Sur les classes ($\mathscr{E}$ et ($\mathscr{D}$)

Par

GEORGES KUREPA

L'objet de se travail est: de donner une nouvelle définition des classes ($\mathscr{E}$) et ($\mathscr{D}$) de M. Fréchet [1]), d'indiquer quelques cas de distanciabilité ($\equiv$ métrisation) d'espaces abstraits [2]), et, enfin, de poser un problème équivalent[3]) au célèbre problème de Souslin.

I. *1 Classes* ($\mathscr{E}$), Nous désignerons par M_0 un espace abstrait quelconque contenant un point t_0 vérifiant la condition

---

[1]) D'après M. Fréchet, un espace abstrait[2]) E est dit une *classe* ($\mathscr{E}$) si l'on peut faire correspondre à tout couple de points, a, b, de E un nombre réel, ab, appelé *écart de a et de b*, jouissant des propriétés suivantes:

1° $ab = ba$;

2° $ab = 0$ équivaut à $a = b$;

3° Pour qu'un point a de E soit un point d'accumulation d'un sous — ensemble F de E, il faut et il suffit que F contienne une suite de points deux à deux distincts, $a_0 \ldots a_n \ldots$, tels que a soit le seul point x de E tel que la suite des nombres réels xa_n, $(n = 0, 1, \ldots)$. converge vers 0.

E est dit *distanciable* ou une classe ($\mathscr{D}$) [plus précisément une classe ($\mathscr{D}_0$)] si l'espace E peut être défini moyennant un *écart régulier* c'est-à-dire si, en sus des conditions 1°, 2° et 3°, on a celle ci:

4° On peut faire correspondre à tout nombre réel $x > 0$ un nombre réel $f(x) > 0$ tel que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, et que, quels que soient les points a, b, c de E et le nombre réel positif x, les inégalités $ab < x$, $bc < x$ entraînent $ac < f(x)$.

Remarquons que la définition primitive de M. Fréchet des classes ($\mathscr{D}$) différait de la précédente, la condition 4° ayant été remplacée par celle-ci:

suivante: C_0. Il existe une suite (de type ordinal $\omega \equiv \omega_0$)[4]) de sous-ensembles, W_n, $(n<\omega)$, de M_0 tels que:

a) $W_{n+1} \subseteq W_n$, $(n<\omega)$ et $\prod\limits_{n<\omega} W_n = t_0$;

b) Pour que $t_0 \varepsilon F'$, $(F \subseteq M_0)$, il faut et il suffit que, pour tout $n<\omega$, W_n contienne un point de F distinct de t_0.

Ceci étant, nous allons démontrer le

Théorème 1. *Pour qu'un espace abstrait, E, soit une classe* ($\mathscr{E}$) [ou plus précisément ($\mathscr{E}_0$)], *il faut et il suffit qu'il existe un point t_0 appartenant à un espace abstrait M_0 vérifiant la condition C_0, et qu'on puisse faire correspondre à tout couple de points a, b de E un point, (a, b), de M_0 vérifiant ces conditions:*

1′ $(a, b) = (b, a)$;

2′ $(a, b) = t_0$ *équivaut à* $a = b$;

3′ *a, F étant respectivement un point et un sous-ensemble quelconques de E, pour que $a \varepsilon F'$, il faut et il suffit que F contienne un ensemble S tel que a soit le seul point x de E tel que, quel que soit l'indice $n<\omega$, l'ensemble $S-a$ contienne un point a_n tel que $(a, a_n) \varepsilon W_n$.*

Notation. Dans ce qui va suivre, (a, b), ab désigneront un point quelconque appartenant respectivement à un certain M_0 ou, en particulier, à l'ensemble des nombre réels $\geqslant 0$.

Que la condition du théorème soit nécessaire, c'est bien évident; en effet, il suffit de désigner par M_0: l'ensemble des nombres réels, par t_0: le zéro, et par W_n: l'ensemble des nombres réels x tels que $0 \leqslant x < \dfrac{1}{n+1}$, $(n<\omega)$.

