Über einige nichtholonome Mechanismen

Von

ANTON BILIMOVITCH

Nach Untersuchungen von K. Neumann, P. Appell, P. Woronetz, G. Hamel u. a. stellt das Aufstellen der Bewegungsgleichungen der nichtholonomen Systeme keine Schwierigkeiten dar. In der letzten Zeit ist A. PrzIborski tiefer in die Analyse auch jener Fälle eingegangen, wo nichtholonome Bedingungen nicht nur nichtlinear im Bezug auf die Geschwindigkeiten sind, sondern auch noch von den Beschleunigungen abhängig sein können. Wir können demnach behaupten, dass die analytische Seite der Theorie der nichtholonomen Systeme in genügender Weise ausgearbeitet ist. Damit, selbstverständlich, wollen wir nicht behaupten, dass in dieser Theorie noch viele wichtige Probleme nicht ungelöst geblieben sind.

Aber die Untersuchung konkreter Bewegungen der nichtholonomen Systeme ist sehr ungenügend. Die allgemeine Theorie der sogennanten nichtholonomen Mechanismen, welche nichtholonome Bedingungen verwirklichen, ist nicht ausgebildet. Es gibt sogar sehr wenige einzelne Beispiele solcher Mechanismen, welche uns die Möglichkeit geben noch viele unklare Fragen der Nichtholonomität konkret zu erklären.

Ich habe, in einer ganzen Reihe meiner Arbeiten, versucht auf konkreten Beispielen einzelne karakteristische Eigenschaften der nichtholonomen Systeme zue rklären. Der Inhalt dieses Aufsatzes ist ebenfalls der konkreten Erklärung einer Frage in der Theorie der nichtholonomen Systeme, die in letzter Zeit in der

Literatur aufgeworfen ist, gewidmet. Nämlich C. Caratheodory in seiner Mitteilung „Sur les équations de la mécanique" (Actes du Congrès interbalkanique de mathématiciens, Athènes 1934) schreibt:

5. Mais il existe pourtant une remarque d'intérêt général qui, comme il me semble, a échappé à l'attention de ceux qui ont étudié jusqu'ici les problèmes ci-dessus.

Il faut toujours que les liaisons des systèmes mécaniques soient simplement cinématiques et qu'elles ne restreignent pas la grandeur absolue de la vitesse. Nous trouvons par exemple une liaison purement cinématique dans un exemple donné par Appell. Il s'agit du mouvement dans le champ habituel de gravitation d'un point pour lequel la liaison

(5, 2) $$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 - \dot{x}_3^2 = 0 \quad \text{est valable.}$$

Les vitesses compatibles avec la liaison (5,2) forment évidemment en chaque point de l'espace un cône sans que la valeur absolue de la vitesse soit elle même restreinte.

Nous trouvons ici la réaction (dans le cas où il n'y a pas de frottement) en écrivant qu'à tout instant la réaction est normale à un plan tangent au cône dont le sommet coincide avec le point mobile.

Nous trouvons ainsi les équations

(5, 3) $$m\ddot{x}_1 = \lambda\dot{x}_1, \quad m\ddot{x}_2 = \lambda\dot{x}_2, \quad m\ddot{x}_3 = g - \lambda\dot{x}_3,$$

qui conduisent facilement aux résultats de Paul Appell. Il serait au contraire complètement absurde de vouloir déterminer le mouvement de ce même point sous la condition

(5, 4) $$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 - 1 = 0$$

quoiqu'au point de vue analytique ce dernier problème puisse être étudié de la même manière que le précédent.

D'une façon générale on voit que si la liaison par laquelle se restreint le mouvement d'un point ne dépend pas du temps il faut qu'à l'équation

(5, 5) $$f(x_1, x_2, x_3, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3) = 0$$

par laquelle s'exprime la liaison du mouvement, la fonction f soit homogène par rapport aux variables $\dot{x}_i$.

