Etude sur l'application des transformations de contact à l'intégration d'équations différentielles

Par

NIKOLAS SALTYKOW

1. Il s'agit, dans les lignes qui vont suivre, d'étudier les cas particuliers remarquables des transformations tangentielles, où les équations différentielles transformées deviennent des équations fonctionnelles indépendantes des dérivées.

Un exemple, le plus simple, est donné par l'équation différentielle ordinaire classique de Clairaut,

$$y - xy' = f(y') \ .$$

Les deux fonctions

$$X \equiv y' \ , \qquad Y \equiv y - xy'$$

définissent bien une transformation de contact. En introduisant les nouvelles variables x_1, y_1, y_1', au moyen des relations

$$y' = x_1 \ , \qquad y - xy' = y_1 \ , \qquad x = -y_1' \ ,$$

l'équation considérée de Clairaut, en nouvelles variables, devient indépendante de y':

$$y_1 = f(x_1) \ .$$

S. Lie s'était servi de ses multiplicités intégrales, pour expliquer les difficultés qui interviennent dans les circonstances citées. D'autre part, le professeur V. P. Ermakoff avait ingénieusement tranché toutes les difficultés en démontrant de quelle manière que l'on pouvait néanmoins obtenir l'intégrale de l'équation primitive donnée. Dernièrement M. N. M. Gunter avait étudié la même quéstion, dans son livre sur l'intégration des équations aux dérivées partielles publié en russe, en se basant sur les multiplicités intégrales de S. Lie. On trouvera, dans le présent travail, plusieurs considérations complémentaires qui seront développées, concernant les intégrales de S. Lie, de point de vue sur lequel nous avons toujours insisté[1]).

2. Considérons, dans ce but, les formules générales

$$\left\{\begin{aligned} X(x,y,y') &= x_1 , \\ Y(x,y,y') &= y_1 , \\ P(x,y,y') &= y_1' , \end{aligned}\right. \tag{1}$$

les fonctions X, Y, P étant distinctes par rapport aux anciennes variables x, y, y' dans un domaine bien déterminé de la variation des variables.

Les formules (1) définissent une transformation de contact, si les anciennes variables, ainsi que les nouvelles x_1, y_1, y_1', vérifient respectivement les relations

$$dy - y'\,dx = 0 \tag{2}$$

$$dy_1 - y_1'\,dx_1 = 0 . \tag{3}$$

Cela étant, supposons qu'une équation différentielle ordinaire

$$F(x,y,y') = 0 \tag{4}$$

devienne, en nouvelles variables, indépendante de la dérivée y_1'. Supposons, donc, que l'équation transformée donne :

$$y_1 = f(x_1) . \tag{5}$$

Or, les nouvelles variables vérifiant la relation (3), il s'ensuit, grâce à l'équation (5) :

$$[\,f'(x_1) - y_1'\,]\,dx_1 = 0 .$$

---

1) *N. Saltykow* — *Sur les intégrales de S. Lie* (Comptes rendus, 1903).

Il y a deux hypothèses à considérer:

1°,

(6) $$dx_1 = 0 \ , \qquad x_1 = C \ ,$$

C désignant une constante arbitraire, ou

2°,

(7) $$y_1' = f'(x_1) \ .$$

On remplace avantageusement, pour composer les intégrales correspondantes de l'équation (4), l'ensemble des formules (1) par celles qui en dérivent, grâce à la formule principale de la transformation considérée, à savoir:

(8) $$\Phi(x, y, x_1, y_1) = 0$$

et par ses deux équations dérivées

(9) $$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' = 0 \ ,$$

(10) $$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} y'_1 = 0 \ .$$

Substituons, d'abord, dans la formule (8) les valeurs de x_1 et de y_1 résultant des formules (6) et (5). On en tire immédiatement l'intégrale générale de l'équation donnée (4) sous la forme suivante:

(11) $$\Phi(x, y, C, f(C)) = 0 \ .$$

D'autre part, la substitution des valeurs (5) et (7) de y_1 et de y'_1, dans les formules (8) et (10), produit l'intégrale sous la forme de l'ensemble des deux équations:

(12) $$\left\{ \begin{aligned} & \Phi(x, y, x_1, f(x_1)) = 0 \ , \\ & \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial f} f'(x_1) = 0 \ , \end{aligned} \right.$$

où x_1 joue le rôle d'un paramètre variable. C'est l'intégrale singulière de l'équation (4) que les formules (12) répresentent. On voit aisément que ces dernières formules définissent bien l'intégrale singulière qui s'obtient de l'intégrale générale (11), au moyen de la méthode de la variation des constantes arbitraires, le paramètre variable C étant remplacé, dans le cas considéré, par la désignation x_1.

3. Passons, à présent, à une équation aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue z des deux variables indépendantes x et y. L'extension des considérations exposées sur l'équation généralisée de Clairaut a été faite antérieurement par N. Saltykow [2]).

Considérons maintenant le cas général d'une équation quelconque aux dérivées partielles du premier ordre:

$$F(x,y,z,p,q)=0\ , \tag{13}$$

p et q désignant respectivement les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Supposons que l'on ait une transformation de contact

$$\left\{\begin{aligned} X(x,y,z,p,q) &= x_1\ , \\ Y(x,y,z,p,q) &= y_1\ , \\ Z(x,y,z,p,q) &= z_1\ , \\ P(x,y,z,p,q) &= p_1\ , \\ Q(x,y,z,p,q) &= q_1\ , \end{aligned}\right. \tag{14}$$

les anciennes et les nouvelles variables,

$$x_1\ , y_1\ , z_1\ , p_1\ , q_1\ ,$$

vérifiant respectivement les relations suivantes:

$$\begin{aligned} dz &= pdx + pdy\ , \\ dz_1 &= p_1\,dx_1 + q_1\,dy_1\ . \end{aligned} \tag{15}$$

Supposons que l'équation étudiée (13), étant transformée en nouvelles variables, devienne indépendante de nouvelles dérivées:

$$z_1 = f(x_1\,, y_1)\ . \tag{16}$$

---

[2]) *N. Saltykow — Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction inconnue. Paris, Gauthier—Villars, 1924* Chapitre XI. p. 157, No 105.

