sous-ensemble d'un espace ordonné quelconque E dont le type ordinal est $(1+\lambda)\,\Omega$, λ étant le type ordinal de l'ensemble des nombres réels, on en conclut que E n'est pas une classe $(\mathscr{E})$ [5]; il en est encore ainsi de la „droite non-Archimédienne“ c'est-à-dire de tout espace ordonné dont le type ordinal est $(\lambda+1)\Omega^*+$ $+\lambda+(1+\lambda)\,\Omega$, Ω^* désignant le type inverse du type Ω.

III. Voici encore une propriété de l'espace (Ω):

Quelle que soit la famille $\mathscr{F}$ de voisinages définissant l'espace (Ω), l'ensemble M des points de (Ω) dont chacun appartient à une infinité non dénombrable d'éléments de $\mathscr{F}$ a la puissance $\aleph_1$.

Posons $\varphi(0)=0$ et $\varphi(\alpha+1)=\alpha$ pour tout $\alpha<\Omega$; si α est de seconde espèce et $<\Omega$, désignons par $\varphi(\alpha)$ un ordinal quelconque $<\alpha$ appartenant à un élément V de $\mathscr{F}$, V ne contenant aucun point $>\alpha$. Ainsi, pour tout $0<\alpha<\Omega$, $\varphi(\alpha)$ est un ordinal bien déterminé et $<\alpha$; à la suite d'un théorème de M. Alexandroff et d'Urysohn [6], il y a une infinité non dénombrable des α et un α_0, tous $<\Omega$, tels que $\varphi(\alpha)=\alpha_0$ pour tout α. Dans notre cas, le dernier fait veut dire que le point α_0 est contenu dans une infinité non dénombrable d'éléments de $\mathscr{F}$; autrement dit, l'ensemble M n'est pas vide. Supposons que $pM<\aleph_1$; l'ensemble $(\Omega)_0$ des éléments de (Ω) succédant à M aurait encore le type ordinal Ω; si l'on désigne par $\mathscr{F}_0$ la famille des $F\,(\Omega)$ non vides, F parcourant $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}_0$ définit l'espace $(\Omega)_0$; celui-ci ne contiendrait aucun point appartenant à une infinité non dénombrable d'éléments de $\mathscr{F}_0$. Si ψ désigne une correspondance par similitude de $(\Omega)_0$ sur (Ω) et qu'on désigne par $\mathscr{F}_1$ la famille des images par ψ des éléments de $\mathscr{F}_0$, on voit que $\mathscr{F}_1$ définit l'espace (Ω) et que (Ω) n'aurait aucun point appartenant à une infinité non dénombrable d'éléments de $\mathscr{F}_1$, contrairement à ce qu'on vient de prouver ($\mathscr{F}_1$ ayant pu être désigné par $\mathscr{F}$). On a donc $pM=\aleph_1$.

---

[5]) Cf. ce Volume, p.   en note [2]).

[6]) Voir *Georges Kurepa, Ensembles ordonnés et ramifiés* (Thèse, Paris 1935) p. 16 (aussi *Publ. Math. Univ. Belgrade,* IV, 1935, p. 16) où se trouve une démonstration d'une extension du théorème.

Remarquons encore que si $\mathcal{F}$ est constituée d'intervalles de (Ω), il y a un $\alpha_0 < \Omega$ tel que $\xi \varepsilon M$ si $\alpha \leqslant \xi < \Omega$, bien qu'on puisse supposer qu'aucun élément de $\mathcal{F}$ ne soit infini non dénombrable.

IV. Soit E un espace (V_ω) de M. Fréchet c'est-à-dire un espace (V) où l'on peut supposer que pour chaque point a la famille des voisinages de a est équivalente à une suite dénombrable d'ensembles $V_a^{(n)}$, $(n < \omega)$ telle que $\prod_n V_a^{(n)} = a$ et $V_a^{(n)} \supseteq V_a^{(n+1)}$. En désignant par $\mathcal{F}$ la famille des $V_a^{(n)}$, $(n < \omega, a \varepsilon E)$, si a, b sont deux points distincts de E, soit $\nu(a, b, \mathcal{F})$ le plus petit ordinal $n < \omega$ tel que a non ε $V_b^{(n)}$. L'existence de $\nu(a, b, \mathcal{F})$ étant évidente, posons $\nu(a, \mathcal{F}) =$ borne sup. $\nu(a, b, \mathcal{F})$, b parcourant $E - a$. On aura $0 \leqslant \nu(a, \mathcal{F}) \leqslant \omega$, quels que soient le point $a \varepsilon E$ et la famille $\mathcal{F}$ [7]) de voisinages définissant l'espace E.

Désignons par $E^n(\mathcal{F})$ l'ensemble des $a \varepsilon E$ tels que $\nu(a, \mathcal{F}) = n$, $(n \leqslant \omega)$.

