Sur la généralisation de l'intégrale de Stieltjes donnée par Liapounoff

Par

W. JARDETZKY

1. La notion d'intégration d'une fonction $f(x)$ par rapport à une autre fonction $\alpha(x)$, dite la fonction déterminante, a été donnée par Stieltjes[1]) dans le cas où $f(x)$ est une fonction continue dans un intervalle (a, b) et $\alpha(x)$ est une fonction croissante dans le même intervalle. L'intégrale de Stieltjes

$$\int_a^b f(x)\, d\alpha \,, \tag{1}$$

étant la limite de la somme

$$S = \sum f(\xi_i)\,[\,\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})\,] \,, \tag{2}$$

lorsque max $(x_i - x_{i-1}) \to 0$ et ξ_i est dans l'intervalle (x_{i-1}, x_i) $x_0 = a$, $x_n = b$, cette définition a subi des généralisations[2]). La prémière de celles ci a été donnée par Liapounoff dans son mémoire „Sur l'équation de Clairaut et les équations plus géné-

---

[1]) *Stieltjes.* Recherches sur les fractions continues. Annales de Toulouse 1894 p. 72.

[2]) Voir p. e. *E. W. Hobson.* The theory of functions of a real variable. Vol. I, 1927.

rales de la théorie de la figure des planètes"[3]. Mais elle a resté inapperçue si longtemps (dès 1904), peut être, grâce au titre de ce mémoire, où cette nouvelle notion de l'intégrale est introduite à propos d'un problème de la Mécanique céleste. Liapounoff considère le cas où la fonction à intégrer $f(x)$ peut avoir aussi des discontinuités, et, d'après la seconde de définitions données par lui, la notion d'intégrale de Stieltjes aura le sens même dans le cas où $f(x)$ et $\alpha(x)$ ont des discontinuités communes.

Dans ce paragraphe nous rappelons brièvement la marche des idées de Liapounoff. Elle commence par la définition du „symbole"

$$\underset{a}{\overset{b}{S}} f(x)\, \Delta\alpha(x)\text{[4]}, \tag{3}$$

la limite de la somme (2), qui vérifie, en outre, l'égalité

$$\underset{a}{\overset{b}{S}} f(x)\, \Delta\alpha(x) = f(b)\,\alpha(b) - f(a)\,\alpha(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} \alpha(x)\, df. \tag{4}$$

Dans l'intégrale $\int_{f(a)}^{f(b)}$ on entend par f une variable pouvant prendre toutes les valeurs entre les nombres $f(a)$ et $f(b)$ et cette égalité représente une extension de la formule d'intégration par parties. Liapounoff démontre l'égalité (4) en partant des suppositions: 1) „$f(x)$ est une fonction limitée dans l'intervalle (a, b) et ne variant, quand x croit de a à b, que dans un sens" et 2) „en entendant par $\alpha(x)$ une fonction quelconque continue dans cet intervalle". Après l'analyse des propriétés du symbole (3) analogues à celles de l'intégrale de Riemann, Liapounoff étudie le cas, où $\alpha(x)$ a des discontinuités aux points γ_i dans l'intervalle (a, b). En supposant: 1) que $f(x)$ est une

[3]) *A. Liapounoff.* Mém. de l'Acad. d. Sciences. St.-Pét. Classe phys. math. VIII série, Vol. XV № 10. 1904. Ce mémoire n'est pas même noté dans les Fortschritte der Mathematik et bien des résultats de Liapounoff ont été retrouvés par d'autres.

[4]) Nous avons changé les notations: f et φ de Liapounoff sont désignés par α et f.

fonction monotone et finie, $f(x-0)$ et $f(x+0)$, en outre, n'etant pas nuls dans (a, b), 2) que les limites $\alpha(\gamma_i - 0)$ et $\alpha(\gamma_i + 0)$ existent pour tous les points γ_i et 3) que le nombre des discontinuités est fini, il pose

$$\underset{a}{\overset{b}{S}} f(x)\,\Delta\,\alpha(x) = \underset{a}{\overset{\gamma_1}{S}} + \underset{\gamma_1}{\overset{\gamma_2}{S}} + \cdots \underset{\gamma_n}{\overset{b}{S}}. \tag{5}$$

