Über Systeme von nichtlinearen Integralgleichungen

Von

MICHAEL GOLOMB

Es ist bekannt, dass ein System von linearen Integralgleichungen äquivalent ist einer einzigen linearen Integralgleichung, die man mit Hilfe der Methode des „Aneinanderfügens der Kerne" erhält. In einer früheren Arbeit [1]) wies ich darauf hin, dass diese Methode bei dem System von nichtlinearen Integralgleichungen

$$(1) \qquad \psi_i(s)+\int_0^1 K_i(s,t)f_i\big(t,\psi_1(t),\psi_2(t),\cdots,\psi_n(t)\big)dt=g_i(s) \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

versagen muss, so dass es auf diesem Wege nicht möglich ist, die für die einzelne Integralgleichung

$$(2) \qquad \psi(s)+\int_0^1 K(s,t)\,f\big(t,\psi(t)\big)\,dt=g(s)$$

gültigen Existenz- und Eindeutigkeitssätze [2]) auf Systeme

---

1) Zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen, Integralgleichungssysteme und allgemeinen Funktionalgleichungen. Mathematische Zeitschrift *39* (1934), S. 45—75, s. Fussnote auf S. 48.

2) *A. Hammerstein*, Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen, Acta mathematica *54* (1930), S. 117 u. f.; *M. Golomb*, l. c. ([1]), S. 75; *G. S. Dragoni*, Un teorema sulle equazioni integrali non lineari. Bolletino della Unione matematica Italiana *15* (1936), S. 1—5.

von der Form (1) zu übertragen. Sieht man jedoch von der speziellen Form der Gleichung (2) ab, und betrachtet sie als eine Funktionalgleichung im Raum der Funktionen $\psi(s)$, so ergibt sich sofort ein Übertragungsprinzip: Das System (1) ist als eine einzige Funktionalgleichung von ähnlichen Eigenschaften wie die Gleichung (2) im Raum der Funktionen- n-tupel

$$(\psi_1(s), \psi_2(s), \cdots, \psi_n(s))$$

zu interpretieren [3]. Ein zweites solches Prinzip ergibt sich, wenn man statt der Gleichung (2) das äquivalente unendliche Gleichungssystem, dem die *Fourier*koeffizienten der Funktion $\psi(s)$ genügen, zugrunde legt, denn auch das System (1) führt auf ein solches unendliches Gleichungssystem.

Die Existenz- und Eindeutigkeitssätze, die wir, geleitet von diesen Prinzipien, ableiten, stellen die natürliche Verallgemeinerung entsprechender Sätze für die Gleichung (2) dar. Der erste Satz gilt für solche Systeme

$$(3) \qquad \psi_i(s) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 K_{ij}(s,t) f_j(t, \psi_1(t), \psi_2(t), \cdots, \psi_n(t)) dt = 0$$
$$(i = 1, 2, \cdots n),$$

in denen die aus den Kernen $K_{ij}(s,t)$ gebildete Kernmatrix symmetrisch und semidefinit ist und die Funktionen $f_i(s, u_1, u_2, \cdots, u_n)$ die Ableitungen einer Funktion $F(s, u_1, u_2, \cdots u_n)$ nach den Variablen $u_1, u_2, \cdots, u_n$ sind. Dieser Satz wird ebenso wie der entsprechende Satz für die Gleichung (2) [4] durch spezielle Interpretation eines Satzes über gewisse allgemeine Funktionalgleichungen bewiesen.

Der zweite Satz setzt von den Kernen nur Stetigkeitseigenschaften voraus und liefert im Wesentlichen das gleiche Resultat wie ein schon früher mit anderen Methoden bewiesener

[3] Dieses Prinzip verwendet *G. S. Dragoni* in seiner Arbeit: Sui sistemi di equazioni integrali non lineari. Rendiconti del Seminario Matematico di Padova *7* (1936), S. 1—35.

[4] l. c. ([1]), S. 75.

Satz [5]). Er wird durch spezielle Interpretation eines Satzes von *Caccioppoli* über total umkehrbare Funktionaltransformationen verifiziert [6]).

Der dritte Satz umfasst in gewissem Sinne die beiden ersten Sätze. Sein Beweis stützt sich auf einen Satz über die Lösungen von unendlichen nichtlinearen Gleichungssystemen.

§ 1.

In diesem Paragraphen sei vorausgezetzt, dass die Kerne $K_{ij}(s, t)$ im Quadrat $0 \leqslant s, t \leqslant 1$ definiert und stetig, die Funktionen $f_i(s, u_1, u_2, \cdots u_n)$ im Intervall $0 \leqslant s \leqslant 1$ und für alle Werte der Veränderlichen $u_1, u_2, \cdots, u_n$ definiert, in s stetig und in $u_1, u_2, \cdots, u_n$ stetig differenzierbar sind [7]).

Es sei

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(s, u_1, u_2, \cdots, u_n) = f_{ij}(s, u_1, u_2, \cdots, u_n \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

gesetzt.

Satz 1. *Es sei*

$$\text{(a)} \qquad K_{ij}(s, t) = K_{ji}(t, s) \qquad \begin{pmatrix} 0 \leqslant s, t \leqslant 1 \\ i, j = 1, 2, \cdots, n \end{pmatrix}$$

und für alle n-tupel $(\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots, \varphi_n(s))$ *von stetigen Funktionen des Intervalles* $0 \leqslant s \leqslant 1$

---

5) l. c. (1), Satz 1, S. 48.

6) Einen ähnlichen Satz beweist *Dragoni* (l. c. (3), S. 30) auch mit Hilfe des gleichen *Caccioppoli*schen Satzes, setzt aber dabei voraus, dass die Kerne symmetrisch und semidefinit sind. Wir verwenden den *Caccioppoli*schen Satz in anderer Weise und erzielen dabei das allgemeinere Resultat.

7) Von allen vorkommenden Zahlen und Funktionen wird vorausgesetzt, dass sie reell sind. Unter „Lösungen" werden nur reelle Lösungen verstanden, die die Stetigkeitseigenschaften der Lösungen der entsprechenden linearen Probleme besitzen. — Dort, wo die Eigenfunktionen der vorkommenden Kerne Verwendung finden, werden die Entwicklungen so geschrieben, als ob es sich um „nichtentartete" Kerne handelte. Das braucht jedoch nicht vorausgesetzt zu werden.

$$\sum_{i,j=1}^{n} \int_0^1 \int_0^1 K_{ij}(s,t)\,\varphi_i(s)\,\varphi_j(t)\,ds\,dt \geqq 0\,.$$

Die Funktionen $f_i(s, u_1, u_2, \cdots, u_n)$ *seien die Ableitungen einer nach den Variablen* $u_1, u_2, \cdots, u_n$ *stetig differenzierbaren Funktion* $F(s, u_1, u_2, \cdots, u_n)$

$$f_i(s, u_1, u_2, \cdots, u_n) = \frac{\partial}{\partial u_i} F(s, u_1, u_2, \cdots, u_n) \quad (i=1,2,\cdots,n).$$

Dann hat das Gleichungssystem

$$\psi_i(s) + \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 K_{ij}(s,t) f_j(t, \psi_1(t), \psi_2(t), \cdots, \psi_n(t))\,dt = 0 \tag{3}$$

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

(b′) *wenigstens eine Lösung, wenn für* $0 \leqq s \leqq 1$ *und alle Werte der* $u_1, u_2, \cdots, u_n$

$$F(s, u_1, u_2, \cdots, u_n) \geqq -\frac{k}{2}(u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2) - C$$

(b″) *ist* [8], *genau eine Lösung, wenn für* $0 \leqq s \leqq 1$ *und alle Werte der* $u_1, u_2, \cdots, u_n$ *der kleinste Eigenwert der Matrix* $((f_{ij}(s, u_1, u_2, \cdots, u_n)))$ *nicht kleiner als* $-k$ *ist.*

Dabei sind k *und* C *positive Zahlen, und* k *ist kleiner als der kleinste Eigenwert der Kernmatrix.*

Beweis. Der Beweis stützt sich auf einen Satz über allgemeine Funktionalgleichungen, der folgendermassen lautet [9]: Σ sei ein abstrakter linearer Raum mit den Punkten $\varphi, \psi, \cdots$, in dem ein zu dem in der Vektorrechnung analoges inneres

---

[8]) Diese Voraussetzung genügt nicht, um die Eindeutigkeit der Lösungen zu beweisen. S. l. c. (1), Bemerkung auf S. 56.

[9]) l. c. (1), Satz 9 mit Zusatz, S. 70—71. Dort findet man auch Näheres über die hier verwandten Begriffsbildungen.

Produkt $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$ und damit eine Entfernung $\| \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)} \| = \sqrt{(\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}, \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)})}$ definiert ist. Σ sei in dieser Metrik vollständig. Durch

$$(4) \qquad \psi = H\varphi$$

sei eine lineare Abbildung des Raumes Σ auf einen Teil von sich selbst gegeben, die „vollstetig" ist, dh. jede beschränkte Teilmenge von Σ in eine kompakte Menge überführt. H sei überdies „selbstadjungiert", d. h. es sei

$$(5) \qquad (H\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}) = (\varphi^{(1)}, H\varphi^{(2)})$$

für irgend zwei Elemente $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}$ aus Σ. $H^2\varphi$ bezeichne die iterierte Abbildung $H(H\varphi)$, h die bei diesen Voraussetzungen sicherlich existierende positive Zahl, für die

$$(6) \qquad \| H\varphi \|^2 \leqq \frac{1}{h} \| \varphi \|^2$$

allgemein in Σ gilt.