Par conséquent, la formule (15) prend la forme suivante:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} - p_1\right) dx_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y_1} - q_1\right) dy_1 = 0 \ ,$$

Il y a donc lieu d'examiner les trois cas suivants:

1°,

$$dx_1 = 0 \ , \qquad dy_1 = 0 \ ,$$

ou bien

(17) $$x_1 = C_1 \ , \qquad y_1 = C_2 \ ,$$

C_1 et C_2 désignant deux constantes arbitraires;

2°,

(18) $$\left\{ \begin{aligned} & y_1 = \varphi(x_1) \ , \\ & \frac{\partial f}{\partial x_1} - p_1 + \varphi'(x_1)\left(\frac{\partial f}{\partial y_1} - q_1\right) = 0 \ , \end{aligned} \right.$$

φ désignant une fonction arbitraire;

3°,

(19) $$\frac{\partial f}{\partial x_1} - p_1 = 0 \ , \qquad \frac{\partial f}{\partial y_1} - q_1 = 0 .$$

Remplaçons les formules de transformation (14) par celles qui en dérivent, au moyen de la formule principale de la transformation considérée et les quatre équations dérivées de cette dernière:

(20) $$\Phi(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} p = 0 \ , \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} q = 0 \ ,$$

(21) $$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} p_1 = 0 \ , \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} q_1 = 0 \ .$$

Il suit de la formule (20), en vertu de la formule (16) et des intégrales (17), l'intégrale complète de l'équation donnée (13):

$$\Phi[x, y, z, C_1, C_2, f(C_1, C_2)] = 0 \ ,$$

à deux constantes arbitraires C_1 et C_2.

L'intégrale générale de l'équation (13) est définie, grâce aux formules (20), (16) et (18), par l'ensemble des deux équations suivantes:

$$\Phi[x, y, z, x_1, \varphi(x_1), f(x_1, \varphi(x_1))] = 0 ,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \varphi'(x_1) + \frac{\partial \Phi}{\partial f}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \varphi'(x_1)\right] = 0,$$

à une fonction arbitraire φ d'un paramètre variable qui est ici désigné par x_1.

Enfin, l'ensemble des formules (20) et (21), (16) et (19) donne l'intégrale singulière de l'équation (13) sous la forme des trois équations suivantes:

$$\Phi[x, y, z, x_1, y_1, f(x_1, y_1)] = 0 ,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 , \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial y_1} = 0,$$

x_1 et y_1 y jouant le rôle des deux paramètres variables.

On vient d'obtenir immédiatement toutes les trois intégrales de l'équation donnée (13), grâce à la relation différentielle (15). Il va de soi même que les mêmes intégrales, générale et singulière, résultent aussi de la première intégrale obtenue complète, au moyen de la variation des constantes arbitraires qui y rentrent.

4. Etudions, à présent, le cas général d'intégration d'un système fermé de m équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue z de n variables indépendantes $x_1, x_2, \cdots, x_n$:

$$(22) \qquad \begin{cases} F_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, z, p_1, p_2, \cdots p_n) = 0 , \\ (i = 1, 2, \cdots, m) , \end{cases}$$

$p_1, p_2, \cdots, p_n$ désignant respectivement les dérivées partielles du premier ordre de z par rapport à $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

Considérons le système de $2n + 1$ formules qui définissent une transformation tangentielle:

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, z, p_1, p_2, \cdots, p_n) = x_i', \\ Z(x_1, x_2, \cdots, x_n, z, p_1, p_2, \cdots, p_n) = z', \\ P_i(x_1, x_2, \cdots, x_n, z, p_1, p_2, \cdots, p_n) = p_i', \\ \qquad (i = 1, 2, \cdots, n), \end{array} \right.$$

les anciennes et les nouvelles variables,

$$x_1', x_2', \cdots, x_n', z', p_1', p_2', \cdots, p_n',$$

vérifiant respectivement les relations différentielles:

$$dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \cdots + p_n dx_n,$$

$$(24) \qquad dz' = p_1' dx_1' + p_2' dx_2' + \cdots + p_n' dx_n'.$$

Cela posé considérons, d'abord, le cas le plus simple, où les équations (22) transformées ne contiennent point les nouvelles variables de la seconde classe. Supposons, donc, que les équations en question deviennent:

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} z' = f(x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-m+1}), \\ x'_{n-m+j+1} = f_j(x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-m+1}), \\ j = 1, 2, \cdots, m-1. \end{array} \right.$$

La relation (24), grâce à ces dernières équations, prendra la forme suivante:

$$\sum_{h=1}^{n-m+1} \left(p'_h - \frac{\partial f}{\partial x'_h} + \sum_{j=1}^{n-1} p'_{n-m+j+1} \frac{\partial f_j}{\partial x'_h} \right) dx'_h = 0.$$

Etudions les trois cas suivants qui peuvent s'y présenter:

1°,

$$dx'_h = 0, \qquad (h = 1, 2, \cdots, n-m+1),$$

ou bien

$$(26) \qquad x'_h = C_h, \qquad (h = 1, 2, \cdots, n-m+1),$$

C_h désignant $n-m+1$ constantes arbitraires distinctes;

2°,

$$(27)\quad \begin{cases} x'_{n-m+1} = \psi(x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-m}) , \\ p'_k - \dfrac{\partial f}{\partial x'_k} + \sum\limits_{j=1}^{m-1} p'_{nm-+j+1} \dfrac{\partial f_j}{\partial x'_k} + \\ + \dfrac{\partial \psi}{\partial x'_k}\left(p'_{n-m+1} - \dfrac{\partial f}{\partial x'_{n-m+1}} + \sum\limits_{j=1}^{m-1} p'_{n-m+j+1} \dfrac{\partial f_j}{\partial x'_{n-m+1}}\right) = 0, \\ \qquad (k = 1, 2, \cdots, n-m) , \end{cases}$$

ψ désignant une fonction arbitraire;

3°,

$$(28)\quad \begin{cases} p'_h - \dfrac{\partial f}{\partial x'_h} + \sum\limits_{j=1}^{m-1} p'_{n-m+j+1} \dfrac{\partial f_i}{\partial x'_h} = 0 , \\ \qquad (h = 1, z, \cdots, n-m+1) . \end{cases}$$

Introduisons, à présent, pour composer les intégrales correspondantes du système donné (22), les formules qui correspondent à celles (23).

Supposons, d'abord, que cette dernière transformation appartienne à la classe zéro, c'est à dire que les formules (23) soient équivalentes aux suivantes:

$$(29)\qquad \Phi(x_1, x_2, \cdots, x_n, z, x'_1, x'_2, \cdots, x'_n, z') = 0 ,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} p_i = 0 , \quad (i = 1, 2, \cdots, n) ,$$

$$(30)\qquad \frac{\partial \Phi}{\partial x'_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial z'} p'_i = 0 , \quad (i = 1, 2, \cdots, n) .$$

Cela étant, l'élimination des nouvelles variables, entre les équations (29), (25) et (26) nous offre, l'intégrale complète du système (22) sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} &\Phi[x_1, x_2, \cdots, x_n, z, C_1, C_2, \cdots, C_{n-m+1}, f_1(C_1, C_2, \cdots, C_{n-m+1}), \\ &\quad f_2(C_1, C_2, \cdots, C_{n-m+1}), \cdots, f_{m-1}(C_1, C_2, \cdots, C_{n-m+1}), \\ &\qquad\qquad f(C_1, C_2, \cdots, C_{n-m+1})] = 0, \end{aligned}$$

à $n-m+1$ constantes arbitraires $C_1, C_2, \cdots, C_{n-m+1}$.

