Über einen Satz von H. Heilbronn und E. Landau

Von

J. KARAMATA

Herrn Professor Edmund Landau
zu seinem 60-sten Geburtstag — 14 Februar 1937 — gewidmet

Eine der allgemeinsten Fassungen des von E. Landau vor 30 Jahren entdeckten Satzes[1]) ist durch den folgenden, von Heilbronn-Landau[2]) bewiesenen Satz erlangt:

Sei

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n-1} < \lambda_n \to \infty \ , \ n \to \infty \ ,$$

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \ \textit{konvergent für} \ \ \sigma > 1 \ , \ s = \sigma + it \ ,$$

$$a_n \geqq 0 \ , \ n = 1, 2, 3, \cdots ,$$

---

[1]) E. Landau, Beitrag zur analytischen Zahlentheorie. Rend. Circ. Mat. Palermo, **26**,169-302 (1908). „Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ konvergent für $\sigma > 1$ und $f(s) - \frac{g}{s-1}$ regulär auf $\sigma = 1$, so ist $\sum_{n=1}^{x} a_n = gx + o(x)$ — falls $f(s) = O(t \ )$ gleichmässig für $\sigma \geqq 1$ gilt —."

[2]) H. Heilbronn und E. Landau, Bemerkungen zur vorstehenden Arbeit von Herrn Bochner. Math. Zeit **27**, 10-16 (1933). Vergl. auch E. Landau, Über Dirichletsche Reihen, Göttinger Nachrichten, 1932, 525—527.

und

$$f(s) - \frac{1}{s-1} \to h(t) \quad \textit{gleichmässig für} \quad |t| < \lambda \quad \textit{bei} \quad \sigma \to 1\,,$$

dann ist

$$\limsup_{x=\infty} \Big| e^{-x} \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n - 1 \Big| < \Omega(\lambda)\,,$$

wobei

$$\Omega(\lambda) \to 0 \quad \textit{falls} \quad \lambda \to \infty\,.$$

Wird in diesem Satze

$$K(x) = e^{-x} \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n - 1$$

gesetzt, und s durch $s+1$ ersetzt, so folgt daraus der Satz:

Sei

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-su} K(u)\, du \quad \textit{konvergent für} \quad \sigma > 0\,,$$

$$e^x \{ K(x) + 1 \} \ \textit{nicht abnehmend}\,,$$

und

$$F(s) \to k(t) \quad \textit{gleichmässig für} \quad |t| < \lambda \quad \textit{bei} \quad \sigma \to 0\,,$$

dann ist

$$\limsup_{x=\infty} |K(x)| < \Omega(\lambda) \to 0 \quad \textit{bei} \quad \lambda \to \infty\,.$$

In diesem Satze kann die Bedingung, dass $e^x \{ K(x) + 1 \}$ nicht abnimmt, durch eine, bei den Sätzen Tauberscher Art übliche Konvergenzbedingung erweitert werden, und gleichzeitig die gleichmässige Konvergenz von $F(s)$ nur durch die Beschränktheit seines Realteiles ersetzt werden[3]).

Satz. 1. *Sei* $K(u)$ *reel,* $K(u)=0$ *für* $u<0$, *und*

$$(1)\qquad F(s)=\int_0^\infty e^{-su}K(u)\,du \quad \textit{konvergent für} \quad \sigma>0\,;$$

ist

$$(2)\qquad |\varphi_\sigma(t)|=|R\{F(s)\}|<M \quad \textit{für} \quad 0<\sigma<\sigma_0\,,\ |t|<2\lambda\,,$$

und für ein $c\geqq 0$,

$$(3)\qquad \lim_{u=\infty}\inf\ \underset{u\leqq u'\leqq u+h}{Min}\ e^{-cu}\{e^{cu'}K(u')-e^{cu}K(u)\}=-w(h)\ ^{4})$$

mit $0<w(h)\to 0$ *bei* $h\to 0$, *so ist*

$$(4)\qquad \lim_{u=\infty}\sup|K(u)|<\Omega(\lambda)\to 0\,,\ \lambda\to\infty\,.$$

Bemerkung. Es ist zuletzt

$$(5)\qquad K(u)>-M'\,.$$

Für $c>0$ ist dies eine unmittelbare Folge von (3)[5]); für

---

3) Dass die gleichmässige Konvergenz von $F(s)$ durch die Beschränktheit von $F(s)$ ersetzt werden kann folgt auch aus einem Satz von Fatou [Sur les lingnes singulières des fonctions analytiques, Bull. Soc. Math. France, **41**, 113—119 (1913)], weil dann $\lim\limits_{\sigma=0}\int\limits_0^t F(\sigma+ti)\,dt$ gleichmässig und $\lim\limits_{\sigma=0}F(\sigma+ti)$ fast überall vorhanden ist.