Durch $G(\varphi)$ sei auf Σ eine Zahlenfunktion definiert und durch die für je zwei Punkte $\varphi^{(0)}, \varphi$ aus Σ gültige Relation

$$7) \qquad G(\varphi^{(0)} + \varphi) - G(\varphi^{(0)}) = (\Gamma\varphi^{(0)}, \varphi) + \| \varphi \| \cdot R(\varphi^{(0)}, \varphi),$$

$\left(R(\varphi^{(0)}, \varphi)\right.$ Zahlenfunktion, für die $\lim\limits_{\varphi \to 0} R(\varphi^{(0)}, \varphi) = 0$ gilt$\left.\right)$ eine stetige Abbildung

$$\psi = \Gamma\varphi .$$

Dann hat die Gleichung

$$(8) \qquad \psi + H^2\Gamma\psi = 0$$

in Σ eine Lösung, wenn für alle Punkte φ aus Σ

$$(9) \qquad G(\varphi) \geqq -\frac{k}{2}(\varphi, \varphi) - C$$

ist. Dabei sind k und C positive Konstanten und es ist $k < h$.

Ist überdies die „*Lipschitz*bedingung"

$$(10) \qquad (\Gamma\varphi^{(2)} - \Gamma\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}) \geqq -k(\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)}, \varphi^{(2)} - \varphi^{(1)})$$

für irgend zwei Punkte $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}$ aus Σ erfüllt, so hat die Gleichung (8) nicht mehr als eine Lösung.

Wir interpretieren Σ als den Raum der n-tupel von quadratisch integrierbaren Funktionen des Intervalls (0,1)

$$\varphi = (\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots, \varphi_n(s))$$

und das innere Produkt $(\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)})$ als

$$(11) \qquad (\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \varphi_i^{(1)}(s)\, \varphi_i^{(2)}(s)\, ds\,.$$

Die Abbildung $\psi = H^2\varphi$ sei erklärt durch

$$(12) \qquad \psi_i(s) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 K_{ij}(s, t)\, \varphi_j(t)\, dt$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n)\,.$$

Um die Abbildung H, deren Iterierte H^2 ist, zu definieren, braucht man das vollständige System der n-tupel von Eigenfunktionen der Kernmatrix $((K_{ij}(s, t)))$, d. h. der Lösungen des linearen Eigenwertproblems

$$(13) \qquad \lambda\varphi_i(s) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 K_{ij}(s, t)\, \varphi_j(t)\, dt \quad (i = 1, 2, \cdots, n)\,.$$

Dieses Problem kann, wie sofort ersichtlich ist, durch die Methode des „Aneinanderfügens der Kerne“ gelöst werden. Man erklärt hinzu die Funktionen $\varphi(s)$ und $K(s, t)$ für $0 \leqslant s < n$ bzw. $0 \leqslant s, t < n$ durch die Vorschriften

$$\varphi(s) = \varphi_i(s - i + 1) \qquad \text{für } i-1 \leqslant s < i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$K(s, t) = K_{ij}(s - i + 1, t - j + 1) \text{ für } \begin{matrix} i-1 \leqslant s < i \\ j-1 \leqslant t < j \end{matrix} \; (i, j = 1, 2, \cdots, n)\,.$$

Dann reduziert sich das System (12) auf die einzige Gleichung

$$(14) \qquad \lambda\varphi(s) = \int_0^n K(s, t)\, \varphi(t)\, dt\,.$$

Wegen der Voraussetzung (a) ist der Kern $K(s, t)$ symmetrisch und positiv semidefinit. Mit Benutzung wohlbekannter Sätze schliesst man so leicht, dass es eine nichtleere, höchstens abzählbare Menge von positiven Eigenwerten $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$ und zugehörigen, gemäss der Definition des inneren Produktes (11) normierten und orthogonalen n-tupeln von stetigen Eigenfunktionen $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \cdots$ der Kernmatrix $((K_{ij}(s, t)))$ gibt.

Man definiere nun die Abbildung $\psi = H\varphi$ durch

$$\psi_i(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^{(\nu)}(s)}{+\sqrt{\lambda_\nu}} (\varphi, \varphi^{(\nu)}) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n). \tag{15}$$

Diese hat die von H im zitierten Satz geforderten Eigenschaften: sie ist linear, selbstadjungiert und vollstetig. Das Letztere folgt daraus, dass eine beschränkte Menge von Punkten φ in eine Menge von n-tupeln gleichgradig stetiger Funktionen $\psi_i(s)$ transformiert wird; denn es ist nach (15) unter Benutzung der *Schwarz*schen und der *Bessel*schen Ungleichung

$$|\psi_i(s_2) - \psi_i(s_1)| \leqslant \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\varphi_i^{(\nu)}(s_2) - \varphi_i^{(\nu)}(s_1))^2}{\lambda_\nu} \sum_{\nu=1}^{\infty} (\varphi, \varphi^{(\nu)})^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{16}$$

Nach dem *Mercer*schen Satze ist an den Stetigkeitsstellen von $K(s, t)$

$$K(s, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi^{(\nu)}(s)\, \varphi^{(\nu)}(t)}{\lambda_\nu},$$

somit

$$K_{ij}(s, t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_i^{(\nu)}(s)\, \varphi_j^{(\nu)}(t)}{\lambda_\nu}$$

und

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\varphi_i^{(\nu)}(s_2) - \varphi_i^{(\nu)}(s_1))^2}{\lambda_\nu} = K_{ii}(s_2, s_2) - 2K_{ii}(s_1, s_2) + K_{ii}(s_1, s_1).$$

Diese Beziehung zusammen mit der Ungleichung (16) bestätigt die Behauptung von der gleichgradigen Stetigkeit der Funktionen $\psi_i(s)$.

Ferner ergibt die Iteration der Abbildung (15) die Abbildung

$$\psi_i(s)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varphi_i^{(\nu)}(s)}{\lambda_\nu}(\varphi,\varphi^{(\nu)})=\sum_{j=1}^{n}\int_0^1 K_{ij}(s,t)\,\varphi_j(t)\,dt \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

diese Iteration stimmt also mit der in (12) definierten Abbildung $\psi = H^2\varphi$ überein.

Es ist gemäss den getroffenen Definitionen für irgend einen Punkt φ aus Σ

$$\| H\varphi \|^2=(H^2\varphi,\varphi)\leqslant\frac{1}{\lambda_1}\|\varphi\|^2$$

und λ_1 ist der bestmögliche Wert in dieser Abschätzung. Für die durch die Ungleichung (6) geforderte Konstante h kann also der Wert λ_1 gewählt werden.

Das Funktional $G(\varphi)$ sei gegeben durch

$$\int_0^1 F(t,\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t))\,dt.$$

Es ist für je zwei Punkte $\varphi^{(1)},\varphi^{(2)}$ aus Σ

$$G(\varphi^{(2)})-G(\varphi^{(1)})=\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 f_i(t,\varphi_1^{(1)}(t),\varphi_2^{(1)}(t),\cdots,\varphi_n^{(1)}(t))(\varphi_i^{(2)}(t)-\varphi_i^{(1)}(t))dt$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_0^1 f_{ij}(t,\bar{\varphi}_1(t),\bar{\varphi}_2(t),\cdots,\bar{\varphi}_n(t))(\varphi_i^{(2)}(t)-\varphi_i^{(1)}(t))(\varphi_j^{(2)}(t)-\varphi_j^{(1)}(t))dt,$$

($\bar{\varphi}_i(t)$ bedeutet einen Wert zwischen $\varphi_i^{(1)}(t)$ und $\varphi_i^{(2)}(t)$). Aus dieser Darstellung ersieht man, dass die Relation (7) erfüllt ist, wenn die Abbildung $\psi=\Gamma\varphi$ interpretiert wird als

$$\psi_i(s)=f_i(s,\varphi_1(s),\varphi_2(s),\cdots,\varphi_n(s)).$$

Die Bedingung (9) lautet

$$(17)\quad \int_0^1 F(t,\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t))\,dt\geqq-\frac{k}{2}\int_0^1(\varphi_1^2(t)+\varphi_2^2(t)+\cdots+\varphi_n^2(t))dt-C$$

und ist im Falle der Voraussetzung (b′) erfüllt. Somit erweisen sich alle Voraussetzungen des zitierten Existenzsatzes erfüllt und das der Gleichung (8) entsprechende System (3) besitzt im Falle (b′) also wenigstens eine Lösung.

Im Falle der Voraussetzung (b″) schreibe man

$$(18)\quad F(s, u_1, u_2, \cdots, u_n) = F(s, 0, 0, \cdots, 0) + \sum_{i=1}^{n} f_i(s, 0, \cdots, 0)\, u_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(s, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots, \bar{u}_n)\, u_i u_j$$

($\bar{u}_i$ ist eine Zahl zwischen 0 und u_i).

