Transformation et intégration d'une équation différentielle du premier ordre

Par

DRAGOSLAV MITRINOVITCH

L'équation différentielle

$$(1) \qquad A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\,By\,\frac{dy}{dx} + Cy^2 + 2D\,\frac{dy}{dx} + 2Ey + F = 0$$

(A, B, C, D, E, F sont des fonctions arbitraires de la variable indépendante x) se rencontre dans plusieurs problèmes de la Géométrie infinitésimale.

Ainsi, par exemple, les problèmes suivants se ramènent à une équation de la forme (1):

1° La détermination[1]) des asymptotiques de la surface

$$z = f(x)y^2 + \varphi(x)\,y + \psi(x),$$

ou de la surface

$$z = \frac{(mx+n)\,y + f(x)}{y + \varphi(x)},$$

où f, φ, ψ sont des fonctions quelconques de x, et où m et n sont deux constantes quelconques;

---

1) Dragoslav Mitrinovitch, *Recherches sur les lignes asymptotiques* (cet article paraîtra dans le *Bulletin de l'Académie royale serbe*).

2º La détermination[1]) des lignes de courbure de la surface

$$z = f(x)\, y + \varphi(x);$$

3º La détermination[2]) des courbes planes dont l'arc s est de la forme

$$s = \varrho f(\theta) + \varphi(\theta),$$

ϱ étant le rayon vecteur, f et φ des fonctions données de l'angle polaire θ.

Ceci justifie l'intérêt qui se rattache à la recherche suivante sur la transformation et l'intégration de l'équation différentielle (1).

N. Alexéieff[3]) et G. Hamel[4]) ont indiqué d'autres transformations de l'équation (1), mais la nôtre se prête mieux au problème de l'intégration de cette équation.

I.

Dans les cas où

1º
$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0,$$

l'équation (1) se décompose en deux équations linéaires;

2º $$A = 0, \qquad \Delta \equiv B^2 - AC = 0,$$

---

1) Nous nous occuperons de ce problème dans un travail qui paraîtra prochainement.

2) Dragoslav Mitrinovitch, *O diferencijalnoj jednačini ravnih krivih, čiji je luk data funkcija potega i polarnog ugla* „*Glas*" *de l'Académie royale serbe*, t. CLXV, 1935, p. 159).

3) *Sur l'intégration de l'équation* $Ay'^2 + Byy' + Cy^2 + Dy' + Ey + F = 0$ (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, t. LXXXVII, 1878 p. 641—643).

4) *Transformationstheorie der quadratischen Differentialgleichung erster Ordnung*:

$$Ay'^2 + 2Byy' + Cy^2 + 2Dy' + 2Ey + F = 0$$

(*Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft*, XXXIII. Jahrgang 1934, S. 65—95).

l'équation (1) se réduit à une équation de Riccati;

3º $$A = 0, \qquad \Delta \neq 0,$$

l'équation (1) prend la forme

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Cy^2 + 2\,Ey + F}{2\,(By + D)} \, .$$

Nous laisserons de côté ces trois cas dans lesquels l'équation (1) est une équation algébrique du premier ordre et du premier degré et nous allons examiner les cas définis par

1º $$A \neq 0, \qquad \Delta \neq 0;$$

2º $$A \neq 0, \qquad \Delta = 0.$$

II.

Si

$$A \neq 0, \qquad \Delta \neq 0,$$

l'équation (1) s'écrit sous la forme

$$(y' + ay + b)\,(y' + a_1\,y + b_1) + c = 0, \quad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right),$$

ou bien

$$(2) \quad y'^2 + (a + a_1)\,yy' + aa_1\,y^2 + (b + b_1)\,y' + \\ + (ab_1 + a_1 b)\,y + bb_1 + c = 0.$$

La comparaison des deux équations (1) et (2) conduit aux relations:

$$a + a_1 = 2\,\frac{B}{A}\,,$$

$$aa_1 = \frac{C}{A}\,,$$

$$b + b_1 = 2\,\frac{D}{A}\,,$$

$$ab_1+a_1b=2\frac{E}{A},$$

$$bb_1+c=\frac{F}{A}.$$

En résolvant ces relations par rapport à a, a_1, b, b_1, c, on aura les deux systèmes des valeurs, dont le premier est:

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{B+\sqrt{\Delta}}{A}, \\
a_1 &= \frac{B-\sqrt{\Delta}}{A}, \\
b &= \frac{D\sqrt{\Delta}+BD-AE}{A\sqrt{\Delta}}, \\
b_1 &= \frac{D\sqrt{\Delta}-BD+AE}{A\sqrt{\Delta}}, \\
c &= -\frac{1}{\Delta A}\cdot\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix};
\end{aligned}
\tag{3}
$$

l'autre s'obtiendra en permutant a avec a_1, b avec b_1, c restant le même.