Auf diese Weise behauptet der verehrte Autor, dass unabhängig davon, dass die Bedingung (5, 4) vom analytischen Standpunkt aus untersucht werden kann, sie vom mechanisch konkreten Standpunkt aus absurd sei. Es scheint uns, im Gegenteil, dass die Behauptung, die nichtholonomen Bedingungen eines materiellen Systems seien rein kinematischer Natur, nicht begründet werden kann weder vom theoretischen noch vom praktisch-technischen Standpunkt aus. Es ist auch unmöglich eine Absurdität in der Forderung zu sehen, dass der Punkt während der Bewegung eine konstante Geschwindigkeitsintensität besitzen soll, und sagen wir, das materielle System eine konstante kinetische Energie. Umgekehrt, es ist immer möglich ein materielles System, dessen Bewegung wir untersuchen, mit einem anderen System durch eine solche konkrete Bindung in Verbindung zu bringen so dass das Funktionieren des Mechanismus dieser Bindung unserem System konstante kinetische Energie sichert, und für den Punkt — konstante Geschwindigkeitsintensität. Das Funktionieren des Mechanismus soll automatisch durch die Wirkung einer Reaktion, dessen Veränderung vom kinematischen Zustand unseres Systems abhängig ist, erfolgen. Es scheint uns, dass die theoretische Mechanik, auch solche Mechanismen umfassen soll, denn sie können zur Vertiefung der Analyse wirklich ausgeführter Bewegungen in der modernen Technik dienen.

Führen wir nun einige konkrete Beispiele solcher Bewegungen materieller Systeme an, wo nichtholonome Bindung, wirklich ausgeführt, die Konstanz der kinetischen Energie des Systems bzw. die Konstanz der Geschwindigkeitsintensität des Punktes erfordert.

1. Der für Erprobung der Bahnstrecke und der Lokomotive verwendende Probezug besteht gewöhnlich aus folgenden drei Hauptbestandteilen: A — aus einer Führungslokomotive, B — aus einem zur Durchführung der Messungen erforderlichen Wagen und C — aus einer weiteren Lokomotive, die durch ihre Anwesenheit die Betriebsbelastung des gewöhnlichen Eisenbahnzuges zu ersetzen hat. Die Probefahrt wird gewöhnlich mit konstanter Geschwindigkeit, ohne Rücksicht auf das Profil des Weges und verschiedene Widerstände, ausgeführt.

Stellen wir uns nun die Aufgabe, die Bewegungsgleichungen der Lokomotive A, die wir uns als einen materiellen Punkt denken wollen, aufzustellen und setzen dabei voraus, um einen klaren Fall der Nichtholonomität vor uns zu haben, diese punktartige Lokomotive bewege sich nicht längs eines Geleises (ein Freiheitsgrad) sondern auf einer Fläche (zwei Freiheitsgrade). Auf diesen materiellen Punkt wirken die aktiven Kräfte (z. B. Zugkraft, Eigengewicht u. a.) und Reaktionskräfte (Reaktion der Fläche, der anderen Wagen u. s. w.). Die Resultante aller aktiven Kräfte und aller Reaktionskräfte, *mit Ausnahme einer einzigen*, sei mit K bezeichnet. Diese von den übrigen gesonderte Reaktionskraft, die wir mit R bezeichnen wollen, sei auf folgende Weise zustande gebracht.

Die Lokomotive A trage ein zur Messung der Fahrgeschwindigkeit dienendes Instrument (Tachometer). Der Zeiger dieses Instrumentes gebe durch seinen Neigungswinkel die Fahrgeschwindigkeit an. Man denke sich nun mit diesem Zeiger den an der Lokomotive C befindlichen Kompressor derart in Verbindung gebracht, dass dieser Kompressor die Fahrgeschwindigkeit so ideal regelt, dass sobald die Geschwindigkeit geändert wird, der Kompressor momentan die ursprüngliche konstante Geschwindigkeit herstellt. Wir können in der Zusammenwirkung des Tachometers und des Kompressors einen nichtholonomen Mechanismus erblicken; mit ihm steht, die auf die Lokomotive A wirkende Reaktionskraft $\vec{R}$, die ihren Ursprung in den Massen hat, die der Lokomotive nicht angehören, in Verbindung.

Die Lokomotive A kann als ein unfreier materieller Punkt mit zwei Freiheitsgraden betrachtet werden, aber ihre beiden Koordinaten können nicht willkürlich geändert werden; sondern nur unter Beibehaltung der Konstanz der Geschwindigkeitsintensität. Diese Einschränkung wird durch einen besonderen nichtholonomen Mechanismus erzielt, dessen Wirkung nicht an die Lage sondern an die Geschwindigkeit des Systems gebunden ist. Der Tachometer ist ein Bestandteil dieses nichtholonomen Mechanismus. Die Anwesenheit dieses Mechanismus gibt uns als Folge die Reaktionskraft. Wie wird diese Reaktionskraft bestimmt? Schreiben wir die Bewegungsgleichungen der Lokomotive A in der Form:

$$(1) \qquad m\dot{v} = \vec{K} + \vec{R},$$

und dabei stellen wir die Forderung

(2) $$v^2 = \text{const.}$$

auf.