Or, si l'on élimine les nouvelles variables, entre les formules (29), (25), (27) et (30), on obtiendra l'intégrale générale du système (22) sous la forme d'un ensemble de $n-m+1$ équations suivantes:

$$\begin{aligned}
\Phi [x_1, x_2, \cdots x_n , z, x'_1 , x'_2, \cdots , x'_{n-m}, \psi (x'_1, x'_2, \cdots , x'_{n-m}) ,\\
f_1 (x'_1 , x'_2 , \cdots , x'_{n-m} , \psi (x'_1 , x'_2 , \cdots , x'_{n-m})) ,\\
f_2 (x'_1 , x'_2 , \cdots , x'_{n-m} , \psi (x'_1 , x'_2 , \cdots , x'_{n-m})) ,\\
\cdots , f_{m-1} (x'_1 , x'_2 , \cdots , x'_{n-m} , \psi (x'_1 , x'_2 , \cdots , x'_{n-m})) ,\\
f (x'_1 , x'_2 , \cdots , x'_{n-m} , \psi (x'_1 , x'_2 , \cdots , x'_{n-m}))] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial x'_k} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial\Phi}{\partial f_j} \frac{\partial f_j}{\partial x'_k} + \frac{\partial\Phi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x'_k} +\\
+ \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\psi} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial\Phi}{\partial f_j} \frac{\partial f_j}{\partial\psi} + \frac{\partial\Phi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial\psi} \right) \frac{\partial\psi}{\partial x'_k} = 0 ,\\
(k = 1 , 2 , \cdots , n - m) ,
\end{aligned}$$

ψ désignant une fonction arbitraire des quantités variables $x'_1 , x'_2 , \cdots , x'_{n-m}$ qui jouent le rôle des $n-m$ paramètres variables.

Enfin, éliminant les nouvelles variables, entre les équations (29), (25), (28) et (30), on a l'intégrale singulière du système (22):

$$\begin{aligned}
\Phi [x_1, x_2, \cdots , x_n, z, x'_1, x'_2, \cdots , x'_{n-m+1}, f_1 (x'_1 , x'_2, \cdots , x'_{n-m+1}) ,\\
f_2 (x'_1 , x'_2 , \cdots , x'_{n-m+1}) , \cdots , f_{m-1} (x'_1 , x'_2 , \cdots , x'_{n-m+1}) ,\\
f (x'_1 , x'_2 , \cdots , x'_{n-m+1})] = 0 ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial x_h} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial\Phi}{\partial f_j} \frac{\partial f_j}{\partial x'_h} + \frac{\partial\Phi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x'_h} = 0 ,\\
(h = 1 , 2 , \cdots , n - m + 1) ,
\end{aligned}$$

$x'_1 , x'_2 , \cdots , x'_{n-m+1}$ jouant le rôle des $n-m+1$ paramètres variables.

Il va sans dire que les formules que l'on vient d'obtenir pour les intégrales, générale et singulière, résultent, en même temps, par la variation les constantes arbitraires dans l'intégrale complète.

5. Supposons maintenant que la transformation de contact considérée (23) appartienne à la classe q. Les formules de cette dernière transformation se mettent alors sous la nouvelle forme suivante[3].

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{l} z = \varphi(x_1, x_2, \cdots, x_{n-q}, x'_1, x'_2, \cdots, x'_n, z'), \\ x_{n-q+k} = \varphi_k\,(x_1, x_2, \cdots, x_{n-q},\ x'_1, x'_2, \cdots, x'_n, z'), \\ \qquad (k = 1, 2, \cdots, q), \end{array}\right.$$

$$p_\nu = \frac{\partial S}{\partial x_\nu}, \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n-q),$$

$$(32)\qquad \frac{\partial S}{\partial x'_\sigma} + \frac{\partial S}{\partial z'}\, p'_\sigma = 0, \quad (\sigma = 1, 2, \cdots, n),$$

où l'on a introduit la désination abrégée suivante

$$(33)\qquad S \equiv \varphi - \sum_{k=1}^{q} \varphi_k\, p_{n-q+k}.$$

Les formules (31), (25) et (26) définissent, dans l'hypothèse considérée, l'intégrale complète de S. Lie, de la classe q, du système (22) sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} z = \varphi\,[\,& x_1, x_2, \cdots, x_{n-q}, C_1, C_2, \cdots, C_{n-m+1}, f_1(C_1, C_2, \cdots, C_{n-m+1}), \\ & f_2(C_1, C_2, \cdots, C_{n-m+1}), \cdots, f_{m-1}(C_1, C_2, \cdots, C_{n-m+1}), \\ & f(C_1, C_2, \cdots, C_{n-m+1})\,], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{n-q+k} = \varphi_k[\,& x_1, x_2, \cdots, x_{n-q}, C_1, C_2, \cdots, C_{n-m+1}, \\ & f_1(C_1, C_2, \cdots, C_{n-m+1}), \\ & f_2(C_1, C_2, \cdots, C_{n-m+1}), \cdots, f_{m-1}(C_1, C_2, \cdots, C_{n-m+1}), \\ & f(C_1, C_2, \cdots, C_{n-m+1})\,]. \\ & (k = 1, 2, \cdots, q), \end{aligned}$$

$C_1, C_2, \cdots, C_{n-m+1}$ désignant $n - m + 1$ constantes arbitraires,

[3]) Ce dernier résultat a été détaillement étudié dans les conférences faites par N. Saltykow, en 1931 et 1936, dans les Universités Belges sous les auspices de la Fondation Universitaire de Belgique.

Il suffit, pour former l'intégrale complète de Lagrange, d'appliquer la formule correspondante de passage donnée par N. Saltykow[4]).

