Sur la forme de l'intégrale générale d'une équation différentielle du premier ordre

Par

T. PÉYOVITCH

1. Nous exposerons d'abord siccinctement les résultats de *Haentzschel* [1]).

L'expression

$$(1) \qquad (\alpha_1+\beta_1 u)^{h_1}(\alpha_2+\beta_2 u)^{h_2}(\alpha_3+\beta_3 u)^{h_3} e^{-\int \frac{\alpha_0+\beta_0 u}{\alpha_3+\beta_3 u}} = C e^{\sigma},$$

où α_i, β_i et σ sont de fonctions de x, h_i et C des constantes, est l'intégrale générale de l'équation

$$(2) \qquad (q_0+q_1 u+q_2 u^2)\frac{du}{dx} = p_0+p_1 u+p_2 u^2+p_3 u^3 .$$

Si l'on prend la dérivée logarithmique de l'expression (1), on obtient l'équation (2) dont les coefficients p_i et q_i sont (loc. cit.

$$\left\{\begin{aligned} q_0 &= \beta_1 h_1 \alpha_2 \alpha_3+\beta_2 h_2 \alpha_3 \alpha_1+\beta_3 h_3 \alpha_1 \alpha_2 , \\ q_1 &= \alpha_1 \beta_2 \beta_3 (h_2+h_3)+\alpha_2 \beta_3 \beta_1 (h_3+h_1)+\alpha_3 \beta_1 \beta_2 (h_1+h_2) , \\ q_2 &= \beta_1 \beta_2 \beta_3 (h_1+h_2+h_3) , \end{aligned}\right.$$

1) Journal für die reine und angewandte Mathematik, Band 112, 1893, p: 148.

$$
(3)\quad\left\{
\begin{aligned}
p_0 &= \sigma' \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 - h_1 \alpha'_1 \alpha_2 \alpha_3 - h_2 \alpha'_2 \alpha_3 \alpha_1 - h_3 \alpha'_3 \alpha_1 \alpha_2 ,\\
p_1 &= \sigma' (\alpha_1 \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \alpha_3 \beta_1) - h_1 \alpha'_1 (\alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2) - \\
&\quad - h_2 \alpha'_2 (\alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1) - h_3 \alpha'_3 (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) - h_1 \beta'_1 \alpha_2 \alpha_2 - \\
&\quad - h_2 \beta'_2 \alpha_1 \alpha_3 - h_3 \beta'_3 \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_0 (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) + \beta_0 \alpha_1 \alpha_2 ,\\
p_2 &= \sigma' (\beta_1 \beta_2 \alpha_3 + \beta_3 \beta_1 \alpha_2 + \beta_2 \beta_3 \alpha_1) - h_1 \beta'_1 (\alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2) - \\
&\quad - h_2 \beta'_2 (\alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1) - h_3 \beta'_3 (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) - h_1 \alpha'_1 \beta_2 \beta_3 - \\
&\quad - h_2 \alpha'_2 \beta_1 \beta_3 - h_3 \alpha'_3 \beta_1 \beta_2 + \beta_0 (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) + \alpha_0 \beta_1 \beta_2 ,\\
p_3 &= \sigma' \beta_1 \beta_2 \beta_3 + \beta_0 \beta_1 \beta_2 - h_1 \beta'_1 \beta_2 \beta_3 - h_2 \beta'_2 \beta_3 \beta_1 - h_3 \beta'_3 \beta_1 \beta_2 .
\end{aligned}\right.
$$

Posons $h_1 + h_2 + h_3 = 0$ ou $\beta_3 = 0$ on aura, d'après (3), $q_2 = 0$ et l'équation (2) devient

$$
(2') \qquad (q_0 + q_1\, u) \frac{du}{dx} = p_0 + p_1 u + p_2 u^2 + p_3 u^3 .
$$

Pour $h_3 = -(h_1 + h_2)$ l'expression (1) donne

$$
(1') \qquad \left(\frac{\alpha_1 + \beta_1 u}{\alpha_3 + \beta_3 u}\right)^{h_1} \left(\frac{\alpha_2 + \beta_2 u}{\alpha_3 + \beta_3 u}\right)^{h_2} e^{-\int \frac{\alpha_0 + \beta_0 u}{\alpha_3 + \beta_3 u} dx} = C e^{\sigma}
$$

et représente l'intégrale générale de l'équation (2'), dont les coefficients p_i et q_i sont donnés par les équations (3) avec $h_3 = -(h_1 + h_2)$.