L'équation (2) s'écrit ainsi:

$$y'+ay+b=\lambda,$$

$$y'+a_1y+b_1=-\frac{c}{\lambda},$$

(λ est un paramètre variable), d'où l'on tire:

$$y=\frac{\lambda^2-(b-b_1)\lambda+c}{(a-a_1)\lambda}, \tag{4}$$

$$y'=\frac{a_1\lambda^2+(ab_1-a_1b)\lambda+ac}{(a_1-a)\lambda}. \tag{5}$$

Exprimant maintenant que (4) est la dérivée de (5), on trouvera pour λ l'équation différentielle

$$\frac{d\lambda}{dx}=\frac{M\lambda^3+N\lambda^2+P\lambda}{\lambda^2+Q}\,,\tag{6}$$

où[1])

$$\begin{aligned}
&M=[\log(a-a_1)]'-a_1,\\
&N=b'-b_1'-(ab_1-a_1b)-(b-b_1)\,[\log(a-a_1)]',\\
&P=c\,[\log(a-a_1)]'-ac-c',\\
&Q=-c,
\end{aligned}\tag{7}$$

les fonctions a, a_1, b, b_1, c étant définies par (3).

En ce qui concerne l'autre système des valeurs pour a, a_1, b, b_1, c, par la transformation

$$y=\frac{\lambda^2-(b_1-b)\,\lambda+c}{(a_1-a)\,\lambda}\,,\tag{8}$$

l'équation (1) prend la forme

$$\frac{d\lambda}{dx}=\frac{M_1\lambda^3+N_1\lambda^2+P_1\lambda}{\lambda^2+Q_1}\,,\tag{9}$$

où

$$\begin{aligned}
&M_1=[\log(a_1-a)]'-a,\\
&N_1=b_1'-b'-(a_1b-ab_1)-(b_1-b)\,[\log(a_1-a)]',\\
&P_1=c\,[\log(a_1-a)]'-a_1c-c',\\
&Q_1=-c,
\end{aligned}\tag{10}$$

a, a_1, b, b_1, c étant déterminés par (3).

On peut aisément montrer que les résolvantes (6) et (9) de l'équation (1) sont *équivalentes.* En effet, si dans les relations (8) et (9) on pose

---

[1]) L'expression $\frac{d}{dx}[\log(a-a_1)]$ sera désignée par $[\log(a-a_1)]'$. Les lettres accentuées désignerons, dans ce qui suit, les dérivées prises par rapport à x.

$$\lambda = -\frac{\lambda_1}{c},$$

elles se transforment respectivement en (4) et (6).

Par suite, *l'équation différentielle* (1), *dans le cas où*

$$A \neq 0, \qquad \Delta \neq 0,$$

en effectuant sur la fonction inconnue y la transformation rationnelle

$$y = \frac{\lambda^2 - (b - b_1)\lambda + c}{(a - a_1)\lambda},$$

se ramène à l'équation

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{M\lambda^3 + N\lambda^2 + P\lambda}{\lambda^2 + Q}, \tag{11}$$

où les coefficients a, a_1, b, b_1, c, M N, P, Q sont définis par (3) et (7).

III.

Suivant le procédé qui vient d'être exposé, on peut toujours ramener l'équation différentielle (1), dont les coefficients sont assujettis aux limitations indiquées, à l'équation différentielle (11).

Proposons-nous maintenant le problème inverse consistant en ceci:

Etant donnée une équation différentielle de la forme

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{M\lambda^3 + N\lambda^2 + P\lambda}{\lambda^2 + Q},$$

déterminer l'équation correspondante (1).

Pour résoudre ce problème, reportons-nous aux relations (7). De la dernière de ces relations il suit que

$$c = -Q.$$

La première et la troisième des relations (7) peuvent s'écrire:

$$M=[\log(a-a_1)]'-a_1,$$

(12) $$\frac{P}{Q}=-[\log(a-a_1)]'+a+\frac{Q'}{Q},$$

d'où l'on tire, après l'addition,

(13) $$a-a_1=M+\frac{P-Q'}{Q}.$$

En combinant entre elles les relations (12) et (13), il vient:

$$a=\left[\log\left(M+\frac{P-Q'}{Q}\right)\right]'+\frac{P-Q'}{Q},$$

$$a_1=\left[\log\left(M+\frac{P-Q'}{Q}\right)\right]'-M.$$

Enfin, si l'on considère l'une des fonctions b et b_1 comme arbitraire, par exemple b, l'autre sera definie, d'après la deuxième des relations (7), par une équation différentielle linéaire, à savoir

$$\frac{db_1}{dx}+f(x)\,b_1+\varphi(x)=0,$$

où

$$f(x)=\frac{P-Q'}{Q},$$

$$\varphi(x)=N-b'+Mb.$$

Pour avoir l'équation (1), il faut déterminer les rapports $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, $\frac{D}{A}$, $\frac{E}{A}$, $\frac{F}{A}$ d'après les valeurs trouvées de a, a_1, b, b_1, c, ce qui se fait aisément.