Pour avoir l'intégrale générale de S. Lie on n'a qu'à éliminer, des formules (31), (25) et (27), toutes les variables p'_σ, au moyen des formules (32). Il s'ensuit:

$$\begin{aligned} z = \varphi[& x_1, x_2, \cdots, x_{n-q}, x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-m}, \psi(x'_1, x'_2 \cdots, x'_{n-m}), \\ & f_1(x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-m}, \psi(x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-m})), \\ & f_2(x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-m}, \psi(x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-m})), \\ & \cdots, f_{m-1}(x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-m}, \psi(x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-m})), \\ & f(x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-m}, \psi(x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-m}))], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{n-q+k} = \varphi_k[& x_1, x_2 \cdots, x_{n-q}, x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-m}, \psi(x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-m}), \\ & f_1(x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-m}, \psi(x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-m})), \\ & f_2(x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-m}, \psi(x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-m})), \\ & \cdots, f_{m-1}(x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-m}, \psi(x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-m})), \\ & f(x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-m}, \psi(x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-m}))], \\ & (k = 1, 2, \cdots, q), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial S}{\partial x'_\nu} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial S}{\partial f_j} \frac{\partial f_j}{\partial x'_\nu} + \frac{\partial S}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x'_\nu} + \\ & \qquad + \left(\frac{\partial S}{\partial \psi} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial S}{\partial f_j} \frac{\partial f_j}{\partial \psi} + \frac{\partial S}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \psi} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x'_\nu} = 0, \\ & \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n-m) \end{aligned}$$

ψ désignant la fonction arbitraire des quantités $x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-m}$ qui sont, considérées ici, à titre des paramètres variables, la fonction S ayant sa signification (33).

Enfin, l'ensemble d'équations (31), (25) et (28), en y éliminant toutes les variables p'_σ, grâce aux équations (32), représentera l'intégrale singulière, au sens de S. Lie, de la manière suivante:

---

[4]) *N. Saltykow — Sur les relations entre les intégrales complètes de S. Lie et de Lagrange* (Comptes rendus, 10 aout 1903, t. 137 p. 377).

$$
\begin{aligned}
z = \varphi [& x_1 , x_2 , \cdots , x_{n-q} , \; x'_1 , x'_2 , \cdots , x'_{n-m+1} , \\
& f_1 (x'_1 , x'_2 , \cdots , x'_{n-m+1}) , \; f_2 (x'_1 , x'_2 , \cdots , x'_{n-m+1}) , \\
& \cdots , f_{m-1} (x'_1 , x'_2 , \cdots , x'_{n-m+1}) , \; f (x'_1 , x'_2 , \cdots , x'_{n-m+1})] , \\
x_{n-q+k} = \varphi_k [& x_1 , x_2 , \cdots , x_{n-q} , \; x'_1 , x'_2 , \cdots , x'_{n-m+1} , \\
& f_1 (x'_1 , x'_2 , \cdots , x'_{n-m+1}) , \; f_2 (x'_1 , x'_2 , \cdots , x'_{n-m+1}) , \\
& \cdots , f_{m-1} (x'_1 , x'_2 , \cdots , x'_{n-m+1}) , \; f (x'_1 , x'_2 , \cdots , x'_{n-m+1})] ,
\end{aligned}
$$

$$
(k = 1 , 2 , \cdots , q) ,
$$

$$
\frac{\partial S}{\partial x'_h} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial S}{\partial f_j} \frac{\partial f_j}{\partial x'_h} + \frac{\partial S}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x'_h} = 0 ,
$$

$$
(h = 1 , 2 , \cdots , n - m + 1) ,
$$

$x'_1 , x'_2 , \cdots , x'_{n-m+1}$ représentant les $n - m + 1$ paramètres variables et la fonction S ayant la signification (33).

Il va de soi même que les deux dernières intégrales, générale et singulière, s'obtiennent aussi de l'intégrale complète de S. Lie, au moyen de la méthode de la variation des constantes arbitraires.

6. Etudions, à présent, l'hypothèse plus compliquée, en supposant que le système (22), transformé au moyen des formules (23), contienne $l + 1$ relations qui soient indépendantes, en nouvelles variables, des variables canoniques de la seconde classe. Bornons nous, d'abord, par l'étude d'un cas particulier, où les équations transformées se présentent sous la forme suivante :

$$
(34) \qquad \left\{ \begin{aligned}
& z' = f (x'_1 , x'_2 , \cdots , x'_{n-l}) , \\
& x'_{n-l+j} = f_j (x'_1 , x'_2 , \cdots , x'_{n-l}) , \\
& (j = 1 , 2 , \cdots , l) ,
\end{aligned} \right.
$$

$$
(35) \quad \left\{ \begin{aligned}
& p'_\nu = F'_\nu (x'_1 , x'_2 , \cdots , x'_{n-l} , \; p'_{m-l} , p'_{m-l+1} , \cdots , p'_n) , \\
& (\nu = 1 , 2 , \cdots , m - l + 1) ,
\end{aligned} \right.
$$

les fonctions F'_ν étant linéaires par rapport aux variables canoniques de la seconde classe, de sorte que l'on ait :

$$
(36) \qquad \left\{ \begin{aligned}
& F'_\nu = \sum_{k=1}^{n-m+l+1} A_{\nu k} \, p'_{m-l+k-1} + A_\nu , \\
& (\nu = 1 , 2 , \cdots , m - l - 1) ,
\end{aligned} \right.
$$

tous les coefficients $A_{\nu k}$ et A_ν ne dependant, grâce aux équations (34), que des variables $x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-l}$.

Cela posé, il faut bien remarquer, qu'en vertu des propriétés des transformations tangentielles, le système d'équations (34) et (35) est fermé.

Il s'ensuit que les parenthèses de Poisson formées des équations (35), deux à deux, doivent s'annuler. Ces dernières parenthèses, grâce aux formules (36), deviennent :

$$\begin{aligned}(p'_\nu - F'_\nu, p'_h - F'_h) \equiv &- \frac{\partial F'_h}{\partial x'_\nu} + \sum_{k=1}^{n-m+1} A_{\nu k} \frac{\partial F'_k}{\partial x'_{m-l+k-1}} + \\ &+ \frac{\partial F'_\nu}{\partial x'_h} - \sum_{j=1}^{n-m+1} A_{hj} \frac{\partial F'_\nu}{\partial x'_{m-l+j-1}} \equiv \\ \equiv \sum_{j=1}^{n-m+1} \left(\sum_{k=1}^{n-m+1} A_{\nu k} \frac{\partial A_{hj}}{\partial x'_{m-l+k-1}} - \frac{\partial A_{hj}}{\partial x'_\nu} \right) p'_{m-l+j-1} &- \frac{\partial A_h}{\partial x'_\nu} + \\ + \sum_{k=1}^{n-m+1} \left(\frac{\partial A_{\nu k}}{\partial x'_h} - \sum_{j=1}^{n-m+1} A_{hj} \frac{\partial A_{\nu k}}{\partial x'_{m-l+j-1}} \right) p'_{m-l+k-1} &+ \frac{\partial A_\nu}{\partial x'_h} = 0 .\end{aligned}$$

Changeons, dans la seconde ligne de cette dernière égalité, la désignation des indices k et j inversement de la manière à mettre cette dernière condition sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n-m+1} \left(\sum_{k=1}^{n-m+1} A_{\nu k} \frac{\partial A_{hj}}{\partial x'_{m-l+k-1}} - \frac{\partial A_{hj}}{\partial x'_\nu} - \sum_{k=1}^{n-m+1} A_{hk} \frac{\partial A_{\nu j}}{\partial x'_{m-l+k-1}} + \right. \\ \left. + \frac{\partial A_{\nu j}}{\partial x'_h} \right) p_{m-l+j-1} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x'_h} - \frac{\partial A_h}{\partial x'_\nu} = 0 ,\end{aligned}$$

pour toutes les valeurs distinctes des indices ν et h, à partir de 1 jusqu'à $m - l - 1$.