Quels que soient les points a, b, c de E, on a $ab \leq ac + bc$.

L'équivalence des deux définitions — que M. Fréchet croyait comme très probable dès 1910 — a été prouvée, pour la première fois, par M. Chittenden en 1916 (voir Maurice Fréchet, *Espaces abstraits, Paris 1928*; p. 213).

[2]) Un ensemble, E, est dit un *espace abstrait,* s'il y a un procédé faisant correspondre à tout $F \subseteq E$ un $F' \subseteq E$, appelé le dérivé de F. Si $F' \subseteq (F+G)'$, pour tout $F \subseteq E$ et pour tout $G \subseteq E$, E est dit une *classe* (V) de M. Fréchet (*loc. cit.* pp. 167 et 179).

Pour d'autres définitions équivalentes des espaces abstraits, voir un article de M. Antoine Appert *(Mathematica, Cluj, XI, 1935, pp. 229—246).*

[3]) Deux problèmes P, Q sont dits équivalents si l'hypothèse que la réponse à P soit affirmative entraîne la réponse affirmative à Q; et réciproquement.

[4]) ω (ou ω_0) désigne le plus petit nombre ordinal infini c'est-à-dire le type ordinal de l'ensemble des entiers positifs.

Prouvons que la condition est suffisante c'est-à-dire s'il existe un écart vérifiant $1', 2'$ et $3'$, il en existe aussi un vérifiant les conditions $1^0, 2^0$ et 3^0 de la note [1]).
Posons $aa=0$ pour tout $a \varepsilon F$; a, b étant deux points distincts quelconques de E, nous poserons $ab = \frac{1}{n+1}$, n étant le plus petit indice $\nu < \omega$ tel que (a, b) non εW_ν; il est clair que l'entier n est bien déterminé. Nous disons qu'on obtient ainsi un écart définissant l'espace. Nous nous contenterons de prouver que la condition 3^0 de la note [1]) est verifiée.

Tout d'abord, si $a \varepsilon F', F \subseteq E$, eu égard à $3'$, l'ensemble $F - a$ contient un ensemble S tel que a soit le seul point $x \varepsilon E$ jouissant de la propriété que, $n < \omega$ étant donné, il y ait un $a_n \varepsilon S$ tel que $(x, a) \varepsilon W_n$; de plus, on peut supposer qu'aucun des ensembles $W_{n+1} - W_n, (n < \omega)$, ne contienne une infinité de points $(a, s), (s \varepsilon S)$. On en conclut facilement que a est le seul point x de E tel que les nombres réels xs, $(s \varepsilon S)$, convergent vers 0.

Inversement soient $a \varepsilon E$ et $F \subseteq E$ tels que $F - a$ contienne un sous-ensemble S jouissant de la propriété que a soit le seul point x de E tel que l'ensemble des nombres réels xs, s parcourant S, converge vers 0; prouvons que a est le seul point x de E tel que, $n < \omega$ étant donné, l'esemble S contienne un point a^n, tel que $(x, a^n) \varepsilon W_n$ c'est-à-dire $a \varepsilon F'$. En effet, il y a un entier $N > n$ et un point $a_N \varepsilon S$ tel que $aa_N = \frac{1}{N+1}$; cela veut dire précisément que $a_N \varepsilon W_{N-1}$; en posant $a_N = a^n$, on aura $a^n \varepsilon W_N$ puisque $W_n \supseteq W_{N-1}$. C. q. f. d.

I. *2 Classes* $(\mathscr{D})$. En se servant de notations précédentes, désignons par $4'$ la condition que voici:

$4'$ Il y a une fonction $\varphi(n)$ faisant correspondre à tout ordinal $n < \omega$ un ordinal $\varphi(n) < \omega$ telle que $\varphi(n) \to \omega$ si $n \to \omega$ et que, quels que soient les points a, b, c de E et l'ordinal $n < \omega$, les relations $(a, b) \varepsilon W_n$, $(b, c) \varepsilon W_n$ entraînent $(a, c) \varepsilon W_{\varphi(n)}$.