Or, *à une équation envisagée de la forme* (11) *correspondra une équation de la forme* (1) *dont les coefficients contiendront une fonction arbitraire.*

Cette remarque présentera un intérêt particulier toutes les fois que l'équation initiale (11) est intégrable par des quadratures.

Premier exemple. Dans le cas où

$$(14) \qquad M=\alpha_0, \quad N=\alpha_1, \quad P=\alpha_2, \quad Q=\alpha_3+\alpha_4 x,$$

α_h étant des constantes quelconques, l'équation (11) devient

$$\frac{dx}{d\lambda}=\frac{\alpha_3+\alpha_4 x+\lambda^2}{\alpha_0\lambda^3+\alpha_1\lambda^2+\alpha_2\lambda},$$

or, la détermination de x dépend de l'intégration d'une équation linéaire.

En partant des fonctions (14) et en procédant de la manière exposée, on parvient à une classe d'équations *intégrables* de la forme (1).

Second exemple. Assignons à les fonctions M, N, P, Q les formes suivantes:

$$M=\alpha_0, \qquad N=\alpha_1, \qquad P=\alpha_2,$$

$$Q=\alpha_3+\alpha_4 x+\alpha_5 x^2,$$

α_k étant des constantes quelconques; l'équation (11) prend la forme

$$\frac{dx}{d\lambda}=\frac{\alpha_3+\alpha_4 x+\alpha_5 x^2+\lambda^2}{\alpha_0\lambda^3+\alpha_1\lambda^2+\alpha_2\lambda},$$

or, pour λ une équation de Riccati.

En partant de cette équation, on obtiendra une classe d'équations de la forme (1), réductibles à l'équation de Riccati.

IV.

Envisageons maintenant le cas *parabolique* de l'équation (1), c'est-à-dire le cas où

$$A \neq 0, \qquad \Delta = 0.$$

L'équation (1) s'écrit alors sous la forme

$$(15)\qquad (Ay'+By)^2+A\,(2Dy'+2Ey+F)=0.$$

Si l'on y pose

$$(16)\qquad y=\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma,$$

où

$$(17)\qquad \alpha=\frac{1}{2\,(BD-AE)},$$

$$(18)\qquad \beta=\frac{D}{BD-AE},$$

$$(19)\qquad \gamma=\frac{AF}{2\,(BD-AE)},$$

ceci fournit les deux équations suivantes:

$$(20)\qquad \frac{d\lambda}{dx}=\frac{(-A\alpha'-B\alpha)\,\lambda^2+(-A\beta'-B\beta+1)\,\lambda-A\gamma'-B\gamma}{A\,(2\alpha\lambda+\beta)},$$

$$(21)\qquad \frac{d\lambda}{dx}=\frac{(-A\alpha'-B\alpha)\,\lambda^2+(-A\beta'-B\beta-1)\,\lambda-A\gamma'-B\gamma-2D}{A\,(2\alpha\lambda+\beta)}.$$

Les équations (20) et (21) sont équivalentes entre elles. En effet, si l'on pose, dans les relations (16) et (21),

$$\lambda=-\lambda_1-2D,$$

on obtiendra respectivement les relations (16) et (20).

Par suite, *dans le cas considéré l'équation* (1) *est réductible à l'équation* (20) *en effectuant sur la fonction inconnue* y *la transformation rationnelle*

$$y=\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma,$$

α, β, γ étant définis plus haut.

V.

En cherchant la forme de l'équation différentielle suivante:

$$Ay'^2+2Byy'+\frac{B^2}{A}y^2+2Dy'+2Ey+F=0,$$

qui correspondra à une équation différentielle

$$\frac{d\lambda}{dx}=\frac{p_0(x)\lambda^2+p_1(x)\lambda+p_2(x)}{\lambda+p_3(x)},$$

on parvient au système d'équations différentielles:

$$\frac{-A\alpha'-B\alpha}{2A\alpha}=p_0,$$

$$\frac{-A\beta'-B\beta+1}{2A\alpha}=p_1,$$

$$\frac{-A\gamma'-B\gamma}{2A\alpha}=p_2,$$

$$\frac{\beta}{2\alpha}=p_3.$$

On peut supposer que

$$A=1,$$

ce qui ne restreint pas les résultats qui suivent.

