Propositions sur les fonctions méromorphes

Par

MICHEL PETROVITCH

I. *Toutes les fois que l'intégrale indéfinie*

$$J = \int x\, du \tag{1}$$

où u est le logarithme d'une fonction méromorphe y de x, s'exprime comme logarithme d'une fonction méromorphe v de x, les zéros et les pôles de la fonction y sont tous réels et égaux à des nombres commensurables.

En effet, de

$$\int x\, d(\log y) = \int \frac{xy'}{y}\, dx = \log v \tag{2}$$

on tire par différentiation

$$\frac{xy'}{y} = \frac{v'}{v}\ . \tag{3}$$

L'intégrale curviligne

$$L = \int \frac{xy'}{y}\, dx$$

prise le long d'un cercle suffisamment petit, qui ne contient qu'un seul zéro $z = a$ de y, a pour valeur le résidu de la fonction $\frac{xy'}{y}$ par rapport au pôle $x=\alpha$, multiplié par $2\pi i$. Ce résidu étant $m\alpha$, où m désigne l'ordre du zéro α, on aura

$$L = 2m\alpha\pi i \ . \tag{4}$$

D'autre part, d'après (2) et (3) l'intégrale L s'écrit

$$L = \int\limits_C \frac{v'}{v}\,dx = 2\pi i\,(M - N) \tag{5}$$

où M désigne le nombre des zéros, et N le nombre des pôles de v dans le cercle C.

Si aucun zèro et aucun pôle de v ne coincide avec α, on peut rétrécir le cercle C de manière qu'il ne contienne aucun de ces zéros ni de ces pôles. Dans ce cas on a $M=0, N=0$, et par suite, d'après (4), $\alpha=0$.

Mais si α est un zéro ou un pôle d'ordre n de v, on aura

$$L = 2n\pi i \qquad \text{ou bien} \qquad L = -2n\pi i$$

et par suite, d'après (4) et (5)

$$2m\alpha\pi i = \pm 2n\pi i$$

c'est-à-dire

$$\alpha = \pm \frac{n}{m} \ .$$

Si à la place d'un zéro α de y on considère un pôle β de cette fonction, on a un résultat analogue pour β, ce qui démontre la proposition.

On voit également que

II. *Le nombre commensurable égal à un zéro ou a un pôle de y, étant exprimé sous sa forme irréductible, son dénominateur est un diviseur de l'entier exprimant l'ordre de ce zéro ou pôle.*

Il s'en suit que

III. *Toutes les fois que l'intégrale (1), où u est le logarithme d'une fonction méromorphe y ayant tous ses zéros et tous ses pôles simples, s'exprime comme logarithme d'une fonction méromorphe,* *les zéros et les pôles de y sont tous réels et égaux à des nombres entiers.*

Enfin, la même démonstration s'applique à la proposition suivante :

IV. *La fonction $g(x)$ n'ayant pas de singularités, dans le plan des x, toutes les fois que l'intégrale indéfinie*

$$J = \int g(x)\, du$$

(u étant le logarithme d'une fonction méromorphe y) s'exprime comme logarithme d'une fonction méromorphe v, pour chaque zéro et pour chaque pôle de y la fonction $g(x)$ prend la valeur égale à un nombre réel commensurable, ou à zéro.

Ce nombre commensurable est un entier dans le cas où les zéros et les pôles de y sont tous simples. Ainsi, toutes les fois que l'intégrale

$$J = \int z^m\, du$$

(u = logarithme d'une fonction méromorphe y, m = entier positif) s'exprime comme logarithme d'une fonction méromorphe v, chaque zéro et chaque pôle de y est la m — ième racine d'un nombre entier réel.

On vérifie les resultats sur les exemples suivants.