Comme ces dernières égalités ne dépendent point des variables $p'_1, p'_2, \ldots, p'_{m-l-1}$ et comme les parenthèses, entre les autres équations (34) et (35), ne donnent pas non plus de nouvelles relations entre les variables $p_{m-l+j-1}$, il s'ensuit les identités suivantes :

$$(37)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n-m+1} A_{\nu k}\frac{\partial A_{hj}}{\partial x'_{m-l+k-1}} - \frac{\partial A_{hj}}{\partial x'_\nu} = \sum_{k=1}^{n-m+1} A_{hk}\frac{\partial A_{\nu j}}{\partial x'_{m-l+k-1}} - \frac{\partial A_{\nu j}}{\partial x'_h}\,, \\ (\nu, h = 1, 2, \cdots, m-l-1)\,,\ (j = 1, 2, \cdots, n-m+1)\,, \end{cases}$$

$$\frac{\partial A_\nu}{\partial x'_h} = \frac{\partial A_h}{\partial x'_\nu}\,, \quad (\nu, h = 1\,, 2\,, \cdots, m-l-1)\,.$$

Or, les identités (37) démontrent que le système de $n-$ $-m+1$ équations, correspondantes au système linéaire (35),

$$(38)\quad \begin{cases} dx'_{m-l+j-1} = -\displaystyle\sum_{\nu=1}^{m-l-1} A_{\nu j}\, dx'_\nu\,, \\ (j = 1\,, 2\,, \cdots n-m+1) \end{cases}$$

représente un système aux différentielles totales.

Supposons donc que l'on obtienne l'intégrale complète de ce dernier système (38) sous la forme:

$$(39)\quad \begin{cases} x'_{m-l+j-1} = \theta_j(x'_1\,, x'_2\,, \cdots, x'_{m-l-1}\,,\ C_1\,, C_2\,, \cdots, C_{n-m+1})\,, \\ (j = 1\,, 2\,, \cdots . n-m+1)\,, \end{cases}$$

$C_1, C_2, \cdots, C_{n-m+1}$ désignant $n-m+1$ constantes arbitraires distinctes.

Substituant les valeurs obtenues (39) dans les formules (34), désignons le résultat correspondant par les formules:

$$(40)\quad \begin{cases} z' = \theta(x'_1\,, x'_2\,, \cdots, x'_{m-l-1}\,,\ C_1\,, C_2\,, C_{n-m+1})\,, \\ x'_{n-l+1} = \theta_{n-m+i+1}(x'_1, x'_2, \cdots, x'_{m-l-1}\,, C_1, C_2, \cdots, C_{n-m+1}), \\ (i = 1\,, 2\,, \cdots, l)\,. \end{cases}$$

Cela étant, retournons aux anciennes variables pour composer l'intégrale du système primitif (22).

Si l'on suppose, d'abord, que la transformation tangentielle (23) appartienne à la classe zéro, alors l'intégrale complète de Lagrange du système (22) s'obtient en éliminant les nouvelles variables entre les équations (29), (30), (35), (39) et (40). On en tire immédiatement les $m-l$ équations suivantes:

$$
(41)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\Phi\,[\,x_1\,,x_2\,,\cdots,x_n\,,\ z\,,\ x'_1\,,x'_2\,,\cdots,x'_{m-l-1}\,,\\
&\qquad \theta_1\,(x'_1\,,x'_2\,,\cdots,x'_{m-l-1}\,,\ C_1\,,C_2\,,\cdots,C_{n-m+1})\,,\\
&\qquad \theta_2\,(x'_1\,,x'_2\,,\cdots,x'_{m-l-1}\,,\ C_1\,,C_2\,,\cdots,C_{n-m+1})\,,\\
&\cdots,\theta_{n-m+1}\,(x'_1\,,x'_2\,,\cdots,x'_{m-l-1}\,,\ C_1\,,\ C_2\,,\cdots,C_{n-m+1})\,,\\
&\theta_{n-m+2}\,(x'_1\,,x'_2\,,\cdots,x'_{m-l-1}\,,\ C_1\,,C_2\,,\cdots,\ C_{n-m+1})\,,\\
&\cdots,\theta_{n-m+l+1}\,(x'_1\,,x'_2\,,\cdots,x'_{m-l-1}\,,\ C_1\,,C_2\,,\cdots,C_{n-m+1})\,,\\
&\qquad \theta\,(x'_1\,,x'_2\,,\cdots,x'_{m-l-1}\,,\ C_1\,,\ C_2\,,\cdots,C_{n-m+1})\,]=0\ ,\\
&\qquad\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x'_\nu}+\sum_{k=1}^{n-m+l+1}A_{\nu k}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta_k}+A_\nu\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}=0\ ,\\
&\qquad\qquad (\nu=1\,,2\,,\cdots,m-l-1)
\end{aligned}
\right.
$$

Grâce aux propriétés fondamentales des transformations tangentielles, les équations (30) sont résolubles par rapport aux variables $x'_1\,,x'_2\,,\cdots,x'_n$. Par conséquent, il est toujours possible, au moins dn point de vue théorique, d'éliminer les quantités $x'_1\,,x'_2\,,\cdots,x'_{m-l-1}$ entre les équations (41).

Si la transformation de contact introduite (23) appartenait à la classe q, on composerait, d'abord, l'intégrale complète de S. Lie du système (22). Elle va se présenter, en vertu des équations (31), (39) et (40), sous la forme suivante:

$$
\begin{aligned}
z=\varphi\,[\,&x_1\,,x_2\,,\cdots,x_{n-q}\,,\ x'_1\,,x'_2\,,\cdots,x'_{m-l-1}\ ,\\
&\theta_1\,(x'_1\,,x'_2\,,\cdots,x'_{m-l-1}\,,\ C_1\,,C_2\,,\cdots,C_{n-m+1})\ ,\\
&\theta_2\,(x'_1\,,x'_2\,,\cdots,x'_{m-l-1}\,,\ C_1\,,C_2\,,\cdots,C_{n-m+1})\ ,\\
&\cdots,\theta_{n-m+1}\,(x'_1\,,x'_2\,,\cdots,x'_{m-l-1}\,,\ C_1\,,C_2\,,\cdots,C_{n-m+1})\ ,\\
&\theta_{n-m+2}\,(x'_1\,,x'_2\,,\cdots,x'_{m-l-1}\,,\ C_1\,,C_2\,,\cdots,C_{n-m+1})\ ,\\
&\cdots,\theta_{n-m+l+1}\,(x'_1\,,x'_2\,,\cdots,x'_{m-l-1}\,,\ C_1\,,C_2\,,\cdots,C_{n-m+1})\ ,\\
&\theta\,(x'_1\,,x'_2\,,\cdots,x'_{m-l-1}\,,\ C_1\,,C_2\,,\cdots,C_{n-m+1})\,]\\
x_{n-q+k}=\varphi_k\,[\,&x_1\,,x_2\,,\cdots,x_{n-q}\,,\ x'_1\,,x'_2\,,\cdots,x'_{m-l-1}\ ,\\
&\theta_1\,(x'_1\,,x'_2\,,\cdots,x'_{m-l-1}\,,\ C_1\,,C_2\,,\cdots,C_{n-m+1})\ ,\\
&\theta_2\,(x'_1\,,x'_2\,,\cdots,x'_{m-l-1}\,,\ C_1\,,C_2\,,\cdots,C_{n-m+1})\ ,\\
&\cdots,\theta_{n-m+1}\,(x'_1\,,x'_2\,,\cdots,x'_{m-l-1}\,,\ C_1\,,C_2\,,\cdots,C_{n-m+1})\ ,\\
&\theta_{n-m+2}\,(x'_1\,,x'_2\,,\cdots,x'_{m-l-1}\,,\ C_1\,,C_2\,,\cdots,C_{n-m+1})\ ,\\
&\cdots,\theta_{n-m+l+1}\,(x'_1\,,x'_2\,,\cdots,x'_{m-l-1}\,,\ C_1\,,C_2\,,\cdots,C_{n-m+1})\ ,\\
&\theta\,(x'_1\,,x'_2\,,\cdots,x'_{m-l-1}\,,\ C_1\,,C_2\,,\cdots,C_{n-m+1})\,]\ ,\\
&\qquad (k=1\,,2\,,\cdots,q)\ .
\end{aligned}
$$

On en tire, de suite, l'intégrale complète de Lagrange, au moyen de la formule de N. Saltykow mentionnée antérieurement[4]).

7. On vient d'étudier le cas, où le système (35), a été supposé être linéaire.

Or, si l'on ne se trouvait pas dans ces dernières conditions, il serait aisé d'y réduire le problème considéré.

En effet, si les équations (35), n'étaient pas linéaires, la présence d'équations (34) démontre que l'ensemble des formules (34) et (35) représente un système d'équations au sens de S. Lie. Par conséquant, la théorie de N. Saltykow concernant la classification de ces dernières équations[5]) donne le moyen d'ajouter aux équations (35) des nouvelles, dont l'ensemble avec les dernières offre un système d'équations linéaires.

On revient de cette manière au problème qui vient d'être élucidé.

8. Passons, maintenant, è l'étude des transformations tangentielles restreintes[6]).

Supposons, à cet effet, que l'on connaisse l'intégrale complète classique des $k\,(k<m)$ premières équations du système (22):

$$z = V(x_1, x_2, \cdots, x_n, x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-k}, z'), \tag{42}$$

$x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-k}, z'$ désignant $n-k+1$ constantes arbitraires distinctes qui se sont introduites, grâce à l'intégration des équations indiquées, la condition suivante étant vérifiée:

$$D\left(\frac{V, \dfrac{\partial V}{\partial x_{k+1}}, \cdots, \dfrac{\partial V}{\partial x_n}}{x'_1, x'_2, \cdots, z'}\right) \gtrless 0 .$$

Cela posé, composons les formules suivantes:

$$p_s = \frac{\partial V}{\partial x_s}, \quad (s = 1, 2, \cdots, n), \tag{43}$$

---

5) *N. Saltykow* — ***Recherches sur la théorie** des équations aux derivées partielles du premier **ordre d'une fonction** inconnue* (en russe) Kharkow 1905, Chapitre IV.

6) ***N. Saltykow** — **Sur la théorie** des equations aux dérivées partielles du **premier ordre d'une seule fonction inconnue.*** Paris Gauthiers—Villars 1924, **Chapitre XII, p. 163.**

$$(44) \qquad \frac{\partial V}{\partial x'_\nu} + \frac{\partial V}{\partial z'} p'_\nu = 0 \ , \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n-k) \ ,$$

où l'on considère les p'_ν comme les dérivées partielles $\frac{\partial z'}{\partial x'_\nu}$.

Il est connu[5]) que les $2n-k+1$ relations (42), (43) et (44) définissent une transformation restreinte de contact, où l'on considère z' comme nouvelle fonction inconnue des $n-k$ nouelles variables indépendantes $x'_1, x'_2, \cdots, x'_{n-k}$, vérifiant la relation

$$dz' = \sum_{\nu=1}^{n-k} p'_\nu \, dx'_\nu \ .$$

En introduisant les nouvelles variables on identifie les k premières équations (22). Quant aux autres $m-k$ équations, elles ne contiendront que les $2(n-k)+1$ nouvelles variables.

Cela étant, les considérations anterieurement developpées s'appliquent immédiatement aux équations transformées que l'on vient d'obtenir, car ces dernières ne diffèrent des celles, qui ont été anterieurement étudiées, que par le nombre des variables.

D'autre part, la formule principale de la transformation tangentielle étant représentée actuellement par une seule équation (42), il ne s'agirait, à présent, que des transformations de contact de l'ordre zéro.

Appliquons, donc, la théorie exposée à deux exemples de M. N. M. Gunter.

Considérons, d'abord, le système des deux équations suivantes:

$$-z + (1+x_1)p_1 + 2x_2 p_2 + 2x_3 p_3 + 2x_4 p_4 + x_2 p_1 p^2_2 = 0 \ ,$$
$$x_2 p_2^2 + x_3 p_3^2 + x_4 p_4^2 - 1 = 0 \ .$$

L'intégrale complète de la première équation se présente sous la forme

$$z = 2\left(x'_1 \sqrt{x_2} + x'_2 \sqrt{x_3} + x'_3 \sqrt{x_4}\right) + (1 + x_1 + x'^2_1)\, z' \ ,$$

x'_1, x'_2, x'_3, z' désignant quatre constantes arbitraires.

Prenons les trois premières comme nouvelles variables indépendantes et z' pour la nouvelle fonction inconnue.