Théorème 2. *Si, dans le texte du théorème* 1, *on remplace partout le signe* $(\mathscr{E})$ *par le signe* $\mathscr{D}$ *et si, au texte ainsi modifié, l'on ajoute la condition* $4'$, *on obtiendra, de nouveau, un théorème (caractérisant les classes* $(\mathscr{D})$.

Il suffit de voire que 4^0, en note [1]), est une conséquence des $1', 2', 3'$ et $4'$.

Soit x un nombre réel quelconque > 0; si $x \geqslant 1$, posons $f(x) = x$; si $0 < x < 1$, soit $n(x)$ l'entier vérifiant $\frac{1}{n(x)+1} < x \leqslant \frac{1}{n(x)}$ et posons $f(x) = \frac{1}{\varphi(n(x))+1}$, $\varphi(n)$ satisfaisant à $4'$; prouvons que $f(x)$ satisfait à 4^0, ab étant défini comme tout à l'heure: $ab = \frac{1}{n+1}$, n étant le premier ordinal $\nu < \omega$ tel que (a, b) non $\varepsilon\, W_\nu$.

Que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$, c'est bien manifeste; prouvons encore que si $0 < x < 1$, $ab < x$, $bc < x$, alors $ac < f(x)$, pour tout triple de points a, b, c de E. En effet, si $ab < x, bc < x$, $0 < x < 1$, on aura $ab < \frac{1}{n(x)}$, $bc < \frac{1}{n(x)}$; dès lors $(a, b)\, \varepsilon\, W_{n(x)}$ et $(b, c)\, \varepsilon\, W_{n(x)}$; à la suite de la condition $4'$, on aura $(a, c)\, \varepsilon\, W_{\varphi(n(x))}$) par conséquent $ac < \frac{1}{\varphi(n(x))+1}$ c'est-à-dire $ac < f(x)$.

Les deux théorèmes précédents nous rendent la possibilité de simplifier la définition des classes $(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{D})$ en choisissant d'une manière aussi simple que possible l'espace „actif" M_0 et le „repère-point" $t_0\, \varepsilon\, M_0$, par exemple l'espace composé de 0 (qui sera alors notre point t_0) et des nombres rationnels $\frac{1}{n}$, $(0 < n < \omega)$, ou l'espace des nombres ordinaux $\leqslant \omega_0$, le dernier choix étant susceptible de généralisations à des nombres transfinis (et réguliers) ω_α [5]).

En particulier, tout espace qui est une classe $(\mathcal{E})$ ou $(\mathcal{D})$

---

[5]) C'est ce que nous avons fait ailleurs (v. *C. R., Paris, 198, 1934;* p. 1563, partie *III*) lorsque nous avons défini la notion *d'espaces pseudo-distanciés;* à cette époque - là, nous n'avons pas pu prouver que l'introduction des espaces M_0 ne donne rien de nouveau et que, en particulier, pour se servir d'une notation qui y est employée, les classes (Δ^0) et $(\mathcal{D})$ coïncident (*Ibidem*, partie III, en note).

Maintenant, nous croyons justifié l'emploi de l'indice o dans M_0, t_0, $\mathcal{D}_0$, etc, la généralisation à un ω_α régulier quelconque étant immédiate.

et qui n'est pas isolé peut jouer le rôle de M_0, t_0 désignant un point non isolé quelconque de l'espace. Par conséquent, le zéro dans la définition courante des classes ($\mathcal{E}$) et ($\mathcal{D}$) peut être remplacé (et alors partout!) par un nombre réel (ou complexe) quelconque.

II. *Quelques cas de métrisation.* On sait qu'il y a un espace qui est une classe ($\mathcal{E}$) sans être une classe ($\mathcal{D}$) (v. *Fréchet, loc. cit.* p. 215): il sera alors intéressant d'indiquer quelques cas où cette différence s'évanouit.