Premier exemple : soit

$$u = \log y \ ,$$
$$y = a + bx^2 \ .$$

La fonction y n'a pas des pôles; elle a comme zéros

$$\alpha_1 = -i\sqrt{\frac{a}{b}} \qquad \alpha_2 = i\sqrt{\frac{a}{b}} \ .$$

L'intégrale J s'ecrit

$$J = \int z\, d\log u = b\int \frac{z^2 dz}{a+bz^2} = z - a\int \frac{dz}{a+bz^2} \ .$$

A l'aide de la formule intégrale

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \frac{a+x}{a-x}$$

en y posant

$$a = \frac{a}{b}, \qquad x = -zi, \qquad \frac{i}{2}\sqrt{\frac{a}{b}} = \omega$$

on trouve

$$a\int \frac{dz}{a+bz} = -\omega \log \frac{z+\omega}{z-\omega}$$

et comme l'on a identiquement

$$z = \omega \log e^{\frac{z}{\omega}}$$

l'intégrale J s'écrit

$$J = \omega \log e^{\frac{z}{\omega}} + \omega \log \frac{z+\omega}{z-\omega} = \log v$$

où

$$v = \left(e^{\frac{z}{\omega}} \frac{z+\omega}{z-\omega}\right)^{\omega} = \left(e^{\frac{xi}{\omega}} \frac{xi+\omega}{xi-\omega}\right)^{\omega}.$$

Toutes les fois que v est une fonction méromorphe de x, la constante ω est un nombre entier réel. D'autre part, les deux zéros uniques de y sont

$$a_1 = -i\sqrt{\frac{a}{b}} = -2\omega$$

$$a_2 = +i\sqrt{\frac{a}{b}} = +2\omega$$

et ils sont alors des entiers réels.

Deuxième exemple: soit y un polynome $P(x)$ ayant pour zéros

$$a_1, a_2, \cdots a_h$$

d'ordres respectifs

$$m_1, m_2, \cdots, m_h.$$

Si l'on considère l'intégrale

$$J = \int x d\, u$$

$$u = \log P(x).$$

on aura

$$x\,du = \frac{x\,P'(x)}{P(x)}\,dx = \left(\frac{m_1\,x}{x-a_1} + \frac{m_2\,x}{x-a_2} + \cdots + \frac{m_k\,x}{x-a_k}\right)dx$$

et par suite

$$J = \varphi(x) + \log \psi(x)$$

où

$$\varphi(x) = m_1(x-a_1) + m_2(x-a_2) + \cdots + m_k(x-a_k)$$

$$\psi(x) = (x-a_1)^{m_1\alpha_1}(x-a_2)^{m_2\alpha_2}\cdots(x-a_k)^{m_k\alpha_k}\ .$$

On peut donc écrire

$$J = \log v$$

où

$$v = e^{\varphi(x)}\cdot\psi(x)\ .$$

Toutes les fois que v est méromorphe, tous les produits

$$m_1\,a_1\,,\ m_2\,a_2\,,\cdots m_k\,a_k$$

sont des entiers réels; les zéros de y sont donc des nombres réels commensurables.

Troisième exemple: si l'on envisage l'intégrale

$$J = \int z^2\,du$$

$$u = \log y\ ,\qquad y = a + x$$

on trouve que J s'exprime sous la forme

$$J = \log v$$

$$v = e^{\frac{(a+x)^2}{2} - 2(a+x)}\cdot(a+x)^{a^2}\ .$$

Toutes les fois que v est méromorphe, a^2 est un entier réel; l'unique zéro $x = a$ de y est donc égale à la racine carrée d'un nombre entier.

Quatrièmc exemple : considérons l'intégrale

$$J = \int g(z)\,du$$

$$g(z) = e^{az}\sin z\ ,\qquad u = \log y\ ,\qquad y = \sin bz\ .$$

On aura

$$J = b \int e^{az} \sin bz \cdot \operatorname{cotg} bz \, dz =$$

$$= b \int e^{az} \cos bz \cdot dz = \frac{be^{az}(a \cos z + b \sin bz)}{a^2 + b^2} = \lambda(x)$$

et l'on peut écrire

$$J = \log v$$

$$v = e^{\lambda(x)} = \text{fonction entière} \; .$$

D'autre part, les zéros de y sont

$$z = \frac{k\pi}{b} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \, ;$$

pour chacun de ces zéros la fonction entière $g(x)$ prend la valeur zéro.