4) Hier ist die Funktion e^{cu} speciell gewählt; sie kann ohne wesentlichen Veränderungen des Beweises durch eine Funktion $\rho(u)$ ersetzt werden welche nicht abnimmt und nur die Bedingung $\lim\limits_{u=\infty}\sup\rho(u+h)/\rho(u)\to 1$, bei $h\to 0$, erfüllt.

5) Ist o. B. d. A. $h=1$, so ist nach (3)

$$e^{-vc}K(u-v)-e^{-(v+1)c}K(u-v-1)>-we^{-vc},$$

also indem von $v=0$ bis $v=[u]-1$ addiert wird

$$K(u)>-w(1+e^{-c}+e^{-2c}+\ldots+e^{-([u]-1)c})+e^{-[u]c}K(u-[u])\,;$$

was für $c=o$ nur $K(u)>-w[u]+K(u-[u])$ liefert.

$c=0$ folgt (5) aus (2) und (3), wie dies aus dem nachstehenden Satz II hervorgeht.

Hilfsatz. *Aus* (1) , (2) *und* (5) *folgt*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K(x+t)\left(\frac{\sin \lambda t}{\lambda t}\right)^2 dt \to 0 \ , \ x \to \infty \ . \tag{6}$$

Beweis. Weil

$$\frac{1}{2\eta}\int_{-2\eta}^{2\eta} e^{yti}\left(1-\frac{|t|}{2\eta}\right) dt = \left(\frac{\sin \eta y}{\eta y}\right)^2 = s_2(\eta y)$$

ist, so folgt aus (1)

$$\int_{-2\eta}^{2\eta} e^{xti}\left(1-\frac{|t|}{2\eta}\right) F(\sigma+ti)\,dt = 2\eta\int_0^{\infty} e^{-\sigma u} K(u)\, s_2\{\eta(x-u)\}\,du,$$

also

$$\int_{-2\eta}^{2\eta} \cos xt \left(1-\frac{|t|}{2\eta}\right) F(\sigma+ti)\,dt =$$

$$= \eta\int_0^{\infty} e^{-\sigma u} K(u)\left[\, s_2\{\eta(x-u)\} + s_2\{\eta(x+u)\}\right] du\,,$$

d. h.

$$2\int_0^{2\eta} \cos xt \left(1-\frac{t}{2\eta}\right) \varphi_\sigma(t)\,dt = \tag{7}$$

$$= \eta\int_0^{\infty} e^{-\sigma u} K(u)\left[\, s_2\{\eta(x-u)\} + s_2\{\eta(x+u)\}\right] du\ .$$

Wegen (2) ist die linke Seite von (7) beschränkt falls $0 \leqslant \eta \leqslant \lambda$, also auch

$$\int_0^\infty e^{-\sigma u} K(u)\, s_2(\eta u)\, du \quad \text{bei} \quad \sigma \to 0\,,$$

woraus, wegen (5), d. h. $K(u) + M' > 0$, die Konvergenz von

$$\int_0^\infty K(u)\, s_2(\eta u)\, du \quad \text{für} \quad 0 \leqslant \eta \leqslant \lambda\,,$$

folgt. Dies ergibt, wegen $K(u)+M'>0$, die Konvergenz von

$$\int^\infty K(u)\, \frac{du}{u^2}\,, \tag{8}$$ [6]

und wegen (7) mit $x=0$, diejenige von

$$\int_0^{2\eta} (2\eta - t)\, \varphi_\sigma(t)\, dt = \int_0^{2\eta} dt \int_0^t \varphi_\sigma(\xi)\, d\xi \quad \text{bei} \quad \sigma \to 0$$