Da wegen (b″) für $0 \leqq s \leqq 1$ und alle Werte der $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots, \bar{u}_n$

$$\sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(s, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \cdots, \bar{u}_n)\, u_i u_j \geqq -k \sum_{i,j=1}^{n} u_i^2$$

i
st, schliesst man aus der Darstellung (18), dass wieder die Bedingung (17) erfüllt ist.

Da in diesem Falle, wie man mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung erkennt, auch die *Lipschitz*bedingung (10), die in der der gewählten Interpretation

$$\sum_{i=1}^{n} \int_0^1 [f_i(t, \varphi_1^{(2)}(t), \varphi_2^{(2)}(t), \cdots, \varphi_n^{(2)}(t)) - f_i(t, \varphi_1^{(1)}(t), \varphi_2^{(1)}(t), \cdots, \varphi_n^{(1)}(t))] \cdot [\varphi_i^{(2)}(t) - \varphi_i^{(1)}(t)]\, dt \geqq -k \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 [\varphi_i^{(2)}(t) - \varphi_i^{(1)}(t)]^2\, dt$$

lautet, erfüllt ist, gilt auch der zitierte Eindeutigkeitssatz. Damit ist Satz I vollständig bewiesen.

Ist speziell $K_{ij}(s, t) = 0$ für $i \neq j$, so handelt Satz I von dem Gleichungssystem

$$(19)\quad \psi_i(s) + \int_0^1 K_i(s, t) f_i(t, \psi_1(t), \psi_2(t), \cdots, \psi_n(t))\, dt = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

($K_{ii}(s, t)$ ist $K_i(s, t)$ gesetzt!). Die Voraussetzung (a) verlangt dann, dass die Kerne $K_i(s,t)$ symmetrisch und positiv semidefinit sind; denn wäre z. B. $K_j(s,t)$ nicht semidefinit, so gäbe es eine stetige Funktion $\varphi(s)$ von der Art, dass

$$\int_0^1\int_0^1 K_j(s,t)\,\varphi(s)\,\varphi(t)\,ds\,dt<0$$

ist. Setzt man dann

$$\varphi_1(s)=\varphi_2(s)=\cdots=\varphi_{j-1}(s)=\varphi_{j+1}(s)=\cdots=\varphi_n(s)=0\,,\quad \varphi_j(s)=\varphi(s)\,,$$

so wird

$$\sum_{i,j=}^{n}\int_0^1\int_0^1 K_{ij}(s,t)\,\varphi_i(s)\,\varphi_j(t)\,ds\,dt<0$$

im Widerspruch zur Voraussetzung (a).

Das System (13) lautet in diesem Spezialfall

$$\lambda\varphi_i(s)=\int_0^1 K_i(s,t)\,\varphi_i(t)\,dt \qquad (t=1,2,\cdots,n)$$

und daraus ersieht man, dass λ_1 gleichzusetzen ist dem kleinsten unter den Eigenwerten der Kerne $K_1, K_2,\cdots,K_n$.

Zusatz zu Satz I:

Die Kerne $K_i(s,t)$ seien stetig, symmetrisch und positiv semidefinit. Dann hat das Gleichungssystem

$$\psi_i(s)+\int_0^1 K_i(s,t)f_i(t,\psi_1(t),\psi_2(t),\cdots,\psi_n(t))\,dt=0 \tag{19}$$

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

wenigstens eine Lösung, wenn

(b′) $F(s,u_1,u_2,\cdots,u_n)\geqq-\frac{k}{2}(u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2)-C$ ist,

(b″) genau eine Lösung wenn der kleinste Eigenwert der Matrix $((f_{ij}(s,u_1,u_2,\cdots u_n)))$ nicht kleiner als $-k$ ist.

Dabei ist k kleiner als der kleinste unter den Eigenwerten der Kerne $K_1, K_2, \cdots, K_n$.

§ 2.

Vorbemerkung. Das System

$$(20) \qquad \Psi_i(s)+\sum_{j=1}^{n}\int_0^1 K_{ij}(s,t)f_{ij}(s,t,\Psi_1(t),\Psi_2(t),\cdots,\Psi_n(t))dt=0$$
$$(i=1,2,\cdots,n)$$

ist äquivalent einem System von der Form

$$(21) \qquad \psi_i(s)+\int_0^1 K_i(s,t)f_i(s,t,\psi_1(t),\psi_2(t),\cdots,\psi_n(t))\,dt=0$$
$$(i=1,2,\cdots,n).$$

Um dies einzusehen setze man

$$\begin{aligned} K_i(s,t)&=nK_{ij}(ns-k+1,nt-j+1) \\ f_i(s,t,u_1,u_2,\cdots,u_n)&=f_{ij}(ns-k+1,nt-j+1,u_1,u_2,\cdots,u_n) \end{aligned} \quad \text{für} \quad \begin{aligned} &\frac{k-1}{n}\leqslant s<\frac{k}{n} \\ &\frac{j-1}{n}\leqslant t<\frac{j}{n} \end{aligned}$$
$$(k,j=1,2,\cdots,n).$$

Da dann $K_i(s,t)$ und $f_i(s,t,u_1,u_2,\cdots,u_n)$ periodische Funktionen in s mit der Periode $\frac{1}{n}$ sind, gilt das auch für alle evtl. vorhandenen Lösungen des Systemes (21). Durch die Identität

$$\psi_i(s)=\Psi_i(ns-k+1) \quad \text{für} \quad \frac{k-1}{n}\leqslant s<\frac{k}{n}$$

wird jeder Lösung des Systemes (20) eine Lösung des Systemes (21) zugeordnet und umgekehrt, so dass sich die beiden Systeme als äquivalent erweisen.

Die Systeme von der Form (21) sind also nicht weniger allgemein als die von der Form (20). Wir beschränken uns im Folgenden der Einfachheit halber auf solche Systeme von der Form (21), in denen die vorkommenden Funktionen f_i nicht von s abhängen, bemerken jedoch, dass die Resultate mindestens auch für den Fall gültig bleiben, wo die Funktionen f_i in s stückweise konstant sind.

Zu den Voraussetzungen des folgenden Satzes gehört, dass die unsymmetrischen Kerne $K_i(s,t)$ brauchbar unstetig (im Sinne der linearen Integralgleichungen), die Funktionen $g_i(s)$ und $f_i(s, u_1, u_2, \cdots, u_n)$ stetig in der Veränderlichen s, die letzteren stetig differenzierbar nach den Variablen $u_1, u_2, \cdots, u_n$ sind. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann ferner angenommen werden, dass

$$f_i(s, 0, 0, \cdots, 0) \equiv 0 \tag{22}$$

ist.

Zur Abkürzung sei

$$\begin{gathered} \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(s, u_1, u_2, \cdots, u_n) = f_{ij}(s, u_1, u_2, \cdots, u_n), \\ \int_0^1 \int_0^1 K_i^2(s,t)\, ds\, dt = k_i^2 \end{gathered} \tag{23}$$

gesetzt.

Satz II. *Das System*

$$\varphi_i(s) + \int_0^1 K_i(s,t) f_i(t, \varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t))\, dt = g_i(s) \tag{1}$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

hat genau eine Lösung, wenn für $0 \leqq s \leqq 1$ *und alle Werte der* $u_1, u_2, \cdots, u_n$

$$\sum_{i,j=1}^{n} k_i^2 f_{ij}^2(s, u_1, u_2, \cdots, u_n) \leqq k^2 < 1 \tag{c}$$

ist.

Beweis. Der Beweis stützt sich auf den Satz von *Caccioppoli* [10]) über lokal umkehrbare Funktionaltransformationen, den wir in folgender Weise verwenden:

---

[10]) *R. Caccioppoli*, Sugli elementi uniti delle transformazioni funzionali: un teorema di esistenza e di unicita ed alcune sue applicazioni. Rendiconti del Seminario Matematico di Padova *3* (1932), S. 126—153.

Sei Σ ein abstrakter linearer Raum mit den Punkten $\varphi, \psi, \cdots,$ dessen Metrik durch die Entfernungsfunktion $\|\varphi^{(1)}-\varphi^{(2)}\|$ definiert ist. Σ sei in dieser Metrik vollständig. Durch

$$\psi = \Phi\varphi$$

sei eine eindeutige und stetige Abbildung des Raumes Σ auf einen Teil von sich gegeben.

Die Gleichung

$$\varphi - \Phi\varphi = 0 \tag{24}$$

hat genau eine Lösung in Σ, wenn

α) die Abbildung

$$\psi = \Psi\varphi = \varphi - \Phi\varphi$$

lokal umkehrbar ist (d. h. in den Umgebungen je zweier aufeinander abgebildeter Punkte eindeutig umkehrbar ist),

β) jedem Punkt φ aus Σ eine nichtnegative Zahl $m(\varphi)$ zugeordnet werden kann von der Art, dass die Abbildung Φ jede Folge $\{\varphi^{(i)}\}$ von Punkten aus Σ, für die die Zahlenfolge $\{m(\varphi^{(i)})\}$ beschränkt ist, in eine kompakte Folge überführt, und aus der Divergenz der Zahlenfolge $\{m(\varphi^{(i)})\}$ die Divergenz der Zahlenfolge $\{\|\Psi\varphi^{(i)}\|\}$ folgt.