Pour $\beta_3 = 0$ on peut poser encore, sans restriction de la généralité, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_0 = 0$ et on obtient l'expression

$$
(1'') \qquad (\alpha_1 + \beta_1 u)^{h_1} (\alpha_2 + \beta_1 u)^{h_2} e^{-\int \beta_0 u\, dx} = C e^{\sigma}
$$

qui est aussi l'intégrale générale de l'équation (2'), dont les coefficients p_i et q_i sont donnés par les équations (3) avec $\alpha_0 = 0$, $\alpha_3 = 1$, $\beta_3 = 0$ (loc. cit.).

2. Considérons encore l'expression

$$
(4) \qquad (\alpha_1 + \beta_1 u)^{h_1} (\alpha_3 + \beta_3 u)^{h_3}\, e^{-\frac{\alpha_0 + \beta_0 u}{\alpha_3 + \beta_3 u}} = C e^{\sigma}
$$

où α_i, β_i et σ, sont des fonctions de x, h_i et C des constantes. Si l'on prend la dérivée logarithmique on obtient l'èquation (2), dont les coefficients p_i $(i=0,1,2,3)$ et q_k $(k=0,1,2)$ sont des fonctions de $\alpha_i, \beta_i, \sigma$ et h_i (loc. cit.).

Posons $h_1+h_3=0$ ou $h_3=-h_1$, on a $q_2=0$ et l'expression (4) devient

$$\left(\frac{\alpha_1+\beta_1 u}{\alpha_3+\beta_3 u}\right)^{k_1} e^{-\frac{\alpha_0+\beta_0 u}{\alpha_3+\beta_3 u}} = Ce^{\sigma}$$

qui est l'intégrale générale de l'équation (2′).

* * *

3. Soit donnée l'équation différentielle

$$y'^2+2a_1 yy'+a_2 y^2+2a_0=0 \tag{5}$$

où a_i sont des fonctions de x, y' la dérivée de y par rapport à x. Si l'on fait le changement de fonction dans l'équation (5) en posant

$$y=\pm u\sqrt{-\frac{2a_0}{1+2a_1 u+a_2 u^2}}, \tag{6}$$

on obtient l'équation (2′)

$$(q_0+q_1 u)\frac{du}{dx}=p_0+p_1 u+p_2 u^2+p_3 u^3 \tag{2'}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} q_0=2a_0,\ q_1=2a_0 a_1,\ p_0=2a_0,\ p_1=4a_0 a_1-a'_0, \\ p_2=2a_0 a'_1+2a_0 a_2-2a'_0 a_1,\ p_3=a_0 a'_2-a'_0 a_2. \end{array}\right. \tag{7}$$

Inversement, si l'on pose dans l'équation (2′)

$$u=\frac{y}{-a_1 y\pm\sqrt{(a_1^2-a_2)\,y^2-2a_0}}, \tag{6'}$$

dont les coefficients sont donnés par les relations (7), on obtient l'équation (5).