Théorème 3. *Tout espace abstrait qui est une classe* ($\mathcal{E}$) *admettant une base ramifiée*[6]) *de voisinages, est une classe* ($\mathcal{D}$).

Désignons par $\mathcal{G}$ une base ramifiée quelconque de l'espace considéré E. Si $a \varepsilon E$ et $n < \omega$, soit E_a^n un voisinage de a appartenant à $\mathcal{G}$ et tel que $E_a^n \varepsilon S\left(a, \frac{1}{n+1}\right)$, $S\left(a, \frac{1}{n+1}\right)$ désignant l'ensemble de tous les points x de E tels que $ax < \frac{1}{n+1}$. En désignant par $\mathcal{F}_n$ la famille des E_a^ν, $(a \varepsilon E, n \leqslant \nu < \omega)$, on aura ceci:

α. Pour tout $n < \omega$, $\mathcal{F}_n$ sera une *couverture* de l'espace E; autrement dit, tout point de E est *intérieur à un élement* de $\mathcal{F}_n$;

β. $\mathcal{F}_0 \cdots \mathcal{F}_n \cdots, (n < \omega)$, est une *suite monotone de couvertures de* E; autrement dit A, B étant deux éléments de $\mathcal{F}_{n+1}$ ayant en commun un point intérieur, il y a un $C \varepsilon \mathcal{F}_n$ tel que $A + B \subseteq C$, pour tout $n < \omega$;

γ. $\mathcal{F}_0 \cdots \mathcal{F}_n \cdots, (n < \omega)$, est une *suite complète de couvertures* de E, ce qui veut dire ceci: a étant un point quelconque de E, V_n désignant un élément quelconque de $\mathcal{F}_n$, $(n < \omega)$, contenant a comme un point intérier, la suite $V_0 \cdots V_n \cdots$ jouit de la propriété que, quel que soit le voisinige V de a, il y ait un $V_n \subseteq V$.

---

[6]) Chaque famille de voisinages définissant un espace abstrait est dite *ne base de l'espace.* Une famille d'ensembles est dite *ramifiée* si, A; B étante deux de ses éléments quelconques on ait $A \subseteq B$ ou $B \subseteq A$ ou $AB = 0$.

La base $\mathcal{G}$ l'étant ramifiée, les propriétés α, β sont évidentes; prouvons que la propriété γ subsiste aussi. Tout d'abord, on peut supposer que le voisinage V dont on parle dans γ soit un élément de la famille $\mathcal{G}_0$ des E_a^n, $(a \varepsilon E, n - \omega)$, dont on vient de parler. La famille $\mathcal{G}$ étant ramifiée et que $a \varepsilon V \cdot V_n$, $(n < \omega)$, si la propriété γ ne subsistait pas, on aurait $V \subset V_n$, pour tout $n < \omega$ donc $V \subseteq \underset{n<\omega}{\Pi} V_n$. Le cas où V ne contiendrait que le point a étant évident, supposons que V et donc ΠV_n aussi ont au moins deux points; cette éventualité est impossible à cause de ceci :

Si $E^n \varepsilon \mathcal{F}_n$, l'ensemble $\underset{n<\omega}{\Pi E^n}$ est composé d'un point au plus.

Prouvons donc le dernier énoncé. Pour ceci, remarquons que $n < \omega$ étant donné, il y a un $a_n \varepsilon E$ et un ν_n tels que $n \leqslant \nu_n < \omega$ et $E^n = E_{a_n}^{\nu_n}$; par conséquent $\underset{n<\omega}{\Pi} E^n = \underset{n<\omega}{\Pi} E_{a_n}^{\nu_n} \subseteq \underset{n<\omega}{\Pi} S\left(a_n, \frac{1}{\nu_n + 1}\right)$.