Wir interpretieren Σ als den Raum der n-tupel von stetigen Funktionen des Intervalls $(0, 1)$

$$\varphi = (\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots, \varphi_n(s)),$$

die Entfernung $\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\|$ als

$$\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \max_{0 \leq s \leq 1} \left(\varphi_i^{(1)}(s) - \varphi_i^{(2)}(s)\right)^2} \tag{25}$$

und die Zahl $m(\varphi)$ als

$$m(\varphi) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \varphi_i^2(s)ds}\,. \tag{26}$$

Die Abbildung $\psi = \Phi\varphi$ sei erklärt durch

$$(27)\qquad \psi_i(s)=g_i(s)-\int_0^1 K_i(s,t)f_i(t,\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t))\,dt$$
$$(i=1,2,\cdots,n).$$

Sie ist offenbar stetig in bezug auf die durch (25) gegebene Metrik. Um die lokale Umkehrbarkeit dieser Abbildung nachzuweisen, benützen wir den Satz von *Hildebrandt* und *Graves* [11]), welcher besagt: Besitzt $\Psi\varphi$ an der Stelle $\varphi^{(0)}$ ein stetiges *Fréchet*sches Differential gemäss der Zerlegung

$$(28)\quad \Psi[\varphi^{(0)}+\varphi]-\Psi[\varphi^{(0)}]=\Delta[\varphi^{(0)},\varphi]+\|\varphi\|\,P[\varphi^{(0)},\varphi],$$

wobei die in φ lineare Abbildung $\Delta[\varphi^{(0)},\varphi]$ in bezug auf $\varphi^{(0)}$ und φ stetig ist und

$$\lim_{\varphi\to 0}\|P[\varphi^{(0)},\varphi]\|=0$$

ist, so ist $\Psi\varphi$ an der Stelle $\varphi^{(0)}$ lokal umkehrbar, wenn die lineare Funktionalgleichung

$$(29)\qquad \Delta[\varphi^{(0)},\varphi]=\psi$$

für jedes ψ aus Σ eine Lösung φ in Σ besitzt.

Die durch

$$(30)\qquad \psi_i(s)=\varphi_i(s)+\int_0^1 K_i(s,t)f_i(t,\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t))\,dt-g_i(s)$$
$$(i=1,2,\cdots,n)$$

gegebene Abbildung $\psi=\Psi\varphi$ besitzt, wie leicht nachzuprüfen ist, ein stetiges *Fréchet*sches Differential $\psi=\Delta[\varphi^{(0)},\varphi]$, das gegeben ist durch

$$(31)\quad \psi_i(s)=\varphi_i(s)+\sum_{j=1}^{n}\int_0^1 K_i(s,t)f_{ij}(t,\varphi_1^{(0)}(t),\varphi_2^{(0)}(t),\cdots,\varphi_n^{(0)}(t))\,\varphi_j(t)\,dt$$
$$(i=1,2,\cdots,n).$$

---

11) *T. H. Hildebrandt — L. M. Graves,* Implicit functions and their differentials in general analysis. Transactions of the American Mathematical Society *29* (1927), S. 126—153.

Dieses der Gleichung (29) entsprechende lineare Integralgleichungssystem (mit unsymmetrischen Kernen) hat für jedes n-tupel $(\psi_1(s), \psi_2(s), \cdots, \psi_n(s))$ von stetigen Funktionen genau eine Lösung $(\varphi_1(s), \varphi_2(s), \cdots, \varphi_n(s))$. Um dies einzusehen setze man

$$f_{ij}(t, \varphi_1^{(0)}(t), \varphi_2^{(0)}(t), \cdots, \varphi_n^{(0)}(t)) = k_{ij}(t),$$

$$\begin{aligned} \varphi(s) &= \varphi_i(s-i+1) \\ \psi(s) &= \psi_i(s-i+1) \end{aligned} \quad \text{für } i-1 \leqslant s < i \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

$$K(s, t) = K_i(s-i+1, t-j+1)\, k_{ij}(t-j+1) \quad \text{für} \begin{array}{l} i-1 \leqslant s < i \\ j-1 \leqslant t < j \end{array}$$

$$(i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

Dann schreibt sich das System (31) in der Form einer einzigen Gleichung

$$\psi(s) = \varphi(s) + \int_0^n K(s, t)\, \varphi(t)\, dt. \tag{32}$$

Es ist nach Voraussetzung (c)

$$\int_0^n \int_0^n K^2(s,t)\, ds\, dt = \sum_{i,j=1}^n \int_{i-1}^i \int_{j-1}^j K_i^2(s-i+1, t-j+1)\, k_{ij}^2(t-j+1)\, ds\, dt =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \int_0^1 \int_0^1 K_i^2(s,t) k_{ij}^2(t) ds\, dt = \sum_{i,j=1}^n k_{ij}^2(\bar{t})\, k_i^2 \leqslant k^2 < 1$$

($\bar{t}$ ist eine Zahl zwischen 0 und 1).

Nach einem bekannten Satze von *E. Schmidt* [12]) hat daher die Gleichung (32) für jede in Betracht kommende Funktion $\psi(s)$ genau eine Lösung $\varphi(s)$. Also ist die Behauptung bezüglich des Systemes (31) bewiesen.

Da die lokale Umkehrbarkeit der Abbildung Ψ an jeder Stelle $\varphi^{(0)}$ in Σ bewiesen werden kann, ist die Bedingung (α) des *Caccioppoli*schen Satzes erfüllt.

---

[12]) *E. Schmidt*, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, II. Teil. Mathematische Annalen *64* (1907), s. S. 162.

Es ist wegen der Voraussetzung (22)

$$
(33)\quad
\begin{aligned}
&f_i(t,\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t))=\sum_{j=1}^{n}f_{ij}(t,\overline{\varphi}_1(t),\overline{\varphi}_2(t),\cdots,\overline{\varphi}_n(t))\varphi_j(t)\\
&(\overline{\varphi}_i(t) \text{ ist eine Zahl zwischen } 0 \text{ und } \varphi_i(t)),
\end{aligned}
$$

also

$$
f_i^2(t,\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t))\leqslant\sum_{j=1}^{n}f_{ij}^2(t,\overline{\varphi}_1(t),\cdots,\overline{\varphi}_n(t))\sum_{j=1}^{n}\varphi_j^2(t)
$$

und nach Festsetzung (26) und Voraussetzung (c)

$$
\int_0^1 f_i^2(t,\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t))\,dt\leqslant m^2(\varphi)\sum_{j=1}^{n}f_{ij}^2(\overline{t},\overline{\varphi}_1(\overline{t}),\cdots,\overline{\varphi}_n(\overline{t}))
\leqslant \gamma^2 m^2(\varphi)
$$

($\overline{t}$ ist eine Zahl zwischen 0 und 1, γ eine von den φ_i unabhängige Konstante).

Somit ist für irgend zwei Zahlen s_1, s_2 des Intervalls $(0,1)$

$$
(34)\quad
\begin{aligned}
&\left|\int_0^1 K_i(s_1,t)f_i(t,\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t))\,dt-\right.\\
&\left.-\int_0^1 K_i(s_2,t)f_i(t,\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t))\,dt\right|\leqslant\\
&\leqslant\gamma\, m(\varphi)\left\{\int_0^1 (K_i(s_1,t)-K_i(s_2,t))^2\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$
[13].

Beachtet man noch, dass die iterierten Kerne stetig sind, so ergibt sich aus der Abschätzung (34), dass eine Folge $\{\varphi^{(i)}\}$ von Elementen aus Σ, für die die Zahlenfolge $\{m(\varphi^{(i)})\}$ beschränkt ist, bei der durch (27) definierten Abbildung Φ in eine Menge von n-tupeln gleichgradig stetiger Funktionen übergeht.

---

[13]) Nur an dieser Stelle des Beweises würde die Abhängigkeit der Funktionen f_i von s von Bedeutung werden. Die Abschäzung (34) ist aber auch für die allein in Betracht kommenden Funktionen $f_i(s, u_1, u_2, \ldots u_n)$ gültig, wenn man nur solche Zahlenpaare (s_1, s_2) betrachtet, die einem der Konstanzintervalle von f_i angehören. Dies genügt für die Durchführung des Beweises.

Da aus jeder in einer solchen Menge enthaltenen Folge sich eine Teilfolge von gleichmässig konvergierenden n-tupeln auswählen lässt, ist diese Menge in bezug auf die durch (25) definierte Metrik kompakt.