Il suppose, en outre, que chacune des valeurs limites $f(\gamma_i - 0)$, $f(\gamma_i + 0)$, existe $(i = 1, 2, \cdots n\,;\, a < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots < \gamma_n < b)$ et que

$$\underset{\xi}{\overset{\eta}{S}} \to \underset{\xi_0}{\overset{\eta}{S}}\,,\quad \underset{\xi}{\overset{\eta}{S}} \to \underset{\xi}{\overset{\eta_0}{S}}\,,\quad \underset{\xi}{\overset{\eta}{S}} \to \underset{\xi_0}{\overset{\eta_0}{S}}\,,$$

sous la condition nécessaire et suffisante que chacune des valeurs limites $\alpha(\xi_0 + 0)$ et $\alpha(\eta_0 - 0)$ existe.

Remarquons que, d'après les conditions enoncées, le cas où les fonctions $f(x)$ et $\alpha(x)$ ont les mêmes points de discontinuité n'est pas exclue.

Ensuite, Liapounoff donne une autre définition du symbole (3). Soit $\alpha^*(x)$ une fonction continue, définie de la manière suivante :

$$\begin{array}{ll} \text{pour } a \leqq x < \gamma_1 & \alpha^*(x) = \alpha(x) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \gamma_k < x < \gamma_{k+1} & \alpha^*(x) = \alpha(x) + \sum_{i=1}^{k} [\,\alpha(\gamma_i - 0) - \alpha(\gamma_i + 0)\,] \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \gamma_n < x \leqq b & \alpha^*(x) = \alpha(x) + \sum_{i=1}^{n} [\,\alpha(\gamma_i - 0) - \alpha(\gamma_i + 0)\,] \end{array} \tag{6}$$

Le symbole

$$\underset{a}{\overset{b}{S}} f(x)\,\Delta\alpha^*$$

aura le sens conforme à la première définition et on pose

$$\underset{a}{\overset{b}{S}} f(x)\,\Delta\,\alpha = \underset{a}{\overset{b}{S}} f(x)\,\Delta\,\alpha^*\,. \tag{7}$$

Cette égalité peut servir de base à une nouvelle généralisation qui a lieu aussi dans le cas d'une fonction $\alpha(x)$ devenant discontinue dans l'intervalle (a, b) une infinité de fois. Liapounoff entend par le symbole $\overset{b}{\underset{a}{S}} f \Delta \alpha$ le symbole $\overset{b}{\underset{a}{S}} f \Delta \alpha^*$, si l'on peut trouver la fonction continue $\alpha^*(x)$ telle que la différence $\alpha - \alpha^*$ se réduit à une constante dans tout intervalle partiel où $\alpha(x)$ est continue. Ensuite, il donne les conditions nécessaires de l'existence de la fonction α^* sous la forme suivante (l. c. p. 17): „Tout d'abord il est évident que, pour que la fonction α^* existe, il faut que, dans tout intervalle (a_1, b_1) dans lequel la fonction $\alpha(x)$ devient discontinue seulement pour les valeurs extrêmes, $x = a_1$ et $x = b_1$, cette fonction tend vers des limites déterminées, quand x tend vers a_1 ou vers b_1. D'autre part, pour que la fonction $\alpha^*(x)$ soit déterminée dans l'intervalle (a, b) à une constante additive près, cet intervalle ne doit contenir aucun intervalle, si petit qu'il soit, où l'on ne puisse indiquer des intervalles partiels, dans lesquels la fonction $\alpha(x)$ fût continue".

En remarquant que ces conditions ne sont pas suffisantes et que, d'autre part, dans certains cas déterminés on pourrait signaler des conditions nécessaires et suffisantes de cette espèce, Liapounoff ne s'y arrête pas.

En signalant encore l'égalité

$$\int_a^b f(x)\, \alpha'(x)\, dx = \overset{b}{\underset{a}{S}} f(x)\, \Delta \alpha$$ [5]

où α est continue et α' est intégrable en devenant infini entre les limites de l'intégrale une infinité de fois, nous renvoyons le lecteur au mémoire cité de Liapounoff où l'on trouvera des idées sur nouvelles généralisations de la notion de l'intégrale ainsi que l'étude d'une équation intégrale avec l'intégrale de Stieltjes.

