Une généralisation d'un théorème de M. Sierpinski

Par

STANISLAW RUZIEWICZ

D'après un théorème de M. Sierpiński[1]) l'hypothèse du continu est équivalente à la proposition suivante: Il existe une décomposition du plan en deux ensembles, dont un est au plus dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'abscisses et l'autre est au plus dénombrable sur chaque parallèle à l'axe d'ordonnées.

Ce théorème de M. Sierpiński peut être évidemment exprimé de la façon suivante:

Pour que le plan puisse être décomposé en deux ensembles, dont un est de puissance $<\aleph_1$ sur chaque parallèle à l'axe d'abscisses et l'autre est de puissance $<\aleph_1$ sur chaque parallèle à l'axe d'ordonnées, il faut et il suffit qu'on ait $2^{\aleph_0}\leqslant\aleph_1$.

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant qui peut être regardé comme une généralisation du théorème énoncé tout à l'heure (et dont ce dernier est un cas particulier pour $\mathfrak{m}=2^{\aleph_0}$, $\mathfrak{n}=\aleph_1$):

Théorème 1. *Soit M un ensemble infini quelconque de puissance $\mathfrak{m}$. Pour que son carré combinatoire $M\times M$ puisse être décomposé en deux ensembles dont un est de puissance $<\mathfrak{n}$ sur toute parallèle à l'axe d'abscisses*[2]) *et l'autre est de puissance $<\mathfrak{n}$ sur*

---

[1]) *Bull. Acad. Sc. Cracovie*, Séance du 24 Février 1919; *Fund. Math.* V, p. 179; *C. R. Soc. Sc. Varsovie* XXV, p. 9—10.

[2]) On appelle „parallèle à l'axe d'abscisses" du carré combinatoire $M\times M$ (et on désigne par $y=a$) l'ensemble de tous les systèmes (x, a), où a est un élément donné et x un élément quelconque de l'ensemble M.

toute paralèlle à l'axe d'ordonnées, il faut et il suffit qu'on ait $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$.

Dans la démonstration de ce théorème j'utilise la méthode de démonstration de M. Sierpiński.

Démonstration:

1. *La condition est nécessaire.* Je prouverai même une proposition plus forte que voici (dont nous ferons usage plus loin):

Théorème 2. *Soit M un ensemble infini de puissance $\mathfrak{m}$ et soit $\mathfrak{n}$ un nombre cardinal $< \mathfrak{m}$. Si A et B sont deux sous-ensembles du carré combinatoire $M \times M$, tels que A est de puissance $\leqslant \mathfrak{n}$ sur toute parallèle à l'axe d'abscisses et B est de puissance $< \mathfrak{n}$ sur toute parallèle à l'axe d'ordonnées, l'ensemble $Q = M \times M -$ $-(A+B)$ est de puissance $\mathfrak{m}$.*

Démonstration. Admettons que la puissance $\mathfrak{q}$ de l'ensemble Q est $< \mathfrak{m}$. Soit N un sous-ensemble de M de puissance $\mathfrak{n}$. Pour tout élément a de N la parallèle $y=a$ (contenue dans $M \times M$) contient au plus $\mathfrak{n}$ éléments de l'ensemble A (d'après la propriété de cet ensemble) et au plus $\mathfrak{q}$ éléments de Q (puisque $\overline{\overline{Q}}=\mathfrak{q}$). Soit T l'ensemble de tous les éléments de $A+Q$ qui sont contenus dans une quelconque de parallèle $y=a$, où $a \varepsilon N$: d'après $\overline{\overline{N}}=\mathfrak{n}$ la puissance de l'ensemble T est évidemment $\leqslant (\mathfrak{n}+\mathfrak{q})\,\mathfrak{n}$, donc $< \mathfrak{m}$, puisque $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$ et $\mathfrak{q} < \mathfrak{m}$. La projection de l'ensemble T sur l'axe d'abscisses (c'est-à-dire l'ensemble de tous les éléments x de M pour lesquels il existe au moins un élément y de M tel que $(x, y) \varepsilon T$) est donc aussi de puissance $< \mathfrak{m}$ et (vu que $\overline{\overline{M}}=\mathfrak{m}$) il existe un élément x_0 de M qui n'appartient pas à cette projection, c'est-à-dire tel qu'on a