Zur Abkürzung sei noch

$$\int_0^1 g_i^2(s)\,ds = c_i^2 \quad , \quad \int_0^1 \varphi_i^2(s)\,ds = m_i^2(\varphi)$$

gesetzt. Gemäss der Festsetzung (26) ist

$$\sum_{i=1}^n c_i^2 = m^2(g) \quad , \quad \sum_{i=1}^n m_i^2(\varphi) = m^2(\varphi) \ .$$

Nach (30) und (33) gilt für je zwei durch die Abbildung $\psi = \Psi\varphi$ zugeordnete Punkte von Σ

$$(35) \qquad \int_0^1 \varphi_i(s)\,\psi_i(s)\,ds = m_i^2(\varphi) - \int_0^1 g_i(s)\,\varphi_i(s)\,ds$$

$$+ \sum_{j=1}^n \int_0^1\int_0^1 K_i(s,t)\,f_{ij}(t, \bar{\varphi}_1(t), \bar{\varphi}_2(t), \cdots, \bar{\varphi}_n(t))\,\varphi_i(s)\,\varphi_j(t)\,ds\,dt\,.$$

Mehrmalige Anwendung der *Schwarz*schen Ungleichung ergibt

$$(36) \qquad \left\{\int_0^1\int_0^1 K_i(s,t)\varphi_i(s)\sum_{j=1}^n f_{ij}(t, \bar{\varphi}_1(t), \cdots, \bar{\varphi}_n(t))\varphi_j(t)\,ds\,dt\right\}^2 \leqq$$

$$\leqq \int_0^1\int_0^1 K_i^2(s,t)\,ds\,dt \cdot \int_0^1 \varphi_i^2(s)\,ds \cdot$$

$$\cdot \int_0^1 \left[\sum_{j=1}^n f_{ij}^2(t, \bar{\varphi}_1(t), \cdots, \bar{\varphi}_n(t)) \sum_{j=1}^n \varphi_j^2(t)\right] dt =$$

$$= k_i^2\, m_i^2(\varphi)\, m^2(\varphi) \sum_{j=1}^n f_{ij}^2(\bar{t}, \bar{\varphi}_1(\bar{t}), \cdots, \bar{\varphi}_n(\bar{t}))$$

($\bar{t}$ ist eine Zahl zwischen 0 und 1)
und ebenso

$$\left\{\int_0^1 g_i(s)\,\varphi_i(s)\,ds\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \int_0^1 g_i^2(s)\,ds\cdot\int_0^1 \varphi_i^2(s)\,ds = c_i^2\, m_i^2(\varphi)\,.$$

Somit ist nach (35)

$$\left|\int_0^1 \varphi_i(s)\,\psi_i(s)\,ds\right| \geqq m_i^2(\varphi) - c_i\, m_i(\varphi) -$$
$$- k_i m_i(\varphi)\, m(\varphi)\sqrt{\sum_{j=1}^{n} f_{ij}^2(\bar{t}, \bar{\varphi}_1(\bar{t}), \cdots, \bar{\varphi}_n(\bar{t}))}$$

und

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\int_0^1 \varphi_i(s)\,\psi_i(s)\,ds\right| \geqq m^2(\varphi) - \sum_{i=1}^{n} c_i\, m_i(\varphi) -$$
$$- m(\varphi)\sum_{i=1}^{n}\left[k_i\, m_i(\varphi)\sqrt{\sum_{j=1}^{n} f_{ij}^2(\bar{t}, \bar{\varphi}_1(\bar{t}), \cdots, \bar{\varphi}_n(\bar{t}))}\right] \geqq$$
$$\geqq m^2(\varphi) - m(g)\, m(\varphi) -$$
$$- m^2(\varphi)\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} k_i^2 f_{ij}^2(\bar{t}, \bar{\varphi}_1(\bar{t}), \cdots, \bar{\varphi}_n(\bar{t}))}\,.$$

Wegen der Voraussetzung (c) folgt daraus

$$(37)\qquad \sum_{i=1}^{n}\left|\int_0^1 \varphi_i(s)\,\psi_i(s)\,ds\right| \geqq (1-k^2)\, m^2(\varphi) - m(g)\, m(\varphi)\,.$$

Andererseits ist

$$\left|\int_0^1 \varphi_i(s)\,\psi_i(s)\,ds\right| \leqslant \left\{\int_0^1 \varphi_i^2(s)\,ds\cdot\int_0^1 \psi_i^2(s)\,ds\right\}^{\frac{1}{2}} = m_i(\varphi)\, m_i(\psi)\,,$$

also

$$(38) \qquad \sum_{i=1}^{n} \left| \int_0^1 \varphi_i(s)\, \psi_i(s)\, ds \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} m_i(\varphi)\, m_i(\psi) \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} m_i^{\,2}(\varphi)\, m_i^2(\psi)} = m(\varphi)\, m(\psi)\ .$$

Aus den Ungleichungen (37) und (38) ergiebt sich schliesslich

$$m(\psi) \geqslant (1 - k^2)\, m(\varphi) - m(g)\,.$$

Da $k^2 < 1$ ist, folgt aus dieser Abschätzung, dass die Divergenz der Zahlenfolge $\{ m(\varphi^{(i)}) \}$ die Divergenz der Zahlenfolge $\{ m(\Psi\varphi^{(i)}) \}$ nach sich zieht. Diese wiederum hat die Divergenz der Zahlenfolge $\{ \| \Psi\varphi^{(i)} \| \}$ zur Folge, wie aus der Bedeutung dieser Zahlen (s. Definitionsgleichungen (25) und (26)) zu ersehen ist.

Damit ist nachgewiesen, dass auch die Bedingung (β) des *Caccioppoli*schen Satzes erfüllt ist Dieser ist also auf unseren Fall anwendbar und liefert Satz II.

Der Satz II kann noch verschärft werden :

$$p_{i1}(s)\ ,\ p_{i2}(s)\,, \cdots\ ;\ q_{i1}(s)\ ,\ q_{i2}(s) \cdots$$

seien das *E. Schmidt*sche[14]) „vollständige normierte Orthogonalsystem von adjungierten Eigenfunktionen des unsymmetrischen Kernes $K_i(s\,,t)$ ",

$$0 < \lambda_{i1} \leqslant \lambda_{i2} \leqslant \cdots$$

die zugehörigen Eigenwerte, die ja positiv angenommen werden dürfen.

Der Satz II bleibt dann gültig, wenn statt der Voraussetzung (c) die Bedingung

$$(c') \ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_{i1}^{2}} f_{ij}^{2}(s\,, u_1\,, u_2\,, \cdots, u_n) \leqslant k^2 < 1 \left(\begin{array}{c} \text{für } 0 \leqslant s \leqslant 1 \\ \text{und alle Werte der} \\ u_1\,, u_2\,, \cdots, u_n \end{array} \right)$$

---

14) *E. Schmidt*, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, I. Teil. Mathematische Annalen *63* (1907), s. S. 459 u. f.

erfüllt ist. Diese ist allgemeiner als die Voraussetzung (c), denn sie ist eine Folge von (c). Es ist nämlich

$$k_i^2 = \int_0^1 \int_0^1 K_i^2(s, t)\, ds\, dt \geqq \frac{1}{\lambda_{i1}^2}.$$

Der Beweis für diesen verschärften Satz[15]) stimmt mit dem früheren weitgehend überein. Abänderungen sind nur an zwei Stellen notwendig. Es ist erstens nachzuweisen, dass unter der Voraussetzung (c′) die Gleichung (32)

$$\psi(s) = \varphi(s) + \int_0^n K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

für jede in Betracht kommende Funktion $\psi(s)$ genau eine Lösung $\varphi(s)$ besitzt. Wäre das nicht der Fall, so gäbe es eine nicht identisch verschwindene Funktion $\varphi(s)$, die Lösung der homogenen Gleichung

$$0 = \varphi(s) + \int_0^n K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

ist. Es wäre somit für diese Funktion $\varphi(s)$

$$\int_1^n \varphi^2(s)\, ds = \sum_{i=1}^n \int_0^1 \varphi_i^2(s)\, ds = m^2(\varphi) \neq 0$$

und

$$0 = \int_0^n \varphi^2(s)\, ds + \int_0^n \int_0^n K(s, t)\, \varphi(s)\, \varphi(t)\, ds\, dt. \tag{39}$$

[15]) Fast der gleiche Satz ist in meiner früheren Arbeit (l. c. ([1]), „Zusatz zu Satz 1", S. 53), dort ohne Beweis, enthalten. Dabei sei ein dort vor-$_1$ kommender störender Druckfehler besichtigt. Auf S. 48 muss es statt „ . . . λ der kleinste der Eigenwerte der Kerne $K_i(s, t)$" heissen: „ . . . λ_1^2 der kleinste der Eigenwerte der Kerne $K_i(s, t)$".