2. Arrétons nous maintenant sur une signification géométrique de l'intégrale de Stieltjes qui s'impose elle-même. Dans le cas de cette intégrale nous avons trois variables: $x, y = f(x)$ et $z = \alpha(x)$. Supposons que ces variables sont les coordonnées rectangulaires d'un point M qui décrit une courbe L, lorsque x

---

[5]) Comp. le théorème de Whittaker (Hobson l. c. p. 555).

varie de a à b. Nous aurons alors les trois projections (L_1, L_2, L_3) de cette courbe sur les plans Oxy, Oxz, Oyz et les deux surfaces cylindriques $F_1, y = f(x)$, et $F_2, z = \alpha(x)$.

Alors l'intégrale $\int_b^a f(x)\, d\alpha$ est la projection de la surface F_2 sur le plan Oyz et l'intégrale $\int_a^b \alpha(x)\, df$ est la projection de F_1 sur le même plan. Donc, si L_3 est continue, le sens de la formule (4) est bien connu.

D'après les définitions connues de l'intégrale RS ou de l'intégrale RS généralisée les fonctions f et α peuvent avoir des discontinuités, c'est-à-dire les courbes L, L_i peuvent être discontinues. On voit aisément que, si x varie dans l'intervalle (a, b) et si $f(x)$ et $\alpha(x)$ n'ont que des discontinuités de première espèce, les courbes L_1 et L_2 se composent des parties dont les extremités consecutives se projettent toujours sur le même point de l'axe Ox. Mais, s'il a un point commun de discontinuité des fonctions $f(x)$ et $\alpha(x)$, les projections de la lourbe L_3 sur les axes Oy et Oz serout des segments séparés cvoir fig. 1 et 2).

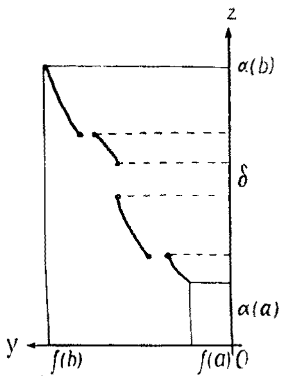

Fig. 1

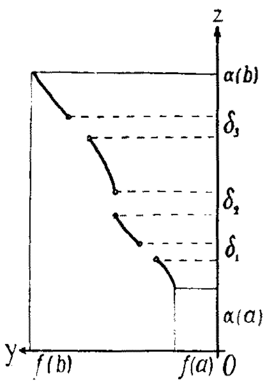

Fig. 2

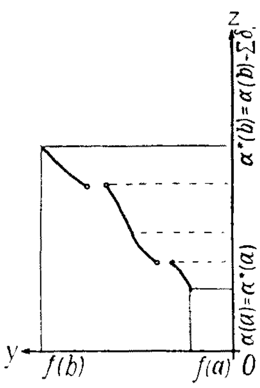

Fig. 3

D'après les conditions (6) on a

$$\alpha^* = \alpha - \chi(x), \tag{8}$$

où la fonction des sauts $\chi(x)$ est définie par l'égalité

$$\chi(x) = \sum_x [\alpha(\gamma_i + 0) - \alpha(\gamma_i - 0)] = \sum_x \delta_i, \tag{9}$$

la sommation étant étendue à tous les points γ_i dans l'intervalle fermé (a, x).

Ainsi, en adoptant la définition (7) de Liapounoff, on rejette la fonction des sauts de la fonction déterminante. On obtient alors la figure 3 qui remplace la figure 2 et correspond au cas d'une fonction déterminante continue.

Cette figure est d'accord avec la formule (4). On a

$$\int_a^b f(x)\,d\alpha = \int_a^b f(x)\,d\alpha^* = f(b)\,\alpha^*(b) - f(a)\,\alpha^*(a) - \int_a^b \alpha^*\,df\,,$$

où

$$\alpha^*(a) = \alpha(a)\,.$$

On voit aisément que, d'après la seconde définition de Liapounoff, $\int_a^b f(x)\,d\alpha^*$ est égale à la somme des projections des parties séparées de F_2 sur le plan Oyz.