für $0 \leqslant \eta \leqslant \lambda$; da aber, nach (2), die Funktion

$$\int_0^{2\eta} dt \int_0^t \{M + \varphi_\sigma(\xi)\}\, d\xi$$

konvex ist, so ist auch

$$\lim_{\sigma=0} \int_0^t \varphi_\sigma(\xi)\, d\xi = \Phi(t)$$

---

[6]) weil dann, $u^2 f(u) = K(u) + M'$ gesetzt, das Integral $\int_a^\infty f(u)\, \sin^2 \eta u\, du$ für $o \leqq \eta \leqq \lambda$ gleichmässig konvergiert, also

$$\frac{\lambda}{2} \int_a^m f(u)\, du - \int_a^m f(u)\, \frac{\sin 2\lambda u}{4u}\, du = \int_o^\lambda d\eta \int_a^m f(u)\, \sin^2 \eta u\, du \to \int_o^\lambda d\eta \int_a^\infty f(u)\, \sin^2 \eta u\, du, \; m \to \infty\,.$$

in jeder Stetigkeitsstelle $t \leqslant 2\lambda$ von $\Phi(t)$ vorhanden. Also

$$\int_0^{2\eta} \cos xt\left(1-\frac{t}{2\eta}\right)\varphi_\sigma(t)\,dt \to \int_0^{2\eta} \cos xt\left(1-\frac{t}{2\eta}\right)d\{\Phi(t)\}\ ,\ \sigma\to 0\ ;$$

da wegen (2) $\Phi(t)$ absolut stetig ist und somit der rechtsstehende Ausdruck als Fourierkonstante $=o(1)$ ist, bei $x\to\infty$. so folgt daraus wegen (7) für $\eta=\lambda$, dass

$$\int_0^\infty K(u)[s_2\{\lambda(x-u)\}+s_2\{\lambda(x+u)\}]du \to 0\ ,\ x\to\infty\ .$$

Daraus folgt aber die Behauptung (6), weil wegen (5) und der Konvergenz von (8)

$$\int_0^\infty K(u)s_2\{\lambda(x+u)\}du \to 0\ ,\ x\to\infty\ .$$

Beweis des Satzes I, d. h. *dass* (4) *aus* (3), (5) *und* (6) *folgt.*

Sei in (3) $h={}^1/\sqrt{\lambda}$ gesetzt, und mit $\Omega_i(\lambda)$, $i=1,2,3,4$, positive Funktionen von λ bezeichnet welche $=o(1)$ sind, bei $\lambda\to\infty$.

Wegen (5) und (6) ist

$$\lambda\int_{h}^{h} K(x+t)s_2(\lambda t)\,dt < \lambda\int_{-\infty}^{\infty}\{K(x+t)+M'\}s_2(\lambda t)\,dt - \lambda M'\int_{-h}^{h} s_2(\lambda t)\,dt =$$

$$< 2M'\int_{\sqrt{\lambda}}^{\infty} s_2(t)\,dt + o(1) = \Omega_1(\lambda)+o(1)\ ,\ x\to\infty\ .^{7)}$$

---

[7]) Mit $o(1)$, falls es rechts bzw. links von $>$ steht, bezeichne ich eine positive bzw. negative mit $1/x$ gegen Null strebende Grösse.

Also ist, wegen (3)

$$\lambda K(x-h)\int_{-h}^{h} e^{-ct}\, s_2(\lambda t)\, dt <$$

$$< -\lambda\int_{h}^{-h} e^{-c(x-h)}\{e^{c(x+t)}K(x+t) - e^{c(x-h)}K(x-h)\}e^{-ct}s_2(\lambda t)\, dt +$$

$$+ e^{ch}\Omega_1(\lambda) + o(1)$$

$$< \lambda\int_{-h}^{h} w(t+h)e^{-ct}s_2(\lambda t)\,dt + e^{ch}\Omega_1(\lambda) + o(1)\ ,\ x\to\infty\ ,$$

d. h.

$$\text{(9)}\qquad \limsup_{x=\infty} K(x) < w(2h) + e^{2ch}\Omega_1(\lambda) \Big/ 2\int_0^{\sqrt{\lambda}} s_2(t)\,dt = \Omega_2(\lambda).$$