Nach Definition ist

$$\int_0^n \int_0^n K(s,t)\,\varphi(s)\,\varphi(t)\,ds\,dt = \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^1 \int_0^1 K_i(s,t)\,k_{ij}(t)\,\varphi_i(s)\,\varphi_j(t)\,ds\,dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \int_0^1 \left| K_i(s,t)\,\varphi_i(s) \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(t)\,\varphi_j(t) \right| ds\,dt\,.$$

Nach dem Entwicklungssatz ist

$$\int_0^1 K_i(s,t)\,\varphi_i(s)\,ds = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{i\nu}}{\lambda_{i\nu}}\,q_{i\nu}(t)\,, \qquad a_{i\nu} = \int_0^1 \varphi_i(s)\,p_{i\nu}(s)\,ds$$

und nach der *Bessel*schen Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{i\nu}^2 \leqslant \int_0^1 \varphi_i^2(s)\,ds \leqslant m_i^2(\varphi)\,.$$

Mehrmalige Anwendung der *Schwarz*schen und der *Bessel*schen Ungleichung ergibt somit

$$(40) \qquad \left\{ \int_0^1 \int_0^1 \left[K_i(s,t)\,\varphi_i(s) \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(t)\,\varphi_j(t) \right] ds\,dt \right\}^2 =$$

$$= \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \left[\frac{a_{i\nu}}{\lambda_{i\nu}} \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(t)\,\varphi_j(t)\,q_\nu(t)\,dt \right] \right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\lambda_{i1}^2} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{i\nu}^2 \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \left\{ \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} k_{ij}(t)\,\varphi_j(t)\,q_\nu(t)\,dt \right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{m_i^2(\varphi)}{\lambda_{i1}^2} \int_0^1 \left[\sum_{j=1}^{n} k_{ij}(t)\,\varphi_j(t)^2 \right]^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{m_i^2(\varphi)}{\lambda_{i_1}^2} \int_0^1 \sum_{j=1}^n k_{ij}^2(t) \cdot \sum_{j=1}^n \varphi_j^2(t)\, dt = \frac{m_i^2(\varphi)}{\lambda_{i_1}^2} m^2(\varphi) \sum_{j=1}^n k_{ij}^2(\bar{t})$$

($\bar{t}$ ist eine Zahl zwischen 0 und 1).

Somit ist

$$\left| \int_0^1 \int_0^1 \left[K_i(s,t)\, \varphi_i(s) \sum_{j=1}^n k_{ij}(t)\, \varphi_j(t) \right] ds\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{m_i(\varphi)}{\lambda_{i_1}} m(\varphi) \sqrt{\sum_{j=1}^n k_{ij}^2(\bar{t})}$$

und man erhält schliesslich durch nochmalige Anwendung der *Schwarz*schen Ungleichung und Benutzung der Voraussetzung (c′)

$$\left| \sum_{i=1}^n \int_0^1 \int_0^1 \left[K_i(s,t)\, \varphi_i(s) \sum_{j=1}^n k_{ij}(t)\, \varphi_j(t) \right] ds\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant m(\varphi) \sum_{i=1}^n \left[\frac{m_i(\varphi)}{\lambda_{i1}} \sqrt{\sum_{j=1}^n k_{ij}^2(\bar{t})} \right] \leqslant m(\varphi) \sqrt{\sum_{i=1}^n m_i^2(\varphi) \cdot \sum_{i,j=1}^n \frac{k_{ij}^2(\bar{t})}{\lambda_{i1}^2}} \leqslant$$

$$\leqslant k m^2(\varphi) < m^2(\varphi)$$

im Widerspruch zu der angenomenen Gleichung (39).

Die zweite Stelle, an der die Voraussetzung (c) im Beweise benuntzt wurde, ist die Ungleichung (36)

$$\left\{ \int_0^1 \int_0^1 K_i(s,t)\, \varphi_i(s) \sum_{j=1}^n f_{ij}(t, \bar{\varphi}_1(t), \cdots, \bar{\varphi}_n(t))\, \varphi_j(t)\, ds\, dt \right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant k_i^2\, m_i^2(\varphi)\, m^2(\varphi) \sum_{j=1}^n f_{ij}^2(\bar{t}, \bar{\varphi}_1(\bar{t}), \cdots, \bar{\varphi}_n(\bar{t})).$$

Auch in ihr können, wie die Ungleichung (40) zeigt, die Zahlen k_i^2 durch die Zahlen $\frac{1}{\lambda_{i1}^2}$ ersetzt werden, w. z. b. w.

§ 3.

In diesem Paragraphen seien über die Kerne $K_i(s, t)$ die gleichen Voraussetzungen wie im vorhergehenden Paragraphen gemacht. Die Funktionen $f_i(s, u_1, u_2, \cdots, u_n)$ seien für $0 \leqslant s \leqslant 1$ stetig und nach den Veränderlichen $u_1, u_2, \cdots, u_n$ für alle Werte dieser Variablen zweimal stetig differenzierbar. Es sei wieder

$$f_{ij}(s, u_1, u_2, \cdots, u_n) = \frac{\partial f_i}{\partial u_j}(s, u_1, u_2, \cdots, u_n)$$
$$(i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

gesetzt, sowie der „zusammengefügte Kern"

$$K(s, t, u_1, u_2, \cdots, u_n) = K_j(s-i+1, t-j+1) f_{ij}(s-i+1, u_1, u_2, \cdots, u_n)$$
$$\text{für } \begin{array}{l} i-1 \leqslant s < i \\ j-1 \leqslant t < j \end{array}$$
$$(i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

eingeführt.

Satz III. *Das Gleichungssystem*

$$(1) \qquad \psi_i(s) + \int_0^1 K_i(s, t) f_i(t, \psi_1(t), \psi_2(t), \cdots, \psi_n(t))\, dt = 0$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

hat genau eine Lösung, wenn für alle n-tupel $(\bar{\varphi}_1(s), \bar{\varphi}_2(s), \cdots, \bar{\varphi}_n(s))$ *von stetigen Funktionen und alle quadratisch integrierbar Funktionen* $\varphi(s)$ *des Intervalles* $(0, n)$

$$(\text{d}) \qquad \int_0^n \int_0^n K(s, t, \bar{\varphi}_1(s), \bar{\varphi}_2(s), \cdots, \bar{\varphi}_n(s))\, \varphi(s)\, \varphi(t)\, ds\, dt \geqq -k \int_0^n \varphi^2(s)\, ds$$
$$(k < 1)$$

ist.

Beweis. Auch dieser Satz könnte ebenso wie der vorhergehende mit Hilfe des *Caccioppoli*schen Theorems bewiesen werden. Wir schlagen einen anderen Weg ein, um das zweite in der Einleitung genannte Prinzip zu exemplifizieren.

$$p_{i1}(s), p_{i2}(s), \cdots \quad ; \; q_{i1}(s), q_{i2}(s), \cdots$$

bezeichne wieder das vollständige Orthogonalsystem der adjungierten Eigenfunktionen des unsymmetrischen Kernes $K_i(s, t)$,

$$0 < \lambda_{i_1} \leqslant \lambda_{i_2} \leqslant \cdots$$

die zugehörigen Eigenwerte. Die Lösungsfunktion $\psi_i(s)$ ist, wie Gleichung (1) zeigt, quellenmässig durch den Kern $K_i(s, t)$ darstellbar und lässt sich daher nach dem Funktionensystem $\{p_{i\nu}(s)\}$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ entwickeln. $y_{i\nu}$ seien die Entwicklungskoeffizienten, dann ist wegen (4)

$$(41) \quad y_{i\nu} + \frac{1}{\lambda_{i\nu}} \int_0^1 f_i\left(t, \sum_{\mu=1}^{\infty} y_{1\mu} p_{1\mu}(t), \sum_{\mu=1}^{\infty} y_{2\mu} p_{2\mu}(t), \cdots, \sum_{\mu=1}^{\infty} y_{n\mu} p_{n\mu}(t)\right) q_{i\nu}(t)\, dt = 0$$

$$\begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots n \\ \nu = 1, 2, \cdots \end{pmatrix}$$

Die *Bessel*sche Ungleichung, auf dieses System angewandt, ergibt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (\lambda_{i\nu} y_{i\nu})^2 \leqslant \int_0^1 f_i^2 \left(t, \sum_{\mu=1}^{\infty} y_{1\mu} p_{1\mu}(t) \cdots, \sum_{\mu=1}^{\infty} y_{n\mu} p_{n\mu}(t)\right) dt .$$

Ist umgekehrt ein Lösungssystem $\{y_{i\nu}\}$ des Systems (41) gegeben, für das die Summen $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\lambda_{i\nu} y_{i\nu})^2$ konvergieren, so entspricht ihm das Lösungssystem $\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} y_{i\nu} p_{i\nu}(s)\right)$ des Systemes (1), und dieses hat die von den Lösungen verlangten Eigenschaften. Da die Zuordnung zwischen den Systemen $\{y_{i\nu}\}$ und $\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} y_{i\nu} p_{i\nu}(s)\right)$ überdies eineindeutig ist, ist das unendliche Gleichungssystem (41), wenn man nur solche Lösungen in Betracht zieht, für die die Summen $\sum_{\nu=1}^{\infty} (\lambda_{i\nu} y_{i\nu})^2$ endlich sind, dem Integralgleichungssystem (1) äquivalent.

Setzt man

$$x_{i\nu} = \lambda_{i\nu} y_{i\nu} \quad ,$$

so wird aus (41)

$$(42)\qquad x_{i\nu}+\int_0^1 f_i\left(t,\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{x_{1\mu}}{\lambda_{1\mu}}p_{1\mu}(t),\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{x_{2\mu}}{\lambda_{2\mu}}p_{2\mu}(t),\cdots,\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{x_{n\mu}}{\lambda_{n\mu}}p_{n\mu}(t)\right)q_{i\nu}(t)\,dt=0$$

und die gesuchten Lösungen müssen die Eigenschaft haben, dass ihre Quadratsummen konvergieren.

Für solche Systeme gilt der folgende Satz (der einfacheren Formulierung halber betrachten wir die Gesamtheit der Zahlenfolgen mit konvergenter Quadratsumme als *Hilbert*schen Raum H und verwenden die üblichen Bezeichnungen der Geometrie dieses Raumes) [16].