Les formules de la transformation, (43) et (44), deviennent respectivement, dans notre cas,

$$p_1 = z' \,, \quad p_2 = \frac{x'_1}{\sqrt{x_2}} \,, \quad p_3 = \frac{x'_2}{\sqrt{x_3}} \,, \quad p_4 = \frac{x'_3}{\sqrt{x_4}} \,,$$

$$2(\sqrt{x_2} + x'_1 z') + (1 + x_1 + x'^2_1)p'_1 = 0 \,,$$

$$2\sqrt{x_3} + (1 + x_1 + x'^2_1)p'_2 = 0 \,,$$

$$2\sqrt{x_4} + (1 + x_1 + x'^2_1)p'_3 = 0 \,.$$

La seconde équation donnée prend, en nouvelles variables, la forme suivante:

$$x'^2_1 + x'^2_2 + x'^2_3 = 1 \,.$$

Il s'ensuit:

$$x'_3 = \pm\sqrt{1 - x'^2_1 - x'^2_2} \,.$$

Les formules générales (26) doivent être remplacées, dans le cas actuel, par les suivantes:

$$z' = C_1 \,, \quad x'_1 = C_2 \,, \quad x'_2 = C_3 \,.$$

On a, par conséquent,

$$x'_3 = \pm\sqrt{1 - C_2^2 - C_3^2} \,.$$

En substituant les quatre dernières valeurs de z', x'_1, x'_2 et x'_3 dans la formule principale de la transformation, on obtient l'intégrale complète du système considéré

$$z = 2\left[C_2\sqrt{x_2} + C_3\sqrt{x_3} \pm \sqrt{(1 - C_2^2 - C_3^2)x_4}\right] + C_1(1 + C_2^2 + x_1) \,,$$

à trois constantes arbitraires C_1, C_2 et C_3.

On voit immédiatement, de la forme de l'intégrale complète obtenue, comment on en tire l'intégrale singulière. Cette dernière conclusion resulte, en même temps, de la théorie générale exposée plus haut, si l'on y introduit les considérations complemetaires nécessaires.

Quant à l'intégrale générale, elle s'obtient en remplaçant les formules (27) par les suivantes:

$$z' = \psi(x'_1, x'_2) ,$$

$$p'_1 \mp \frac{x'_1 p'_3}{\sqrt{1 - x'^2_1 - x'^2_2}} = \frac{\partial \psi}{\partial x'_1} , \quad p'_2 \mp \frac{x'_2 p'_3}{\sqrt{1 - x'^2_1 - x'^2_2}} = \frac{\partial \psi}{\partial x'_2} .$$

Il s'ensuit l'intégrale générale en question sous la forme d'un ensemble des trois équations suivantes:

$$z = 2\left[x'_1 \sqrt{x_2} + x'_2 \sqrt{x_3} \pm \sqrt{(1 - x'^2_1 - x'^2_2)\, x_4}\right] +$$
$$+ (1 + x'_1 + x'^2_1)\, \psi(x'_1, x'_2) ,$$

$$\frac{2\left[\sqrt{x_2} + x'_1\, \psi(x'_1, x'_2)\right]}{1 + x_1 + x'^2_1} \mp \frac{2\, x'_1 \sqrt{x_3}}{(1 + x_1 + x'^2_1)\sqrt{1 - x'^2_1 - x'^2_2}} + \frac{\partial \psi}{\partial x'_2} = 0$$

$$\frac{2\sqrt{x_3}}{1 + x_1 + x'^2_1} \mp \frac{2\, x'_2 \sqrt{x_4}}{(1 + x_1 + x'^2_1)\sqrt{1 - x'^2_1 - x'^2_2}} + \frac{\partial \psi}{\partial x'_2} = 0 .$$

Le second exemple est donné par le système fermé des quatre équations suivantes[7]):

$$(45) \quad \left\{ \begin{aligned} & z = \frac{1}{2}(x_1 p_1 + x_2 p_2) + \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{x_3 p_3 + 1}\right)^2 + x_4 p_4 , \\ & x_1 \sqrt{x_1 p_1 + x_2 p_2} + x_4 = 0 , \\ & x_2 \sqrt{x_1 p_1 + x_2 p_2} - x_3\left(1 + \sqrt{x_3 p_3 + 1}\right) = 0 , \\ & p_4 + \frac{x_1 p_1}{x_4} = 0 . \end{aligned} \right.$$

Prenons l'intégrale complète de la première équation

$$z = \frac{1}{2}(x'_1 x_1 + x'_2 x_2)^2 + \frac{1}{2}(x'_3 x_3 + 2)^2 + z' x_4 ,$$

x'_1, x'_2, x'_3, z' désignant quatre constantes arbitraires.

---

7) *M. N. Gunter — Intégration d'équations aux dérivées partielles du premier ordre Leningrade. Moscou.* 1934 p. 353 (en russe).

comme formule principale de la transformation tangentielle restreinte, x'_1, x'_2, x'_3 et z' désignant respectivement les trois nouvelles variables indépendantes et leur nouvelle fonction inconnue.

M. N. M. Gunter obtient le système transformé sous la forme suivante:

$$z' = x'_1 ,$$
$$p'_1 = 1 ,$$
$$p'_2 = p'_3 ,$$

p'_1, p'_2, p'_3 désignant les nouvelles dérivées partielles du premier ordre.

Conformement aux désignations du n^0 6, puisque la transformation est restreinte, on a dans le cas considéré:

$$n = 3 , \quad m = 3 , \quad l = 0 .$$

Le système (38) se réduit, donc, à une équation unique

$$dx'_3 = -A_{11}\, dx'_1 - A_{21}\, dx'_2 ,$$

où les coefficients admettent les valeurs:

$$A_{11} \equiv 0 , \qquad A_{21} \equiv 1 .$$

Cela étant, les fonctions θ_1 et θ deviennent ici

$$\theta_1 \equiv -x'_2 + C_1 , \qquad \theta \equiv x'_1 ,$$

C_1 désignant une constante arbitraire.

Par conséquent les formules (41) prennent, dans le cas actuel, où l'on a:

$$A_1 \equiv 1 , \qquad A_2 \equiv 0 ,$$

la forme suivante:

$$(46) \quad \begin{cases} z = \dfrac{1}{2}(x'_1 x_1 + x'_2 x_2)^2 + \dfrac{1}{2}[(C_1 - x'_2)x_3 + 2]^2 + x'_1 x_4 , \\ (x'_1 x_1 + x'_2 x_2)\, x_1 + x_4 = 0 , \\ (x'_1 x_1 + x'_2 x_2)\, x_2 - [(C_1 - x'_2)x_3 + 2]\, x_3 = 0 . \end{cases}$$

Les deux dernières équations (46) produisent les valeurs

$$x'_1 = -\frac{x_2^2 x_4}{x_1^2 x_3^2} - \frac{x_4}{x_1^2} - \frac{2x_2}{x_1 x_3} - C_1 \frac{x_2}{x_1} ,$$

$$x'_2 = \frac{x_2 x_4}{x_1 x_3^2} + \frac{2}{x_3} + C_1 .$$

Substituant les expressions obtenues de x'_1 et x'_2 dans la première équation (46), on a l'intégrale complète cherchée du système (45):

$$z = -\frac{x_4^2}{2x_1^2}\left(\frac{x_2^2}{x_3^2}+1\right) - \frac{2x_2 x_4}{x_1 x_3} - C_1 \frac{x_2 x_4}{x_1} ,$$

à une constante arbitraire C_1 .