Les dernières relations deviennent alors:

$$\frac{\alpha'}{\alpha}+B=-2p_0, \tag{22}$$

$$\frac{\beta'}{\alpha}+B\frac{\beta}{\alpha}-\frac{1}{\alpha}=-2p_1, \tag{23}$$

$$\frac{\gamma'}{\alpha}+B\frac{\gamma}{\alpha}=-2p_2, \tag{24}$$

$$\frac{\beta}{\alpha}=2p_3. \tag{25}$$

D'après les formules (17) et (19), il s'ensuit de la relation (25) que

$$(26) \qquad D=p_3.$$

La relation (23), d'après (18) et (26), devient

$$(27) \qquad 2p_3'+2p_3\frac{\alpha'}{\alpha}+2Bp_3-\frac{1}{\alpha}=-2p_1.$$

La relation (22), après la multiplication par $-2p_3$, prend la forme:

$$(28) \qquad -2p_3\frac{\alpha'}{\alpha}-2Bp_3=4p_0p_3.$$

Par l'addition des membres correspondants des équations (27) et (28), on obtient

$$(29) \qquad \alpha=\frac{1}{2(p_1+p_3'-2p_0p_3)}.$$

En tenant compte maintenant de (29), on a, selon la relation (22),

$$(30) \qquad B=[\log(p_1+p_3'-2p_0p_3)]'-2p_0.$$

Au lieu de la relation (29), en vertu de la formule (17), on aura

$$Bp_3-E=p_1+p_3'-2p_0p_3,$$

ce qui donne

$$(31) \qquad E=[\log(p_1+p_3'-2p_0p_3)]'-p_1-p_3'.$$

Pour déterminer le coefficient F, il faut préalablement déterminer la fonction γ de la relation (24), qui est

$$\frac{d\gamma}{dx}+B\gamma+2\alpha p_2=0,$$

or, une équation linéaire pour γ.

La fonction γ étant ainsi trouvée, on a, d'après la formule (19),

$$F = \frac{\gamma}{\alpha}. \tag{32}$$

Or, *le problème proposé se résout par les relations* (26), (30) (31), (32).

On arrive ainsi au résultat suivant:

L'intégration de l'équation

$$(y' + By)^2 + 2Dy' + 2Ey + F = 0 \tag{33}$$

et l'intégration de l'équation classique d' A b e l

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{p_0\lambda^2 + p_1\lambda + p_2}{\lambda + p_3} \tag{34}$$

constituent deux problèmes équivalents.

On connaît des nombreux cas d'intégrabilité de l'équation d'A b e l (34) et, par suite, on aura de même des nombreux cas d'intégrabilité de l'équation proposée (33).

Parmi les travaux, ayant eu pour l'objet l'intégration de l'équation (34), nous citerons en particulier ceux d' A b e l[1]), de H a l p h e n[2]) et d' E l l i o t[3]).

Des cas d'intégrabilité de l'équation (34) peuvent être fournis aussi par le procédé[4]) suivant.

Si dans l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = A(x) + B(x)t \tag{35}$$

on fait la substitution

$$t = a(x) + b(x)\lambda,$$

---

[1]) *Oeuvres complètes de* N i e l s H e n r i k A b e l, nouvelle édition, publiée par L. S y l o w et S. L i e, Christiania, 1881, t. II, p. 26—35.

[2]) *Sur l'intégration d'une équation différentielle (Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris,* t. LXXXVIII, 1879, p. 562—565).

[3]) *Sur une équation du premier ordre et l'équation de Jacobi (Annales scientifiques de l'Ecole normale supérieure,* troisième série, t. VII, 1890, p. 101).

[4]) D r a g o s l a v M i t r i n o v i t c h, *Cas d'intégrabilité d'une certaine classe d'équations différentielles algébriques du premier ordre (Bulletin de l'Académie royale serbe,* Classe des Sciences mathématiques et physiques, A, t. 2, 1935, p. 247—248).

on aura

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{-Bbb'\lambda^2-[Ba'b+(A+Ba)b']\lambda+1-(A+Ba)a'}{Bb^2\lambda+(A+Ba)b}.$$

Si alors on envisage l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = A(x) + \frac{B(x)}{t} \tag{36}$$

et si l'on y effectue la substitution

$$t = a(x) + b(x)\lambda,$$

on arrive à l'équation

$$\frac{d\lambda}{dx} = \frac{-Abb'\lambda^2+[b-(Aa+B)b'-Aa'b]\lambda+a-(Aa+B)a'}{Ab^2\lambda+(Aa+B)b}$$

et l'on en tire le résultat suivant:

Chaque cas d'intégrabilité des équations (35) *et* (36) *fournira une équation intégrable de la forme* (34) *dans laquelle figurera les deux fonctions arbitraires* $a(x)$ *et* $b(x)$.