Das unendliche Gleichungssystem

$$(43)\qquad x_\nu+F_\nu(x_1,x_2,\cdots)=0\qquad(\nu=1,2,\cdots)$$

hat genau ein dem Raum H angehörigen Lösungssystem, wenn

A. durch

$$(44)\qquad y_\nu=F_\nu(x_1,x_2,\cdots)\qquad(\nu=1,2,\cdots)$$

und

$$(45)\qquad y_{\nu\mu}=\frac{\partial F_\nu}{\partial x_\mu}(x_1,x_2,\cdots)\qquad(\mu=1,2,\cdots)$$

eindeutige vollstetige Abbildungen des Raumes H auf einen Teil von sich definiert sind und

B. für die in den Variablen u_ν $(\nu=1,2,\cdots)$ vollstetige quadratische Form $\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty}\frac{\partial F_\nu}{\partial x_\mu}u_\nu u_\mu$ an jeder Stelle $\{x_\nu\}$ und $\{u_\nu\}$ in H

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty}\frac{\partial F_\nu}{\partial x_\mu}u_\nu u_\mu\geqq -k\sum_{\nu=1}^{\infty}u_\nu^2\qquad(k<1)$$

gilt.

Um diesen Satz auf das System (42) anzuwenden setze man

$$x_{n(\nu-1)+i}=x_{i,\nu}$$

[16]) Der Beweis zu diesem Satz ist noch nicht veröffentlicht.

(46)
$$F_{n(\nu-1)+i}(x_1, x_2, \cdots) =$$
$$= \int_0^1 f_i\left(t, \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{x_{n(\mu-1)+1}}{\lambda_{1\mu}} p_{1\mu}(t), \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{x_{n(\mu-1)+2}}{\lambda_{2\mu}} p_{2\mu}(t), \cdots, \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{x_{n(\mu-1)+n}}{\lambda_{n\mu}} p_{n\mu}(t)\right) q_{i\nu}(t)\, dt$$
$$\begin{pmatrix} i = 1, 2, \cdots, n \\ \nu = 1, 2, \cdots \end{pmatrix}.$$

Dann schreibt sich das System (42) in der Form (43).

Es ist wegen der *Bessel*schen Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} F_\nu^2(x_1, x_2, \cdots) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 f_i^2\left(t, \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{x_{n(\mu-1)+1}}{\lambda_{1\mu}} p_{1\mu}(t), \cdots, \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{x_{n(\mu-1)+n}}{\lambda_{n\mu}} p_{n\mu}(t)\right) dt,$$

also wird durch (44) eine Abbildung von H auf einen Teil von sich gegeben.

Seien $\{x_\nu'\}$ und $\{x_\nu''\}$ zwei verschiedene Punkte aus H. Nach dem Mittelwertsatz ist

$$F_{n(\nu-1)+i}(x_1', x_2', \cdots) - F_{n(\nu-1)+i}(x_1'', x_2'', \cdots)$$
$$= \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{\infty} \left[\frac{x'_{n(\varrho-1)+j} - x''_{n(\varrho-1)+j}}{\lambda_{j\varrho}} p_{j\varrho}(t) f_{ij}\left(t, \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\bar{x}_{n(\mu-1)+1}}{\lambda_{1\mu}} p_{1\mu}(t), \cdots, \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\bar{x}_{n(\mu-1)+n}}{\lambda_{n\mu}} p_{n\mu}(t)\right)\right] q_{i\nu}(t)\, dt$$

($\{\bar{x}_\nu\}$ ist ein Punkt auf der Strecke mit den Endpunken $\{x'_\nu\}, \{x''_\nu\}$). Mit Hilfe der *Bessel*schen und der *Schwarz*schen Ungleichung erhält man daraus

(47)
$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(F_\nu(x'_1, x'_2, \cdots) - F_\nu(x''_1, x''_2, \cdots)\right)^2$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \left\{ \sum_{j=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{\infty} \left[\frac{x'_{n(\varrho-1)+j} - x''_{n(\varrho-1)+j}}{\lambda_{j\varrho}} p_{j\varrho}(t) \cdot \right.\right.$$

$$\left.\left. f_{ij}\left(t, \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\bar{x}_{n(\mu-1)+1}}{\lambda_{1\mu}} p_{1\mu}(t), \cdots \right) \right] \right\}^2 dt$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{x'_{n(\varrho-1)+j} - x''_{n(\varrho-1)+j}}{\lambda_{j\varrho}} p_{j\varrho}(t) \right)^2 \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{j=1}^{n} f^2_{ij}\left(t, \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\bar{x}_{n(\mu-1)+1}}{\lambda_{1\mu}} p_{1\mu}(t), \cdots \right) \right\} dt$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} f^2_{ij}\left(\bar{t}, \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\bar{x}_{n(\mu-1)+1}}{\lambda_{1\mu}} p_{1\mu}(\bar{t}), \cdots \right) \cdot$$

$$\cdot \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^1 \left(\sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{x'_{n(\varrho-1)+j} - x''_{n(\varrho-1)+j}}{\lambda_{j\varrho}} p_{j\varrho}(t) \right)^2 dt$$

($\bar{t}$ ist eine Zahl zwischen 0 und 1).

Da nun zu jedem $\varepsilon > 0$ eine, von der speziellen Wahl der Punkte $\{x'_\nu\}$, $\{x''_\nu\}$ aus einer beschränkten Teilmenge von H unabhängige Zahl N gefunden werden kann, so dass

$$\int_0^1 \left(\sum_{\varrho=N}^{\infty} \frac{x'_{n(\varrho-1)+j} - x''_{n(\varrho-1)+j}}{\lambda_{j\varrho}} p_{j\varrho}(t) \right)^2 dt \leqslant \frac{1}{\lambda^2_{jN}} \sum_{\nu=1}^{\infty} (x'_\nu - x''_\nu)^2$$

kleiner als ε wird, folgt aus der Abschätzung (47) die Vollstetigkeit der Abbildung (44).

Nach (46) ist

$$\text{(48)} \qquad \frac{\partial}{\partial x_{n(\mu-1)+j}} F_{n(\nu-1)+i}(x_1, x_2, \cdots) =$$

$$= \int_0^1 f_{ij}\left(t, \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{x_{n(\varrho-1)+1}}{\lambda_{1\varrho}} p_{1\varrho}(t), \cdots \right) \frac{p_{j\mu}(t)}{\lambda_{j\mu}} q_{i\nu}(t)\, dt .$$

Die *Bessel*sche Ungleichung ergibt

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial x_{n(\mu-1)+j}} F_\nu(x_1, x_2, \cdots)\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \left(f_{ij}\left(t, \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{x_{n(\varrho-1)+1}}{\lambda_{1\varrho}} p_{1\varrho}(t), \cdots\right) \frac{p_{j\mu}(t)}{\lambda_{j\mu}}\right)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{\lambda_{j\mu}^2} \sum_{i=1}^{n} f_{ij}^2\left(\bar{t}, \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{x_{n(\varrho-1)+1}}{\lambda_{1\varrho}} p_{1\varrho}(\bar{t}), \cdots, \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{x_{n(\varrho-1)+n}}{\lambda_{n\varrho}} p_{n\varrho}(\bar{t})\right),$$

($\bar{t}$ ist eine Zahl zwischen 0 und 1), und daraus folgt weiter

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} F_\nu(x_1, x_2, \cdots)\right)^2 \leqslant \tag{49}$$

$$\leqslant \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{j\mu}^2} f_{ij}^2\left((\bar{t}), \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{x_{n(\varrho-1)+1}}{\lambda_{1\varrho}} p_{1\mu}(\bar{t}), \cdots\right).$$

Aus der Ungleichung (49) ergibt sich zunächst, dass durch (45) eine Abbildung des Raumes H auf einen Teil von sich gegeben ist. Durch eine gans ähnliche Abschätzung wie (47) beweist man, dass diese Abbildung auch vollstetig ist. Auf die Einzeldurchführung dieses Teilbeweises verzichten wir hier der Kürze halber.

Die Bedingung (A) des zitierten Satzes ist also im Falle des Systemes (42) erfüllt.