Cosidérons maintenant les relation (7). Cettes relations donnent, d'une part, les coefficients a_i de l'équation (5), c'est-à-dire

$$a_0=\frac{p_0}{2},\quad a_1=\frac{p'_0+2p_1}{4p_0},$$

$$a_2=\frac{p_2}{p_0}+\frac{p_0'^2}{2p_0^2}-\frac{p'}{2p_0}-\frac{p''_0}{4p_0}+\frac{p'_0 p_1}{p_0^2};$$

d'autre part les trois relations entre les coefficients p_i et q_i, c'est-à-dire

$$(8)\quad \begin{cases} q_0 = p_0, \quad q_1 = \dfrac{p'_0 + 2p_1}{4}, \\ p_3 = \dfrac{p_0}{2}\left(\dfrac{p_2}{p_0} + \dfrac{p'^2_0}{2p_0^2} - \dfrac{p'_1}{2p_0} - \dfrac{p''_0}{4p_0} + \dfrac{p'_0 p_1}{p_0^2}\right)' - \\ \qquad - \dfrac{p'_0}{2}\left(\dfrac{p_2}{p_0} + \dfrac{p'^2_0}{2p_0^2} - \dfrac{p'_1}{2p_0} - \dfrac{p''_0}{4p_0} + \dfrac{p'_0 p_1}{p_0^2}\right). \end{cases}$$

Les relations ci-dessus nous montre que chaque équation de la forme (2′), dont les coefficients p_i et q_i satisfont aux relation (8), peut être ramenée, par la substitution (6′), à l'équation (5).

Prenons, par exemple, l'expression (1′) qui représente l'intégrale générale de l'équation (2′), dont les coeficients p_i et q_i sont donnés par les relations (3) avec $h_3 = -(h_1 + h_2)$. Si l'on pose dans l'expression (1′)

$$(6')\qquad u = \frac{y}{-a_1 y \pm \sqrt{(a_1^2 - a_2)\, y^2 - 2a_0}}$$

on obtient *la forme de l'intégrale générale de l'équation* (5), *sous les conditions* (8) *en y remplaçant les coefficients p_i et q_i par les valeurs exprimées par les équations* (3) *avec* $h_3 = -(h_1 + h_2)$.

Prenons, comme exemple l'équation

$$(9)\qquad y'^2 + yy' + y^2 + 1 = 0,$$

c'est-à-dire l'équation (5) où l'on a

$$(9')\qquad 2a_0 = 2a_1 = a_2 = 1 .$$

La sibstitution (6), qui devient alors

$$(10)\qquad y = \pm u \sqrt{-\frac{1}{1 + u + u^2}},$$

transforme l'équation (9) en équation

$$(11)\qquad \left(1 + \frac{1}{2}\, u\right)\frac{du}{dx} = 1 + u + u^2,$$

dont l'intégrale générale est

$$(12)\quad \left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}+u\right)^{\frac{1-\sqrt{-3}}{4}}\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}+u\right)^{\frac{1+\sqrt{-3}}{4}}=Ce^{x}.$$

Si 'on pose, d'après (6') et (9'), dans l'expression ci-dessus

$$u=\frac{2y}{-y\pm\sqrt{-3y^2-4}}\ ,$$

on obtient l'intégrale générale de l'équation (9)

$$(12')\quad \left(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}+\frac{2y}{-y\pm\sqrt{-3y^2-4}}\right)^{\frac{1-\sqrt{-3}}{4}}$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}+\frac{2y}{-y\pm\sqrt{-3y^2-4}}\right)^{\frac{1+\sqrt{-3}}{4}}=Ce^{x}.$$

L'équation (11) est cas particulier de l'équation (2') pour $p_3=0$, c'est-à-dire pour $\beta_0=0$, et, par conséquent, l'intégrale (12) est cas particulier de l'integrale (1'') pour $\beta_0=0$.

Il est bien connu que l'équation (5) peut être ramenée à la forme canonique

$$(13)\qquad Y'^2+Y^2=f(X)$$

par la substitution

$$(14)\qquad y=Ye^{-\int a_1 dx}\ ,\qquad \frac{dX}{dx}=\sqrt{a_2-a_1^2}\ .$$

Il en résulte que l'intégrale générale de l'équation (13) s'obtient par la substitution (14) dans l'intégrale générale de l'équation (5)