Le dernier ensemble ayant un point au plus[7]), il en sera ainsi aussi de l'ensemble ΠE^n donc aussi de V, contrairement à l'hypothèse.

Finalement, les propriétés α, β, γ étant démontrées, il s'ensuit, d'après un théorème de M. Alexandroff et d'Urysohn (v. Fréchet, loc. cit. p. 220) que l'espace E est distanciable.

Théorème 4. *Tout espace ordonné connexe qui est une classe ($\mathcal{E}$) est distanciable et, par conséquent, homéomorphe à un ensemble de nombres réels.*

Pour la démonstration du théorème 4, voir la dernière section de mon travail „*L'espace* (Ω) *n'est pas une classe* ($\mathcal{E}$)" (ce tome p. 92).

Qu'il soit remarqué que je ne connais aucun espace ordonné qui serait une classe ($\mathcal{E}$) sans être, en même temps, distanciable.

Théorème 5. *Soit E un espace abstrait admettant une base ramifiée*[6]) *au plus dénombrable, $\mathcal{G}$, de voisinages; pour que E soit distanciable, il faut et il suffit qu'il vérifie l'une quelconque des trois conditions P, Q, R que voici :*

---

[7]) S'il y en avait deux distincts, x, y, la suite des points a_n, $(n < \omega)$, convergerait vers x et y, à la fois, puisque $\lim xa_n = \lim ya_n = 0$ si $n \to \omega$, ce qui est impossible à cause de la condition 3⁰.

P. L'espace E vérifie l'axiome de séparation de M. Fréchet [8];

Q. Tout ensemble composé d'un seul point de l'espace E est dépourvu de points d'accumulation ;

R. Quel que soit le point a de l'espace, la partie commune de tous les voisinages de a est composée du point a [9].

Il est utile de prouver d'abord ce

Lemme. *Dans tout espace E qui est une classe (V)* [2]*, les trois conditions P, Q, R sont, deux à deux, équivalentes.*

Nous allons prouver la chaîne des conclusions:

$$P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow P.$$

Tout d'abord s'il existait un ensemble, F, composé d'un point, x, de E et ayant un point d'accumulation, b, la relation $b \varepsilon F$ voudrait dire que tout voisinage de b contienne un point de F *distinct de* b; par conséquent, tout voisinage de b contiendrait le point $x \neq b$ contrairement à l'hypothèse P.

D'autre part, a étant un point quelconque de E, si la partie commune des voisinages de a contenait un point $b \neq a$, a serait un point d'accumulation de l'ensemble composé du point b, contrairement à l'hypothèse Q.

Enfin, a, b étant deux points distincts de E, celui-ci vérifiant R, si tout voisinage de a contenait b, la partie commune des voisinages de a contiendrait également le point b, contrairement à R.

Ceci étant, revenons à un espace E vérifiant les conditions du théorème 5; à la suite du lemme, E vérifie les conditions P, Q, R.

Tout élément de la base $\mathcal{G}$ dont on parle dans le théorème 5 est un ensemble ouvert de l'espace E; dans le cas con-

---

[8] L'axiome de séparation de M. Fréchet dit: Quels que soient les deux points distincts, a, b, de E, il y a un ensemble $V_a \subseteq E - b$ contenant a comme un *point intérieur* et un ensemble $V_b \subseteq E - a$ contenant b comme un *point intérieur*. Si E est une classe (V) au sens de M. Fréchet, l'axiome s'énonce comme suit: a, b étant deux points distincts quelconques, il a un voisinage V_a de a et un voisinage V_b de b tels que b non εV_a et a non εV_b (L'axiome de M, Hausdorff exige de plus que $V_a V_b = 0$).

[9] Remarquons qu'aucune des conditions P, Q, R n'est une conséquence de ce que E admet une base ramifiée dénombrable.

traire, il y aurait un $G \varepsilon \mathcal{G}$ composé plus d'un point et un point $g \varepsilon G$ tels que tout voisinage de g appartenant à $\mathcal{G}$ contiendrait G; la dernière conclusion résulte de ce que la base $\mathcal{G}$ est ramifiée; autrement dit, la partie commune de la famille des voisinages de g serait composée de plus d'un point, contrairement à R.