Aus der Ungleichung (49) folgt ferner, dass die in den Variablen u_ν quadratische Form

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_\mu} F_\nu(x_1, x_2, \cdots) u_\mu u_\nu$$

an jeder Stelle $\{x_\nu\}$ des Raumes H vollstetig ist; denn dafür ist hinreichend, dass die Quadratsumme der Koeffizienten konvergiert. Nun ist nach (48)

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_\mu} F_\nu(x_1, x_2, \cdots) u_\mu u_\nu = \tag{50}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{\infty} \int_0^1 \left[f_{ij}\left(t, \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{x_{n(\varrho-1)+1}}{\lambda_{1\varrho}} p_{1\varrho}(t), \cdots\right) \cdot \right.$$

$$\left. \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{u_{n(\mu-1)+j}}{\lambda_{j\mu}} p_{j\mu}(t) \sum_{\nu=1}^{\infty} u_{n(\nu-1)+i}\, q_{i\nu}(t) \right] dt\,.$$

Setzt man

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} u_{n(\nu-1)+i}\, q_{i\nu}(t) = \varphi_i(t) \qquad (i = 1, 2, \cdots n) \tag{51}$$

$$\varphi(t) = \varphi_i(t-i+1) \qquad \text{für } i-1 \leqslant t < i,$$

so wird

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{u_{n(\mu-1)+j}}{\lambda_{j\mu}} p_{j\mu}(t) = \int_0^1 K_j(t, s)\, \varphi_j(s) ds\,,$$

und daher schreibt sich die Identität (50), wenn man noch die zu Anfang dieses Paragraphen eingeführten Bezeichnungen verwendet und

$$p_{j\mu}(t) = p_{j\mu}(t-i+1) \qquad \text{für } i-1 \leqslant t < i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

setzt, in der Form

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_\mu} F_\nu(x_1, x_2, \cdots,)\, u_\mu u_\nu =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^1 \int_0^1 K_j(t, s) f_{ij}\left(t, \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{x_{n(\varrho-1)+1}}{\lambda_{1\varrho}} p_{1\varrho}(t), \cdots\right) \varphi_j(s)\, \varphi_i(t)\, ds\, dt$$

$$= \int_0^n \int_0^n K\left(s, t, \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{x_{n(\varrho-1)+1}}{\lambda_{1\varrho}} p_{1\varrho}(s), \cdots, \sum_{\varrho=1}^{\infty} \frac{x_{n(\varrho-1)+n}}{\lambda_{n\varrho}} p_{n\varrho}(s)\right) \varphi(s) \varphi(t)\, ds\, dt\,.$$

$\varphi(s)$ ist eine quadratisch integrierbare Funktion des Intervalls $(0, n)$, daher ist nach Voraussetzung (d) und Definitionsgleichung (51)

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x_\mu} F_\nu(x_1, x_2, \cdots) u_\mu u_\nu =$$

$$= \int_0^n \int_0^n K(s, t, \cdots) \varphi(s) \varphi(t) \, ds \, dt \geqslant - k \int_0^n \varphi^2(s) \, ds = -k \sum_{\nu=1}^{\infty} u_\nu^2.$$

Es ist in unserem Falle also auch die Bedingung (B) des zitierten Satzes erfüllt und damit die Richtigkeit der in Satz III ausgesprochenen Behauptung bewiesen [17]).

Bezeichne $K_i^{(m_i)}(s, t)$ den „verarmten Kern"

$$K_i^{(m_i)}(s, t) = K_i(s, t) - \sum_{\nu=1}^{m_i} \frac{p_{i\nu}(s) \, q_{i\nu}(t)}{\lambda_{i\nu}}$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

und $K^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}(s, t, u_1, u_2, \cdots, u_n)$ den zusammenfügten Kern

$$K^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}(s, t, u_1, u_2, \cdots, u_n) =$$
$$= K_j^{(m_j)}(s - i + 1, t - j + 1) f_{ij}(s - i + 1, u_1, u_2, \cdots, u_n)$$
$$\text{für} \quad \begin{matrix} i - 1 \leqslant s < i \\ j - 1 \leqslant t < j \end{matrix}$$
$$(i, j = 1, 2, \cdots, n).$$

Zusatz zu Zusatz III. *Gibt es n natürliche Zahlen $m_1, m_2, \cdots, m_n$ von der Art, dass für alle n-tupel $\left(\bar{\varphi}_1(s), \bar{\varphi}_2(s), \cdots \cdots, \bar{\varphi}_n(s)\right)$ von stetigen Funktionen und alle quadratisch integrierbaren Funktionen $\varphi(s)$ des Intervalls* $(0, 1)$

$$\text{(d')} \quad \int_0^n \int_0^n K^{(m_1, m_2, \ldots, m_n)}\left(s, t, \bar{\varphi}_1(s), \bar{\varphi}_2(s), \cdots, \bar{\varphi}_n(s)\right) \varphi(s) \varphi(t) \, ds \, dt$$
$$\geqslant - k \int_0^n \varphi^2(s) \, ds \qquad (k < 1)$$

---

17) Wie der Gang des Beweises zeigt, braucht die Voraussetzung (d) nicht für alle quadratisch integrierbaren Funktionen $u(s)$ des Intervalles $(0, n)$ zu gelten. Es genügt, dass sie für die in (51) definierten Funktionen $u(s)$ erfüllt ist, die dadurch charakterisiert sind, dass ihr dem Intervall $i - 1 \leq s < i$ angehöriger Teil nach den Eigenfunktionen $q_{i\nu}(s)$ des Kernes $K_i(s, t)$ entwickelbar ist.

ist, so hat das Integralgleichungssystem (1) *genau ebensoviele Lösungen wie ein bestimmtes Gleichungssystem mit* $n\cdot(m_1+m_2+\cdots+m_n)$ *Zahlenunbekannten.*

Beweis. Nach Satz III hat das Gleichungssystem

$$\psi_i^{(m_i)}(s)+\int_0^1 K_i^{(m_i)}(s,t)f_i\Big(t,\sum_{\mu=1}^{m_1}y_{1\mu}\,p_{1\mu}(t)+\psi_1^{(m_1)}(t),\cdots$$
$$\cdots,\sum_{\mu=1}^{m_n}y_{n\mu}\,p_{n\mu}(t)+\psi_n^{(m_n)}(t)\Big)\,dt=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

bei beliebiger Wahl der Konstanten $y_{i\nu}$ genau ein Lösungssystem $\psi_i^{(m_i)}(s)=\psi_i^{(m_i)}(s,y_{11},y_{12},\cdots,y_{nm_n})$. Wegen der Aequivalenz der Systeme (1) und (41) entspricht daher jedem Lösungssystem $y_{i\nu}$ der $n.\ (m_1+m_2+\cdots+m_n)$ Gleichungen,

$$y_{i\nu}+\frac{1}{\lambda_{i\nu}}\int_0^1 f_i\Bigg(t,\sum_{\mu=1}^{m_1}y_{1\mu}\,p_{1\mu}(t)+\psi_1^{(m_1)}(t,y_{11},y_{12},\cdots,y_{n\,m_n}),\cdots$$
$$\cdots,\sum_{\mu=1}^{m_n}y_{n\mu}\,p_{n\mu}(t)+\psi_n^{(m_n)}(t,y_{11},y_{12},\cdots,y_{nm_n})\Bigg)\,q_{i\nu}(t)\,dt=0$$
$$\begin{pmatrix} i=1,2,\cdots,n \\ \nu=1,2,\cdots,m_i \end{pmatrix}$$

genau ein Lösungssystem

$$\psi_i(s)=\sum_{\mu=1}^{m_i}y_{i\mu}\,p_{i\mu}(s)+\psi_i^{(m_i)}(s,y_{11},y_{12},\cdots,y_{n\,m_n})$$

des Systemes (1).

Die Voraussetzung (d) des Satzes III kann auch folgendermassen ausgesprochen werden: Der grösste negative Eigenwerdes symmetrischen Teiles des Kernes $K(s,t,\overline{\varphi}_1(s),\overline{\varphi}_2(s),\cdots,\overline{\varphi}_n(s))$[18]

[18]) Unter dem „symmetrischen Teil der Funktion $f(s,t)$" verstehen wir die Funktion $\dfrac{f(s,t)+f(t,s)}{2}$.

ist für alle n-tupel $(\overline{\varphi}_1(s), \overline{\varphi}_2(s), \cdots, \overline{\varphi}_n(s))$ nicht grösser als $-\frac{1}{k}$.

Daraus ergeben sich leicht verschiedene Bedingungen für die Funktionen $f_i(s, u_1, u_2, \cdots, u_n)$, die hinreichend sind für die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Systeme (1).

So enthält z. B. der Satz III als Spezialfall einen Satz, der nur wenig von Satz II abweicht. Es lässt sich aus ihm folgern, dass das System (1) eine einzige Lösung besitzt, wenn die der Voraussetzung (c′) ganz ähnliche Bedingung

$$(c'') \qquad \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_{i1}^2} f_{ji}^2(s, u_1, u_2, \cdots, u_n) \leqslant k^2 < 1$$

$$\left(\begin{array}{c}\text{für } 0 \leqslant s \leqslant 1 \\ \text{und alle Werte der} \\ u_1, u_2, \cdots, u_n\end{array}\right)$$

erfüllt ist. Man leitet nämlich in ganz derselben Weise, wie die Ungleichung (40) aus der Voraussetzung (c′) gewonnen wurde, aus der Bedingung (c″) die Ungleichung

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} \int_0^1 \int_0^1 K_i(t, s) f_{ji}\left(t, \overline{\varphi}_1(t), \overline{\varphi}_2(t), \cdots, \overline{\varphi}_n(t)\right) \varphi_i(s) \varphi_j(t)\, ds\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant k \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \varphi_i^2(s)\, ds$$

ab, die in der Bezeichnungsweise dieses Paragraphen auch so geschrieben werden kann:

$$\left|\int_0^n \int_0^n K\left(s, t, \overline{\varphi}_1(s), \overline{\varphi}_2(s), \cdots, \overline{\varphi}_n(s)\right) ds\, dt\right| \leqslant k \int_0^n \varphi^2(s)\, ds.$$

Die Bedingung (c″) hat also die Voraussetzung (d) des Satzes III zur Folge und daraus ergibt sich die obige Behauptung.