Insbesondere ist, zuletzt

$$K(x) < M''\ ,$$

so dass

$$\lambda\int_{-h}^{h} K(x+t)s_2(\lambda t)\,\mathrm{dt} > \lambda\int_{-\infty}^{\infty}\{K(x+t) - M''\}\, s_2(\lambda t) + \lambda M''\int_{-h}^{h} s_2(\lambda t)\,dt =$$

$$> -2M''\int_{\sqrt{\lambda}}^{\infty} s_2(t)\,dt + o(1) = -\Omega_3(\lambda) + o(1)\ ,\ x\to\infty\ ,$$

ist. Wegen (3) ist weiter

$$\lambda K(x+h)\ e^{ch}\int_{-h}^{h} e^{-ct}s_2(\lambda t)\,dt >$$

$$>\lambda\int_{-h}^{h} e^{-c(x+t)}\{e^{c(x+h)}K(x+h)-e^{c(x+t)}K(x+t)\}s_2(\lambda t)dt-\Omega_3(\lambda)+o(1)$$

$$>-\lambda\int_{-h}^{h} w(h-t)s_2(\lambda t)dt-\Omega_3(\lambda)+o(1)\ ,\ x\to\infty,$$

d. h.

$$\liminf_{x=\infty}\ K(x)>-w(2h)-\Omega_3(\lambda)\Big/2\int_0^{\sqrt{\lambda}} s_2(t)\,dt=-\Omega_4(\lambda)\ ,$$

was mit (9) die Behauptung (4) liefert.

Satz II. *Aus* (2), *sogar aus* $\varphi_\sigma(t)<M$, *und*

(10) $$K(0)=1\ ,\ K(u')-K(u)>-1 \text{ für } 0\leqq u\leqq u'\leqq u+1\,,$$

folgt

(11) $$K(u)=O(1),\quad u\to\infty\,.$$[8]

Aus (10) folgt

(12) $$K(y)-K(x)>-y+x-1 \text{ für } y\geqq x\geqq 0\,,$$

also für $x=0$

(13) $$K(y)>-y \quad \text{für} \quad y\geqq 0\,.$$

Hilfsatz. *Aus* $\varphi_\sigma(t)<M$ *für* $o<\sigma<\sigma_0$, $|t|<4$, *und* (13) *folgt*

(14) $$\int_{-\infty}^{\infty} K(x+t)\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt=O(1)\,,x\to\infty\ .$$

---

[8]) Dieser Satz ist ein O—Umkehrsatz; doch ist der Satz I auch durch ganz dieselbe Beweisanordnung zu erhalten, falls nur die Voraussätzung (10) durch (3) ersetzt wird.

Beweis. Sei $t=t_1+t_2+t_3+t_4$ und

$$s_4(y)=\left(\frac{\sin t}{t}\right)^4=2^{-4}\int_{+1}^{-1}\cdots\int e^{yti}\,dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4\,,$$

dann ist

$$2^{-4}\int_{-1}^{+1}\cdots\int e^{xti}F(\sigma+ti)\,dt_1dt_3dt_3dt_4=\int_0^\infty e^{-\sigma u}K(u)\,s_4(x-u)\,du\,,$$

und

$$(15)\qquad 2^{-3}\int_{-1}^{+1}\cdots\int \cos xt\,\varphi_\sigma(t)\,dt_1dt_2dt_3dt_4=$$

$$=\int_0^\infty e^{-\sigma u}K(u)\,\{s_4(x-u)+s_4(x+u)\}\,du\,.$$

Für $x=0$ ist, wegen $\varphi_\sigma(t)<M$, der rechtsstehende Ausdruck von (15) nach oben beschränkt, woraus wegen (13) d.h. $K(u)+u>0$, die Konvergenz des Integrals

$$\int_0^\infty K(u)\,s_4(u)\,du$$

folgt. Also konvergiert auch

$$\int_{-1}^{+1}\cdots\int \varphi_\sigma(t)\,dt_1dt_2dt_3dt_4 \quad \text{bei} \quad \sigma\to 0\,,$$