3. Revenons maintenant aux conditions de l'existence de l'intégrale (3). On a vu (au numéro 1) que Liapounoff n'a envisagé que des fonctions à intégrer monotones. Mais, une fonction à variation bornée étant la différence de deux fonctions monotones, son raisonnement s'applique immédiatement à cette classe des fonctions. Quant à la fonction déterminante $\alpha(x)$ la définition de Liapounoff impose moins des restrictions. En effet, on a envisagé une fonction $\alpha(x)$ qui peut devenir discontinue dans l'intervalle (a, b) une infinité de fois. Alors, la condition de l'existence de la fonction α^* se ramène à celle de l'égalité (8). Les discontinuités étant dans ce cas de première espèce, leur ensemble sera denombrable.

On a donc immédiatement une condition suffisante de l'existence de l'intégrale (7), à savoir: $\alpha(x)$ est une fonction à variation bornée. Pour cette fonction l'égalité (8) est toujours verifiée, c'est-à-dire on peut trouver la fonction continue α^*. Mais cette condition n'est plus nécessaire. En effet, soit p. e. $\alpha^*(x)$ une fonction continue définie de la manière suivante.[6])

[6]) *C. Carathéodory.* Vorlesungen über reelle Funktionen. S. 190. Berlin 1927.

Posons

$$h = b - a \quad , \quad x_k = a + \frac{h}{2^k} \qquad (k = 1, 2 \cdots \infty)$$

et

$$\alpha^*(x) = 0 \qquad \text{pour} \qquad x \leqq a \qquad \text{et} \qquad x \geqq b\,,$$

$$\alpha^*(x_1) = \frac{h}{2}\,,\ \alpha^*(x_2) = 0\,,\ \alpha^*(x_3) = \frac{h}{3}\,,\ \alpha^*(x_4) = 0\,,\ \alpha^*(x_5) = \frac{h}{4}\,, \cdots$$

$\alpha^*(x)$ est linéaire dans chaque intervalle $(b, x_1), (x_1, x_2), \cdots$

La variation totale de la fonction α^* est infinie.

Soit

(10) $$\alpha(x) = \alpha^*(x) + \chi(x)\,,$$

où $\chi(x)$ est défini par les conditions suivantes:

$$\chi(x) = \frac{A}{2^{2n}} \qquad \text{dans} \quad (x_{2n+2}\,,\ x_{2n})\,,$$

A étant une constante, $x_0 = b$. La fonction des sauts existe. On a $\gamma_i = x_{2i}$ et

$$\alpha(\gamma_i + 0) - \alpha(\gamma_i - 0) = \frac{3A}{2^{2i}}\,.$$

Si $f(x)$ est une fonction à variation bornée, l'intégrale

(11) $$\int_a^b f(x)\, d\alpha^*$$

existe et, d'après Liapounoff, c'est l'intégrale $\int_a^b f(x)\, d\alpha$ où α est donnée par l'équation (10); les fonctions $\alpha(x)$ et $f(x)$ peuvent avoir des discontinuités communes, $\alpha(x)$ étant, en outre, à variation totale égale à $+\infty$[7]. La courbe L sera discontinue, ainsi que ses projections L_1, L_2, L_3. Mais, lorsqu'on veut calculer l'intégrale (11), les parties de L subissent des déplace-

[7]) On sait que l'intégrale RS n'existe pas même pour certaines fonctions continues $f(x)$, si $\alpha(x)$ n'est pas à variation bornée (*H. Lebesgue*. Leçons sur l'intégration. p. 318. Paris 1928).

ments parallèles à l'axe Oz jusqu'au moment où la courbe L_2 devient continue,

Ainsi, si la fonction déterminante bornée $\alpha(x)$ a des discontinuités de première espèce et si, de plus, la fonction des sauts est donnée par une série (9) convergente pour toutes les valeurs de x dans l'intérvalle fermé (a, b), en la retranchant de la fonction $\alpha(x)$ nous aurons une fonction continue $\alpha^*(x)$. C'est la condition suffisante de l'existence de cette fonction et de l'intégrale (7) pour une fonction $f(x)$ à variation bornée. Elle est d'ailleurs nécessaire pour la seconde définition de l'intégrale de Stieltjes généralisée donnée par Liapounoff.