Eine Lösung der ebenen Spannungsaufgabe mittels trigonometrischer Reihen

Von

J. KLITCHIEFF

Wenn eine dünne Scheibe durch Kräfte in ihrer Mittelebene beansprucht wird, dürfen wir unsere Betrachtung auf drei Spannungskomponenten σ_x, σ_y, τ beschränken, so dass sich die elastischen Grundgleichungen auf

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + \varrho X = 0, \\ &\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} + \varrho Y = 0, \end{aligned} \right.$$

und

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \nabla \sigma_x &= -\frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y), \\ \nabla \sigma_y &= -\frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y), \\ \nabla \tau &= -\frac{1}{1+\mu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_x + \sigma_y), \end{aligned} \right.$$

zurückführen lassen, wo $\nabla = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, μ den Poissonschen Koeffizienten und X, Y die Komponenten einer von x, y unabhängigen Massenkraft bezeichnet.

Im Falle verschwindender Massenkraft lässt sich die Lösung der Gleichungen (1) durch die Airysche Spannungsfunktion $\varphi(x, y)$ darstellen

$$(3) \qquad \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \qquad \tau = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial y},$$

wo laut (2)

$$(4) \qquad \nabla\nabla\varphi = 0$$

also im Bereiche „biharmonisch“ sein muss.

Eine der Lösungen von (4):

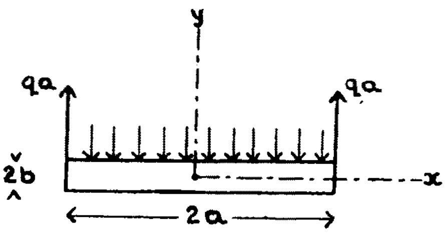
$$(5) \qquad \varphi = Ax^2 + Bx^2y + Cy^3 + D(5x^2 - y^2)\,y^3$$

bei

$$(6) \qquad A = -\frac{1}{4}q, \quad B = \frac{3}{8}\frac{q}{b}, \quad C = \frac{1}{8}\frac{q}{b}\left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{2}{5}\right), \quad D = \frac{1}{40}\frac{q}{b^3}$$

entspricht, bekannterweise, der Beanspruchung eines dünnen Balkens durch gleichförmige Belastung q pro Längeneinheit. Die entsprechenden Spannungskomponenten laut (3) sind:

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{3}{4}\frac{q}{b^3}\left\{a^2 - x^2 - \frac{2}{5}\left(b^2 - \frac{5}{3}y^2\right)\right\} y, \\ \sigma_y &= -\frac{1}{2}\frac{q}{b^3}\left(b^3 + \frac{3}{2}b^2 y - \frac{1}{2}y^3\right), \\ \tau &= \frac{3}{4}\frac{q}{b^3}(b^2 - y^2)\,x. \end{aligned} \right.$$



Es sein ebenbei bemerkt, dass die Lösung (5) sich auch auf den Fall eines durch Eigengewicht belasteten dünnen Balkens anwenden lässt. Es ergibt sich, nämlich, aus (1) bei $X = 0$, $Y = 1$:

$$(8) \qquad \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \varrho y, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \varrho y, \qquad \tau = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial y},$$

wo φ ebenso biharmonisch ist. Nehmen wir

$$A=0,\quad B=\frac{3}{4}\varrho,\quad C=\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{4}\frac{a^2}{b^2}\right)\varrho, D=-\frac{1}{20}\frac{\varrho}{b^2}, \tag{9}$$

an, so bekommen wir die gewünschte Lösung:

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_x &= \left\{\frac{3}{2}(a^2-x^2)-\frac{3}{5}b^2+y^2\right\}\frac{\varrho y}{b^2}, \\ \sigma_y &= \frac{1}{2}(b^2-y^2)\frac{\varrho y}{b^2}, \\ \tau &= -\frac{3}{2}(b^2-y^2)\frac{\varrho x}{b^2}. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Beide Lösungen (6) und (10) erfüllen genau die Randbedingungen bei $y=\pm b$, nämlich $\tau=0$, bzw. $=-q$. Dagegen bei $x=\pm a$, wird $\int_{-b}^{b}\tau dy=qa$, bzw. $=2ab\varrho$, aber σ_x verschwindet nicht, obgleich $\int_{-b}^{b}\sigma_x dy$ und $\int_{-b}^{b}y\sigma_x dy$ beide verschwinden. D. h. die Randbedingungen werden erfüllt, insoweit die lokalen Spannungen vernachlässigt werden können, die von der Belastung der Seiten $x=\pm a$ durch $p=\pm\frac{q}{2b^3}\left(\frac{3}{5}b^2-y^2\right)y$, bzw. $=$ $=\mp\frac{\varrho}{b^2}\left(\frac{3}{5}b^2-y^2\right)y$ herrühren.