so dass, wegen $\varphi_\sigma(t)<M$,

$$\left|\int_{-1}^{+1}\cdots\int \cos xt\,\varphi_\sigma(t)\,dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4\right| \leqq$$

$$=\left|\int_{-1}^{+1}\cdots\int \cos xt\{M-\varphi_o(t)\}dt_1dt_2dt_3dt_4-M\int_{-1}^{+1}\cdots\int \cos xt\,dt_1dt_2dt_3dt_4\right|$$

$$<2^5M-\int_{-1}^{+1}\cdots\int \varphi_o(t)\,dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4<M_1$$

ist, was mit (13) und (15)

$$\int_0^\infty K(u)\{s_4(x-u)+s_4(x+u)\}\,du=O(1)\ ,\quad x\to\infty\ ,$$

liefert. Daraus folgt aber die Behauptung (14), weil wegen (13) und der Konvergenz von $\int_0^\infty K(u)\{s_4(x+u)\}\,du$ dieses Integral $=o(1)$ ist, bei $x\to\infty$.

Beweis des Satzes II, d. h. *dass* (11) *aus* (12) *und* (14) *folgt.*

Sei

$$\overline{K}(x)=\underset{u\leqq x}{Max}\{-K(u)\}\ ^{9)}$$

gesetzt. Dann ist wegen (14) und (12)

$$M_2>\int_{-\infty}^0 K(x+t)\,s_4(t)\,dt+\int_0^\infty K(x+t)\,s_4(t)\,dt>$$

$$>-\overline{K}(x)\int_{-\infty}^0 s_4(t)\,dt+K(x)\int_0^\infty s_4(t)\,dt-\int_0^\infty s_4(t)(t+1)\,dt\,;$$

d. h.

(16) $$K(x)<\overline{K}(x)+M_3\,.$$

[9]) Hier ist *Max* als obere Schranke gemeint, welche wegen $-K(u)<u$ vorhanden ist.

Daraus folgt, da $\overline{K}(x)$ ebenfalls die Bedingung

$$\overline{K}(y) - \overline{K}(x) + < x - y + 1 \quad \text{für} \quad y \geqq x \text{ [10])}$$

erfüllt, wegen (14) und (12),

$$-M_4 < \int_{-\infty}^{1} K(x+t)\, s_4(t)\, dt + \int_{1}^{\infty} K(x+t) s_4(t)\, dt <$$

$$< K(x+1) \int_{-\infty}^{1} s_4(t)\, dt + \int_{-\infty}^{1} s_4(t)\,(2-t)\, dt + \int_{1}^{\infty} \overline{K}(x+t)\, s_4(t)\, dt +$$

$$+ M_3 \int_{1}^{\infty} s_4(t)\, dt$$

$$< K(x+1) \int_{-\infty}^{1} s_4(t) dt + \overline{K}(x+1) \int_{1}^{\infty} s_4(t) dt + \int_{-\infty}^{1} s_4(t)\,(2-t)\, dt +$$

$$+ \int_{1}^{\infty} s_4(t)\, t dt + M_3 \int_{1}^{\infty} s_4(t)\, dt\,,$$

d. h.

$$-K(x+1) \int_{-1}^{\infty} s_4(t)\, dt < \overline{K}(x+1) \int_{1}^{\infty} s_4(t)\, dt + M_5\,.$$

Da aber $\overline{K}(x)$ die kleinste, nicht abnehmende Funktion bedeutet welche $\geqq - K(x)$ ist, so kann links $-K(x+1)$ durch $\overline{K}(x+1)$ ersetzt werden, woraus folgt dass

$$\overline{K}(x+1) < M_5 \Big/ \int_{-1}^{1} s_4(t)\, dt$$

ist, was mit (16) die Behauptung (11) liefert.

---

10) Denn, ist y' die untere Schranke der Zahlen $u < y$ für welche $\overline{K}(u) = \overline{K}(y)$ ist, $\varepsilon > o$ und $y \leqq y'' \leqq y'$, so ist, falls $y' \leqq x$ ist,

$$\overline{K}(y) - \overline{K}(x) < K(y'') - \overline{K}(x) + \varepsilon < -K(y'') + K(x) + \varepsilon$$
$$< y'' - x + 1 + \varepsilon \leqq y - x + 1 + \varepsilon\,.$$