Or, le système (45) est susceptible d'être intégré par d'autres méthodes plus immédiates dont on va citer trois procédés.

D'abord le système (45) est réductible à la forme convenable d'un système linéaire:

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned} & p_2 + \frac{x_1}{x_2} p_1 - \frac{x_4^2}{x_1^2 x_2} = 0 , \\ & p_3 - \frac{x_2 x_4}{x_1 x_3^2}\left(\frac{x_2 x_4}{x_1 x_3} + 2\right) = 0 , \\ & p_4 + \frac{x_1}{x_4} p_1 = 0 , \\ & -z + x_4 p_4 + \frac{x_4^2}{2x_1^2}\left(\frac{x_2^2}{x_3^2}+1\right) = 0 . \end{aligned} \right.$$

Ce système offrira une seconde application de la théorie étudiée [8]).

---

[8]) En résolvant, d'autre part, ces dernières équations par rapport à toutes les dérivées p_1, p_2, p_3, p_4, on obtiendrait immédiatement, par une quadrature, l'intégrale complète requise.

Or, pour atténuer quelques longueurs de ce calcul, qui est, d'ailleurs, élémentaire, on procédérait encore d'une autre manière suivante.

L'intégrale générale de la dernière équation (47), considérée comme différentielle ordinaire, admet la forme:

$$z = -\frac{x_4^2}{2x_1^2}\left(\frac{x_2^2}{x^2_3}+1\right) + z' x_4 ,$$

On obtient, dans ce but, au moyen des deux quadratures consécutives, l'intégrale complète du système jacobien linéaire formé par les trois premières équations (47):

$$z = -\frac{x_4^2}{2x_1^2}\left(\frac{x_2^2}{x_3^2}+1\right) - \frac{2x_2x_4}{x_1x_3} + x'_1\frac{x_2x_4}{x_1} + z' \ , \tag{48}$$

x'_1 et z' désignant deux constantes arbitraires.

Prenons les, respectivement, pour les nouvelles variables, indépendante et fonctionnelle inconnue.

La quatrième équation (47) transformée devient alors très simple

$$z' = 0 \ . \tag{49}$$

On se trouve, donc, dans le cas étudié au n^0 4 qui correspond à l'hypothèse que le système (25) se réduit à la première équation représentée sous la forme (49).

Il s'ensuit immédiatement, d'après les formules (26), que l'on a

$$x'_1 = C' \ , \tag{50}$$

C' désignant une constante arbitraire.

Substituant les valeurs trouvées (49) et (50) de z' et x'_1 dans la formule (48), on obtient l'intégrale complète du système (45) sous la forme antérieure, où C_1 est remplacé par $-C'$.

---

z' désignant la constante arbitraire. Prenons la pour nouvelle fonction inconnue, les anciennes variables x_1, x_2, x_3 étant considérées comme les nouvelles variables indépendantes.

Les trois premières équations (47) deviennent alors;

$$p'_2 + \frac{x_1}{x_2}p'_1 = 0 \ , \qquad p'_3 - \frac{2x_2}{x_1x_3^2} = 0 \ , \qquad z' + x_1p'_1 = 0 \ ,$$

p'_1, p'_2 et p'_3 désignant les nouvelles dérivées partielles. Il s'ensuit, au moyen d'une quadrature, l'intégrale complète de ce dernier système

$$z' = -\frac{x_2}{x_1}\left(\frac{2}{x_3} + C\right) \ ,$$

C désignant une constante arbitraire.

En substituant cette dernière valeur de z' dans la précédante expression de z, on retrouve toujours la même intégrale complète du sustème (45).

Les formules (27) conduisent à l'intégrale générale du système considéré.

Quant aux formules (28), elles s'évanouissent identiquement. Ce fait correspond à la théorie classique, car le système (45), qui est équivalent au système linéaire (47), ne possède point, dans son domaine de régularité, d'intégrale singulière.

9. A la fin de son livre, au n⁰ 146, M. N. M. Gunter étudie l'application de la méthode de Korkine à l'intégration d'un système d'équations non linéaires de S. Lie. Il est nécessaire d'observer qu'une telle méthode d'intégration ne serait pas à recommander, car de cette manière on ne pourrait que sciamment compliquer le problème d'intégration. En effet, d'après la classification d'équations de S. Lie, accomplie par N. Saltykow, les équations non linéaires de S. Lie se réduisent aux équations linéaires de la forme générale. Quant à la méthode de Korkine,[9]) elle s'applique à ces dernières équations d'une manière bien plus aisée qu'aux équations non linéaires.

Citons comme un exemple, le plus simple, le système (45) de M. N. M. Gunter et les équations transformées qu'il avait obtenu:

$$z' = x_1'$$
$$p_1' - 1 = 0 \ , \quad p_2' - p_3' = 0 \ .$$

Comme les deux dernières équations ne pourraient qu'admettre une intégrale de S. Lie de la première classe, elles appartiennent à la forme générale suivante d'un système des deux équations dérivées de S. Lie:[2])

$$p'_1 + \psi_{11} p'_3 + \Pi_1 (x_1, x_2, x_3) = 0 \ ,$$
$$p'_2 + \psi_{21} p'_3 + \Pi_2 (x_1, x_2, x_2) = 0 \ .$$

Il en résulte les valeurs correspondantes des coefficients:

$$\psi_{11} \equiv 0 \, , \ \Pi_1 \equiv -1 \, , \ \psi_{21} \equiv -1 \, , \ \Pi_3 \equiv 0 \, ,$$

Quant à la fonction adjointe F du système considéré, elle

---

[9]) *N. Saltykow* — Réthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Paris. Gauthier — Villars. 1931, n⁰ 7 p. 13.

[10]) *N. Saltykow* — *Recherches sur la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre d'une fonction inconnue* (en russe) Kharkow. 1905. p. 105 (n⁰ 5).

ne contiendrait que les variables x'_1, x'_2, x'_3 et vérifierait les conditions, exprimées par les parenthèses de Poisson:

$$(p'_1 - 1, F) = 0, \quad (p'_2 - p'_3, F) = 0,$$

produisant le système d'équations pour définir la fonction F:

$$\frac{\partial F}{\partial x'_1} = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial x'_2} - \frac{\partial F}{\partial x'_3} = 0.$$

Il s'ensuit le résultat antérieurement acquis

$$F \equiv x'_2 + x'_3 = C,$$

C désignant une constante arbitraire.