Zur Bestimmung der Reaktion $\vec{R}$ können wir auf folgende Weise verfahren.

Die Differentiation nach der Zeit der Gleichung (2) ergibt

$$(\vec{v}\,\dot{v}) = 0$$

wobei die Klammer das skalare Produkt der Vektoren zu bedeuten hat. Es folgt dann mit Rücksicht auf (1)

(3) $$(\vec{K}\,\vec{v}) + (\vec{R}\,\vec{v}) = 0,$$

so dass zur Ermittellung der Reaktion, des Vektors R, eine Skalargleichung (3) zur Verfügung steht.

Man kann, ähnlich wie im Falle eines holonomen Mechanismus, auch hier zwei besondere Fälle unterscheiden: den Fall der ideellen und den Fall der nichtideellen Bindungen und der ihnen entsprechenden idealen und nichtidealen Mechanismen. Diese Einteilung ist konventionell und kann z. B. mit der Arbeit der Reaktionskraft längs möglicher Verschiebungen in Verbindung stehen. In unserem Falle z B. können wir so sagen: Wenn die ganze Reaktion R in die Richtung der Geschwindigkeit fällt und vollständig durch die Gleichung (3) in der Form

$$R \operatorname{Cos}(\vec{R}\,\vec{v}) = -\frac{1}{v}(\vec{K}\,\vec{v})$$

bestimmt ist, die anderen Komponenten aber gleich Null sind, ist der nichtholonome Mechanismus ideal. Die Bewegungsgleichung erhält die Form

$$m\dot{v} = \vec{K} + \lambda\,\vec{v},$$

wobei λ den Multiplikator der Bindung bedeutet mit dem Wert:

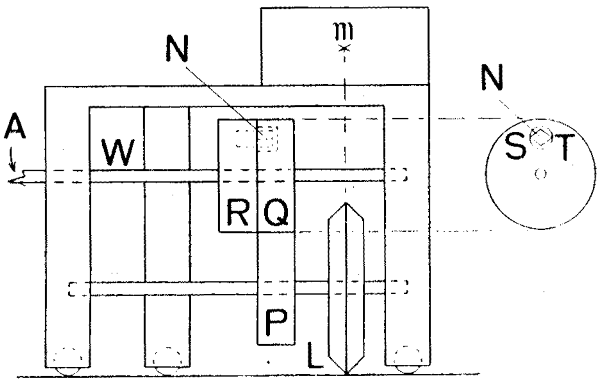
$$\lambda = -\frac{1}{v^2}(\vec{K}\,\vec{v}).$$

Ist der Mechanismus in diesem Sinne nichtideal, so müssen ergänzende Bedingungen für die auf $\vec{v}$ senkrechten Komponenten eingeführt werden, wie das, beispielsweise, im Falle der Bewegung des Punktes auf einer rauhen Fläche in der Form einer Ergänzungsreaktion geschieht. Diese Ergänzungsreaktion wird durch besondere Bedingungen eingeführt (Reibungsgesetze).

2. Nehmen wir nun ein zweites Beispiel. Die Bewegung eines Körpers, den wir als einen materiellen Punkt betrachten, auf einer Fläche sei durch die Gleichung:

$$f(x, y, z; t) = 0 \tag{4}$$

gegeben, wobei x, y, z — kartesische Punktkoordinaten bedeuten. Eine solche Bewegung können wir durch drei Kügelchen, die im Körper befestigt sind und auf der Fläche rollen können, konkretisieren (4).



Mit unserem Körper m (Abb. 1) sei ein (oder zwei auf gleicher Achse) Rad L, dessen Ebene senkrecht auf der Fläche (4) und in der Bewegungsrichtung des Punktes liegt, gebunden. Das Rad bewege sich auf der Fläche rollend ohne Gleiten. Auf der Achse dieses Rades befinde sich das Zahnrad P, welches mit dem Zahnrad Q, das sich auf der Achse W frei bewegt, in Verbindung steht. Auf der gleichen Achse befinde sich ein auf der Achse W aufgekeiltes Rad R. Das Rad R ist mit dem Rad Q durch ein Stäbchen N welches in R befestigt und in ein Loch des Rades Q eingezogen ist, verbunden. Eine solche Verbindung zwischen den Rädern R und Q ist nur deshalb gewählt, damit dynamische Unbestimmtheiten in der Kraftübertragung von einem Rad auf das andere vermieden werden. Das erwähnte Stäbchen N kann mit dem Rad dreierlei Verbindungen haben: entweder im Punkt S, oder im Punkt T oder kann frei im Loch bleiben, wobei sich alle drei Lagen voneinander nur dynamisch und nicht geometrisch unterscheiden.