Um eine Vorstellung über die Grösse und Verteilung dieser lokalen Spannungen zu gewinnen, betrachten wir eine rechteckige Scheibe, die auf den Seiten $x=\pm a$ durch Kräfte $p=\pm k\left(y^3-\frac{3}{5}b^2y\right)$ beansprucht wird, wo für k: $-\frac{q}{2b^3}$, bzw. $\frac{\varrho}{b^2}$ einzusetzen ist.

Nimmt man die bekannte Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^4}\sin(2n+1)\theta=\frac{\pi^4}{96}\left(3\frac{\theta}{\pi}-4\frac{\theta^3}{\pi^3}\right),$$

die für $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ gilt, und setzt man $\theta=\frac{\pi y}{2b}$ ein, dann ist

$$y^3 = -\frac{192}{\pi^4} b^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^4} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2b} + 3b^2 y$$

und

$$p = \pm kb^2 \left\{ -\frac{192}{\pi^4} b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^4} \sin \frac{(2n+1)\pi y}{2b} + \frac{12}{5} y \right\} .$$

Die Airysche Funktion nehmen wir in der Form

$$\varphi = -\frac{192}{\pi^4} kb^3 \psi + \frac{2}{5} kb^2 y^3$$

an; dann muss ψ biharmonisch sein und folgende Randbedingungen erfüllen:

(11) bei $y = \pm b$: $\partial^2 \psi / \partial x^2 = 0$,

(12) $\partial^2 \psi / \partial x\, \partial y = 0$,

(13) bei $x = \pm a$: $\partial^2 \psi / \partial x\, \partial y = 0$,

(14) $$\partial^2 \psi / \partial y^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^4} \sin (2n+1) \frac{\pi}{2} \frac{y}{b} ,$$

muss, also, gerade in Bezug auf x und ungerade in Bezug auf y sein.

Wir nehmen für ψ die uns von Stokes verliehene Form an:

(15) $$\psi = \sum_{\nu} (A_\nu \operatorname{Ch} \nu x + \alpha_\nu \nu x \operatorname{Sh} \nu x) \sin \nu y + \sum_{\mu} (B_\mu \operatorname{Sh} \mu y + \beta_\mu \mu y \operatorname{Ch} \mu y) \cos \mu x$$

wo ν, μ, A_ν, α_ν, B_μ, β_μ willkürliche Konstanten sind. Jedes Glied in diesem Ausdruck ist biharmonisch, gerade in Bezug auf x und ungerade in Bezug auf y.

Wenn wir den Ausdruck (15) in die Bedingungen (12) und (13) einsetzen, bekommen wir

$$\nu = \frac{(2n+1)\pi}{2b} , \quad \mu = \frac{m\pi}{a}$$

wo n und m beliebige ganze Zahlen sind, und

$$A_r = -\alpha_r \left\{ 1 + (2n+1)\frac{\pi a}{2b} \operatorname{Cth}(2n+1)\frac{\pi a}{2b} \right\},$$

$$B_\mu = -\beta_\mu \left\{ 1 + m\pi \frac{b}{a} \operatorname{Th}\frac{m\pi b}{a} \right\}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in (15) ein, bekommt man

$$(16) \quad \psi = \sum_n C_n \left\{ \operatorname{Ch}(2n+1)\frac{\pi x}{2b} \left[\operatorname{Sh}(2n+1)\frac{\pi a}{2b} + (2n+1)\frac{\pi a}{2b} \operatorname{Ch}(2n+1)\frac{\pi a}{2b} \right] - \right.$$

$$\left. - (2n+1)\frac{\pi x}{2b} \operatorname{Sh}(2n+1)\frac{\pi x}{2b} \operatorname{Sh}(2n+1)\frac{\pi a}{2b} \right\} \sin(2n+1)\frac{\pi y}{2b} +$$

$$+ \sum_m D_m \left\{ \operatorname{Sh}\frac{m\pi y}{a} \left[\operatorname{Ch}\frac{m\pi b}{a} + \frac{m\pi b}{a} \operatorname{Sh}\frac{m\pi b}{a} \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{Ch}\frac{m\pi y}{a} \operatorname{Ch}\frac{m\pi b}{a} \right\} \cos\frac{m\pi x}{a}$$

wo C_n und D_m willkürliche Koeffiziente bezeichnen.