$$(x_0, y) \text{ non } \varepsilon\, T \text{ pour } y \,\varepsilon\, M.$$

D'après la définition de l'ensemble T on a donc

$$(x_0, a) \text{ non } \varepsilon\, A+Q \text{ pour } a \,\varepsilon\, N,$$

donc, d'après $Q = M \times M - (A+B)$:

$$(x_0, a) \,\varepsilon\, B \text{ pour } a \,\varepsilon\, N,$$

contrairement à la propriété de l'ensemble B (puisque $\overline{\overline{N}}=\mathfrak{n}$).

L'hypothèse qu'on a $\overline{\overline{Q}} < m$ implique donc une contradiction et le théorème 2 se trouve démontré.

2. *La condition est suffisante.* Soit M un ensemble infini de puissance m et soit φ le plus petit nombre ordinal (transfini) correspondant à la puissance m. Soit

$$(1) \qquad x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots x_\omega,\quad x_{\omega+1}, \ldots x_\xi, \ldots (\xi < \varphi)$$

une suite transfinie formée de tous les éléments de l'ensemble M.

Désignons maintenant par A l'ensemble de tous les systèmes (x_α, x_β) où $x_\alpha \varepsilon M$, $x_\beta \varepsilon M$ et $\alpha < \beta$ et posons $B \doteq M \times M - A$. Je dis que $M \times M = A + B$ est la décomposition qui vérifie les conditions du théorème 1 pour tout nombre cardinal $n \geqslant m$.

En effet, soit n un tel nombre. Soit $y = b$ une parallèle à l'axe d'abscissos contenue dans $M \times M$. Comme b est un élément de M, il existe, d'après la définition de la suite transfinie (1), un nombre ordinal $\beta < \varphi$, tel que $b = x_\beta$. Les éléments de l'ensemble A situés sur la parallèle $y = b$ sont évidemment les systèmes (x_α, x_β), où $\alpha < \beta$: leur ensemble est donc de puissance $\leqslant \beta$, donc $< m \leqslant n$ (puisque $\beta < \varphi$ et φ est le plus petit nombre cardinal de puissance m. Or, soit $x = a$ une parallèle à l'axe d'ordonnées contenue dans $M \times M$. Comme $a \varepsilon M$, il existe un nombre ordinal $\alpha < \varphi$, tel que $a = x_\alpha$. Les éléments de l'ensemble B situés sur la parallèle $x = a$ sont, comme on voit sans peine, les systèmes (x_α, x_β), où $\beta \leqslant \alpha$: comme $\alpha < \varphi$, nous concluons comme plus haut que leur ensemble est de puissance $< n$.

La décomposition $M \times M = A + B$ jouit donc des propriétés désirées et le théorème 1 est démontré.

Appelons maintenant *courbe* continue dans le carré combinatoire $M \times M$ tout ensemble des éléments (x, y) de $M \times M$ qui satisfont soit à l'équation $y = f(x)$, soit à l'équation $x = f(y)$, où $f(t)$ est une fonction donnée quelconque définie dans l'ensemble M, dont les valeurs appartiennent également à cet ensemble. Il résulte sans peine du théorème 1 (pour $m = \aleph_\alpha$, $n = \aleph_{\beta+1}$) ce

Théorème 3. *Soit M un ensemble infini quelconque de puissance $\aleph_\alpha$. Pour que le carré combinatoire $M \times M$ soit une somme de $\aleph_\beta$ courbes, il faut et il suffit qu'on ait $\alpha \leqslant \beta + 1$.*

Le théorème 3 présente une généralisation de l'énoncé que M. Lusin a donné au théorème de M. Sierpiński[1]) (dont celui est un cas particulier pour $\beta = 0$, $\aleph_\alpha = 2^{\aleph_0}$).

Je deduirai maintenant du théorème 2 une proposition de la théorie des relations.