Il est évident que l'espace (Ω) est une classe (V_ω) de même que l'est le continu linéaire C [8]). On démontre facilement ceci:

a. *Quelle que soit la famille* $\mathcal{F}$ [7]) *de voisinages définissant l'espace* (Ω), *on aura* $p(\Omega)^n(\mathcal{F}) < \chi_0$ *pour tout* $n < \omega$, *et* $p(\Omega)^\omega(\mathcal{F}) = \aleph_1$;

b. *Quelle que soit la famille* $\mathcal{F}$ [7]) *de voisinages définissant l'espace* C, *on aura* $p\, C^n(\mathcal{F}) \leqslant \aleph_0$, *pour tout* $n < \omega$ [9]), *et* $p\, C^\omega(\mathcal{F}) = 2^{\aleph_0}$.

Ainsi les espaces (Ω) et C diffèrent l'un de l'autre au point de vue de la structure des $(\Omega)^n(\mathcal{F})$ et $C^n(\mathcal{F})$; cela n'a rien d'étonnant, étant donné la distanciabilité de C alors que (Ω) n'est, comme nous venons de le voir, même pas une classe

---

7) Bien entendu, $\mathcal{F}$ est constituée des $V_a^{(n)}$, $(n < \omega)$, a parcourant l'espace considéré), ceux-ci étant tels que $V_a^{(n)} \supseteq V_a^{(n+1)}$ et $\prod_n V_a^{(n)} = a$, pour tout point a.

8) C'est-à-dire l'ensemble des nombres réels x tels que $0 \leq x \leq 1$.

9) L'égalité $p\, C^n(\mathcal{F}) = \aleph_0$ ayant lieu pour au moins un $n < \omega$ et au moins une $\mathcal{F}$.

$(\mathscr{E})$, ou que C est séparable tandis que (Ω) ne l'est pas. Vu le peu que nous savons sur les nombres $\aleph_1$ et $2^{\aleph_0}$, on ne sait même pas si les deux espaces ont une même puissance!

V. Il est bien intéressant de prouver ces deux théorèmes:

Théorème 1. *Tout ensemble ordonné continu*[10]) *E tel que l'espace ordonné E*[11]) *soit une classe $(\mathscr{E})$ est semblable au segment* $[0, 1]$ *des nombres réels x tels que* $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Théorème 2. *Tout espace ordonné*[11]) *connexe qui est une classe $(\mathscr{E})$ est homéomorphe à un ensemble linéaire et a, par conséquent*[12]), *l'un des quatre types ordinaux:* $\lambda, 1+\lambda, \lambda+1, 1+\lambda+1$, *$\lambda$ désignant le type d'ordre de l'ensemble des nombres réels*[13]).

Démontrons le théorème 1. L'ensemble ordonné E étant continu, l'espace ordonné E jouit de la propriété de Borel-Lebesgue; en particulier, n étant un ordinal quelconque $< \omega$, il y a un nombre fini, soit ν_n, de points, $a_1^n, a_2^n, \cdots, a_{n_\nu}^n$, tels que tout point de l'espace E soit intérieur à au moins un des ensembles $S\left(a_i^n, \frac{1}{n+1}\right)$, $(i = 1, 2, \cdots, \nu_n)$. Si l'on désigne alors par F l'ensemble des points a_i^n, $(i \leqslant \nu_n, n < \omega)$, F est dénombrable et partout dense sur E. Prouvons, en particulier, que F est partout dense sur E. Dans le cas contraire, il y aurait un point a de E et un ordinal $n < \omega$ tel que $S\left(a, \frac{1}{n+1}\right)$ ne contiendrait aucun point de F. Or, il y a un

---

10) Continu $\equiv$ connexe et avoir un premier point p et un dernier point $q \neq p$.

11) E étant un *ensemble ordonné, l'espace ordonné E* s'obtient en convenant que $a \varepsilon F'$, $(a \varepsilon E, F \subseteq E)$ veut dire que tout intervalle de E contenant a contient un point de F distinct de a. D'une manière générale, *un espace E* est dit *ordonné* s'il y a un *ensemble ordonné H* tel que *l'espace ordonné H* soit homéomorphe à E.

12) Dans ce travail, un espace composé d'un point ne sera pas considéré comme connexe.

13) Le théorème 2 est une généralisation du théorème qu'on obtient en remplaçant, dans l'énoncé du th. 2, le signe $\mathscr{E}$ par le signe $\mathscr{D}$, et qui a été établi par ailleurs (v. Thèse, *loc. cit.*, p. 53, th. 6).

$\mu \leqslant \nu_n$ tel que $a \varepsilon S\left(a_\mu{}^n, \frac{1}{n+1}\right)$; et donc $a_\mu{}^n$ appartiendrait à F et a $S\left(a, \frac{1}{n+1}\right)$, contrairement à la supposition.

Ainsi, E est un ensemble ordonné continu contenant un $h$ensemble dénombrable partout dense; à la suite d'un théorèm bien connu de G. Cantor, le type ordinal de E est $1+\lambda+1$.

La démonstration du théorème 2 est un peu plus longue.

Tout d'abord, désignons par H un ensemble ordonné tel que l'espace ordonné H soit homéomorphe à l'espace ordonné E vérifiant les conditions du théorème 2, à savoir d'être une classe $(\mathcal{E})$ connexe.