Die Ausdrücke in { } lassen sich in trigonometrische Reihen zerlegen, u. zw.:

$$\operatorname{Ch}(2n+1)\frac{\pi x}{b} = \frac{4}{\pi}(2n+1)\, ab \operatorname{Sh}(2n+1)\frac{\pi a}{2b} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2n+1)^2 a^2 + 4m^2 b^2} \cos\frac{m\pi x}{a},$$

$$(2n+1)\frac{\pi x}{2b} \operatorname{Sh}(2n+1)\frac{\pi x}{2b} =$$

$$= \frac{4}{\pi}(2n+1)\, ab \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2n+1)^2 a^2 + 4m^2 b^2} \left[(2n+1)\frac{\pi a}{2b} \operatorname{Ch}(2n+1)\frac{\pi a}{2b} + \right.$$

$$\left. + \frac{(2n+1)^2 a^2 - 4m^2 b^2}{(2n+1)^2 a^2 + 4m^2 b^2} \operatorname{Sh}(2n+1)\frac{\pi a}{2b} \right] \cos\frac{m\pi x}{a},$$

$$\operatorname{Sh}\frac{m\pi y}{a} = \frac{8}{\pi}\, mab \operatorname{Ch}\frac{m\pi b}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 a^2 + 4m^2 b^2} \sin(2n+1)\frac{\pi y}{2b},$$

$$\frac{m\pi y}{a} \operatorname{Ch}\frac{m\pi y}{a} = \frac{8}{\pi}\, mab \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2 a^2 + 4m^2 b^2} \left[\frac{m\pi b}{a} \operatorname{Sh}\frac{m\pi b}{a} - \right.$$

$$\left. - \frac{(2n+1)^2 a^2 - 4m^2 b^2}{(2n+1)^2 a^2 + 4m^2 b^2} \operatorname{Ch}\frac{m\pi b}{a} \right] \sin(2n+1)\frac{\pi y}{2b}.$$

Dann bekommt man ψ in Form einer Doppelreihe

$$(17)\quad \psi=\frac{16}{\pi}\,a^2\,b^2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)\cdot 2m}{[(2n+1)^2a^2+4m^2b^2]^2}\left\{(-1)^m\frac{2mb}{a}\,C_n\,\mathrm{Sh}^2(2n+1)\frac{\pi a}{2b}+\right.$$

$$\left.+(-1)^n(2n+1)\,\frac{a}{b}\,D_m\,\mathrm{Ch}^2\frac{m\pi b}{a}\right\}\sin(2n+1)\frac{\pi y}{2b}\cos\frac{m\pi x}{a}\,.$$

Setzt man den Ausdruck (17) in die Randbedingungen (11) und (14), bekommt man 2 Systeme von linearen Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten C_n und D_m:

$$(18)\quad D_m\left[\frac{2m\pi b}{a}-\mathrm{Sh}\frac{2m\pi b}{a}\right]=(-1)^m\frac{16}{\pi}\frac{a^3}{b^3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n C_n\frac{(2n+1)^3\mathrm{Sh}^2(2n+1)\frac{\pi a}{2b}}{\left[(2n+1)^2\frac{a^2}{b^2}+4m^2\right]^2}\,,$$

$$(19)\quad C_n\left[(2n+1)\frac{\pi a}{b}+\mathrm{Sh}\,(2n+1)\frac{\pi a}{b}\right]+$$

$$+(-1)^n\frac{16}{\pi}\frac{b^3}{a^3}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m D_m\frac{8m^3\,\mathrm{Ch}^2\frac{m\pi b}{a}}{\left[(2n+1)^2+4m^2\frac{b^2}{a^2}\right]^2}=(-1)^n\frac{b^2}{4\,(2n+1)^6}\,.$$

Diese Gleichungen lassen sich leicht nach der Methode sukcessiver Approximationen lösen. Da bei $a>b$ die Glieder mit C_n bedeutend kleiner werden, als die mit D_m, so kann man bei der ersten Annäherung alle Glieder mit C_n, ausser C_0, vernachlässigen und aus den Gleichungen (18) die D_1, D_2, D_3 durch C_0 ausdrücken; setzt man die so gewonnenen Ausdrücke in die erste der Gleichungen (19), lässt sich C_0 bestimmen. Dann wird C_1 aus der zweiten der Gleichungen (19) bestimmt, in die Gleichungen (18) eingesetzt und lässt die vorher gewonnenen Werte von D_1, D_2, D_3 korrigieren; die setzt man dann wieder in die Gleichungen (19) ein u. s. w. Bei den üblichen Verhältnissen von $a:b$ wird aber schon die erste Annäherung genügen. Selbst bei $a:b=4$, bekommt man:

$$D_1=1{,}36\,b^2\,,\qquad C_0=1{,}70.10^{-5}\,b^2\,,$$
$$D_2=-0{,}0463\,b^2\,,\quad C_1=-1{,}80.10^{-19}\,b^2\,.$$
$$D_3=0{,}00289\,b^2\,.$$

Bled am 30 Dezember 1936.