Man denke sich, dass die Achse W mit einem Mechanismus A, der dieser Achse eine konstante Winkelgeschwindigkeit erteit und zwar unabhängig von allen Änderungen die durch Achsenbelastung hervorgerufen werden können, verbunden ist. Setzen wir dabei voraus, dass diese Winkelgeschwindigkelt der konstanten, durch die Gleichung (2) gegebenen, Lineargeschwindigkeit des Punktes entspricht.

Es ist klar, dass unsere Punktmasse m sich auf der Fläche nur mit konstanter Geschwindigkeitsintensität bewegen kann.

Bewegt sich der Punkt im Einklang mit den Differentialgleichungen

$$(5) \qquad mx'' = X, \quad my'' = Y, \quad mz'' = Z,$$

wobei wir mit X, Y, Z die Koordinate der Resultante K aller aktiven Kräfte (wie auch der Bindungsreaktionen) bezeichnen, mit Ausnahme der Reaktionskräfte in den Punkten S und T, in welchen der Mechanismus A mit der Masse m gebunden ist, aber so dass die aus (5) bestimmte Geschwindigkeit der Bedingung (2) genügt, dann bewegt sich unser Punkt als ein freier Punkt mit Hinsicht auf den Mechanismus A und seine Bewegungsgleichungen bleiben in der Form (5).

Wenn die aus (5) bestimmte Geschwindigkeit des Punktes, der Gleichung (2) nicht denügt, und der Punkt sich tatsächlich mit konstanter Geschwindigkeit, die der Gleichung (2) genügt, bewegt, müssen wir die Reaktionskraft des Mechanismus A, die auf die Masse m wirkt und deren Angriffspunkt entweder der Punkt S oder der Punkt T ist, einführen. Und gerade diese Reaktionskraft führt unseren Punkt so dass seine Geschwindigkeit der aufgestellten Bedingung genügt.

Wenn wir diese auf unseren Körper wirkende Kraft auf die äquivalente in seinem Zentrum auf die Masse m wirkende Kraft zurückführen und die Reaktionskoordinaten in dieser

Form mit R_x, R_y, R_z bezeichnen, erhalten die Bewegungsgleichungen folgende Form:

$$
\begin{aligned}
&& mx'' &= X + R_x\,, \\
(6) && my'' &= Y + R_y\,, \\
&& mz'' &= Z + R_z\,,
\end{aligned}
$$

wobei zur Bestimmung dieser Kraft uns eine eizige Gleichung zur Verfügung steht, die wir durch Differentiation von (2) bekommen:

$$x''x' + y''y' + z''z' = 0.$$

Wenn wir die Werte der Beschleunigung aus (4) eintragen, haben wir:

$$R_x\,x' + R_y\,y' + R_z\,z' = (\vec{R}\,\vec{v}) = -(\vec{K}\,\vec{v})\ ,$$

woraus sich endlich:

$$R\,\mathrm{Cos}\,(\vec{R}\,\vec{v}) = -\frac{1}{v}\,(\vec{K}\,\vec{v})$$

ergibt.

Auch hier führt die Bemerkung über ideelle und nicht ideelle Bindungen das Problem zur vollständigen Bestimmtheit.

Die vorstehenden konkreten Beispiele zeigen, glaube ich, zur Genüge jenen Gedankenkreis im dem ich mich bei der Erklärung der nichtholonomen Bindungen verschiedener Art bewege. Es ist selbstverständlich, dass die Konstruierung eines konkreten Mechanismus für eine in analytischer Form gegebene nichtholonome Bindung ein ganz anderes Problem darstellt; gewissermassen ein Problem der technischen Erfindung. Man könnte, beispielsweise, unschwer nichtholonome Mechanismen solcher Art konstruieren, die eine gleichmässige Bewegung nicht auf einer Fläche, wie oben angegeben, sondern allgemein im Raume gewährleisten aber das würde unnütz die Form der Darlegung komplizieren, ohne mehr Klarheit in die prinzipielle Seite der Frage zu bringen.

Wir glauben, dass der Inhalt dieses Aufsatzes zur Genüge zeigt, dass es weder vom theoretischen noch vom praktischen Standpunkt aus notwendig ist aus der theoretischen Mechanik die Untersuchung solcher Bewegungen, die in Verbindung mit der Bedingung der Konstanz der kinetischen Energie stehen, zu eliminieren.