Si H a un premier et un dernier point, le théorèmé est une conséquence immédiate du théorème 1.

Supposons maintenant que H n'a pas un premier ni un dernier point.

Lemme. Il y a une suite de points de $H, h_1 < h_2 < \cdots < < h_n < \cdots, (n < \omega)$, telle que, quel que soit le point h de H, il y ait un $h_n > h$.

En effet, désignons par h^0 un point quelconque de H; α étant un certain ordinal $< \Omega$, supposons qu'on a défini la suite croissante $h^\xi, (\xi < \alpha)$. Si H n'a aucun point succédant à chacun des points $h^\xi, (\xi < \alpha)$, il est manifeste que α est de seconde espèce; si alors $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \cdots$, $(n < \omega)$, est une suite d'ordinaux $< \alpha$ convergeant vers α, il suffit de poser $e^{\alpha_n} = h_n$, $(n < \omega)$, pour se rendre compte de la validité du lemme.

Si H a un point succédant à chacun des $h^\xi, (\xi < \omega)$, on désignera par h^α, soit la borne supérieure des $h^\xi, (\xi < \alpha)$, soit un point quelconque de H succédant à celle-ci, suivant que α est de seconde ou de première espèce. H étant continu, l'existence de h^α est assurée.

Ainsi, si pour tout $\alpha < \Omega$, H contenait un point succédant à chacun des $h^\xi, (\xi < \alpha)$, on aurait une suite, S, de type ordinal Ω de points de $H, h^\xi, (\xi < \Omega)$, vérifiant, de plus, la condition que, quel que soit l'ordinal α de soconde espèce $< \Omega$, $h^\alpha =$ born. sup. $h^\xi, (\xi < \alpha)$. Par conséquent, l'espace ordonné S serait un sous-espace de l'espace ordonné H et serait, comme celui-ci, une classe $(\mathcal{E})$; autrement dit, l'espace S étant homéomorphe à l'espace (Ω), l'espace (Ω) serait une classe $(\mathcal{E})$ ce qui n'est pas vrai.

Il y a donc un $\alpha < \Omega$ tel que H ne contienne aucun point dépassant tout h^{ξ}, $(\xi < \alpha)$, et dès lors il y a une suite h_n, $(n < \omega)$, vérifiant le lemme.

Ceci étant, soit s un point quelconque n'appartenant ni à H ni à E; adjoignons-le à H en définissant, h étant un point quelconque de H, l'écart de h et de s égal à $\frac{1}{n+1}$, n étant le plus petit ordinal ν tel que $h \leqslant h_\nu$; et l'écart de deux points quelconques de H restant invariant. En désignant par A l'ensemble ordonné qu'on obtient en faisant succéder le point s à tout point de H, l'ensemble ordonné A est connexe, a un dernier point, s, et est tel que l'espace ordonné A soit une classe $(\mathcal{E})$; de plus, l'espace ordonné H est un sous-espace de l'espace ordonné A.

D'une manière analogue, on démontre l'existence d'un ensemble ordonné $B \supset A$ tel que $B - A$ soit composé d'un seul point précédant tout point de B; l'espace ordonné B contient l'espace B et, à plus forte raison, l'espace ordonné H, comme de sous-espaces. Or l'espace B est une classe $(\mathcal{E})$; et puisque l'ensemble ordonné B est continu, il est semblable au segment $[0,1]$ des nombres réels; il s'en suit que l'espace B est homéomorphe à $[0,1]$. Dès lors, les espaces A, H et, enfin, l'espace donné E sont homéomorphes, chacun, à un sous-ensemble du segment $[0,1]$ des nombres réels. *c. q. f. d.*

Ce qui précède nous donne le

Théorème principal. *E étant un espace ordonné*[11]) *connexe qui est une classe $(\mathcal{E})$ de M. Fréchet, il y a: une relation d'ordre, $<$, ordonnant E de la façon que l'espace ordonné qu'on en déduit soit homéomorphe à l'espace donné E, et une définition d'écart, (a, b), entre des couples de points de E, définissant l'espace E et vérifiant, d'abord, la relation triangulaire, à savoir $(a, b) \leqslant \leqslant (a, c) + (b, c)$, quels que soient les points a, b, c de E, puis la relation de monotonie, à savoir $(a, b) < (a, c)$, quels que soient les points a, b, c de E tels que $a < b < c$.*

Remarque. Voici un théorème dû à M. Niemytzki se rapportant à ce qui précède, et que je ne connaissais pas à l'époque où la Note précédente fut rédigée :

Tout espace ($\mathfrak{S}$) *compact est distanciable* (voir V. W. Niemytzki, *Über die Axiome des metrischen Raumes*, Math. Annalen, 104, 1931, pp. 666—671, en particulier, *Satz II*).

Or, l'espace (Ω) n'étant pas distanciable (puisqu'il est compact et non séparable), le théorème de M. Niemytzki entraîne que (Ω) n'est pas un espace ($\mathfrak{S}$) non plus; d'autre part, tout espace ordonné continu étant compact (et même bicompact), le théorème 1 du texte résulte du théorème de M. Niemytzki.