Soit M un ensemble infini de puissance $\mathfrak{m}$ (formé d'éléments quelconques) et soit $\mathfrak{n}$ un nombre cardinal $\geqslant \aleph_0$. Désignons par $\mathfrak{R}_\mathfrak{n}$ la classe de toutes les relations R entre les éléments de l'ensemble M pourvues de la propriété suivante:

Si $R \varepsilon \mathfrak{R}_\mathfrak{n}$ et $x_0 \varepsilon M$, la puissance de l'ensemble Y_0 de tous les éléments y de M pour lesquels on a $x_0 R y$, est $< \mathfrak{n}$.

Si pour une relation $R \varepsilon \mathfrak{R}_\mathfrak{n}$ et pour deux éléments donnés x et y de M on a à la fois

$$x \text{ non } Ry \text{ et } y \text{ non } Rx,$$

nous dirons que les éléments x et y sont *indépendants* relativement à la relation R.

Je prouverai ce

Théorème 4. *Soit M un ensemble infini de puissances $\mathfrak{m}$ et soit $\mathfrak{n}$ un nombre cardinal donné $\geqslant 1$. Pour qu'il existe pour toute relation $R \varepsilon \mathfrak{R}_\mathfrak{n}$ au moins un système de deux éléments de M indépendants relativement à la relation R, il faut et il suffit qu'on ait $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$; l'ensemble de tous tels systèmes a alors la puissance $\mathfrak{m}$.*

Démonstration.

1. *La condition est nécessaire.*

Soit en effet $\overline{\overline{M}} = \mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$ et soit (1) une suite transfinie du plus petit type ordinal φ formée de tous les éléments de l'ensemble M. Définissons la relation R entre les éléments de M de la façon suivante: xRy signifie que $y = x$ ou bien que y précède x dans la suite (1).

On voit sans peine que, pour tout élément x de M, l'ensemble de tous les éléments y de M tels que xRy, est de puissance $< \mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{n}$, donc $< \mathfrak{n}$. La relation R appartient donc à la classe $\mathfrak{R}_\mathfrak{n}$. Or, quels que soient deux éléments x et y de M, on a évidemment soit xRy, soit yRx: il n'existe donc aucun

[1]) *C. R. Soc. Sc. Varsovie* XXV, p. 11.

système de deux éléments de M indépendants relativement à la relation R.

2. *La condition est suffisante.*

Soit M un ensemble infini de puissance m et soit n un nombre cardinal $< m$. Soit M une relation entre les éléments de M, telle que $R \varepsilon \mathfrak{R}_n$. Désignons par A, resp. par B l'ensemble de tous les systèmes (x, y) de deux éléments de M, tels que $y R x$, resp. tels que $x R y$. Comme $R \varepsilon \mathfrak{R}_n$, on voit sans peine que les ensembles A et B satisfont aux conditions du théorème 2. D'après ce théorème l'ensemble $Q = M \times M - (A + B)$ est donc de puissance m. Or, si $(x, y) \varepsilon Q$, on a (x, y) non εA et (x, y) non εB, donc y non $R x$ et x non $R y$, c'est-à-dire tout système (x, y) de l'ensemble Q est un système de deux éléments de M indépendant relativement à la relation R. L'ensemble de tels systèmes est donc de puissance m, c. q. f. d.

Le théorème 4 est ainsi démontré. Voici maintenant un problème qui s'impose:

Problème. *Soit M un ensemble infini de puissance m et soit n un nombre cardinal donné $< m$. Quelle est la condition nécessaire et suffisante (pour m et n) qu'il existe pour toute relation $R \varepsilon \mathfrak{R}_n$ un sous-ensemble H de M de puissance m tel que tout deux éléments de H sont indépendants relativements à la relation R?*

Le cas particulier de ce problème a été traité récemment notamment pour $n = \aleph_0$ par M. Sierpiński et par M[lle] Sophie Piccard.[1])

Pour m quelconque $\geqslant \aleph_0$ M. Sierpiński a donné une solution positive de ce problème si $n = 2$ [2]). Il reste cependant ouvert déjà pour $m = \aleph_\omega$, $n = 3$.

Czerchawa, août 1936.

---

1) *Fund. Math.* t. 28.

2) Bull. Acad. Polonaise, séance du 5 octobre 1936.