Ainsi, nous avons démontré que E est un espace accessible.

Prouvons que E est un espace *régulier :* F étant un ensemble *fermé* quelconque de E et a un point quelconque de $E - F$, il y a deux ensembles *ouverts disjoints* V_a et V_F tels que $a \varepsilon V_a$ et $F \subseteq V_F$. Tout d'abord, F étant fermé, il y a un voisinage V_a de a appartenant à $\mathcal{G}$ et disjoint de F. D'autre part, f étant un point quelconque de F, il y a, à la suite de la condition P, un voisinage V_f de f tel que a non $\varepsilon V_f \varepsilon \mathcal{G}$; en posant $V_F = \sum_f V_f$, f parcourant F, l'ensemble V_F est ouvert, disjoint de V_a et contient F. Bref, l'espace considéré E *est accessible régulier et admet une base dénombrable*[10]*);* à la suite d'un théorème d'Urysohn-Tychonoff, (v. *Fréchet, loc. cit. p. 220*), E est distanciable. C. q. f. d.

Tout espace distancié étant, d'après M. Tietze, complètement normal (v. *Fréchet, loc. cit. p. 206*), on a le

Corollaire. *Tout espace abstrait vérifiant l'axiome de séparation de M. Fréchet*[8]) *et admettant une base ramifiée*[6]) *au plus dénombrable, est complètement normal.*

III. *Les espaces* $T(\mathcal{T})$. Pour terminer, posons le problème suivant:

Soient T un ensemble et $\mathcal{T}$ une famille *ramifiée*[6]) de sous-ensembles de T jouissant des propriétés suivantes:

A Quel que soit le point a de T, la famille des éléments de $\mathcal{T}$ contenant a est: dénombrable, bien ordonnée par ra-

---

[10]) M. Fréchet dit d'un espace admettant une base dénombrable qu'il est *parfaitement séparable;* on sait qu'un espace séparable n'est pas nécessairement parfaitement séparable. D'autre part, l'étude des espaces $T(\mathcal{T})$ qu'on va définir dans la section III, nous a amené à généraliser la condition de séparabilité en énonçant la condition K_0 que voici:

Il y a une suite dénombrable d'ensembles isolés (appartenant à l'espace considéré) *dont la réunion est partout dense* (dans l'espace).

pport à la relation d'inclusion $\supset$ et, enfin, telle que la partie commune de ses élémentes soit composée du point a ;

B Toute sous-famille *monotone* de $\mathcal{T}$ [11]) est au plus dénombrable;

C Toute sous-famille *disjonctive* de $\mathcal{T}$ [11]) est au plus dénombrable.

En considérant tout élément de $\mathcal{T}$ comme voisinage de chacun de ses points, l'espace abstrait ainsi défini, $T(\mathcal{T})$, est-il nécessairement une classe $(\mathcal{E})$ [et donc, à la suite du théorème 3, une classe $(\mathcal{D})$] ?

On peut prouver que la réponse affirmative au problème précédent entraîne la réponse affirmative au problème bien connu de Souslin; et réciproquement[12]).

Je ne sais pas si le problème précédent est équivalent à au moins un des trois problèmes qu'on en déduit en y barrant respectivement B, C, et, B et C, à la fois.

Remarquons que l'étude dese spaces $T(\mathcal{T})$ nous a amené à considérer une classe d'espaces s'intercalant etre les classes $(\mathcal{E})$ et (V_ω) de M. Fréchet.

---

[11]) Une famille ramifiée d'ensembles est *monotone* (disjonctive) si elle ne contient aucun couple d'ensembles disjoints (non disjoints).

[12]) Pour plus de détail là — dessus, voir Georges Kurepa, *Ensembles ordonnés et ramifiés. (Thèse, Paris, 1935* ; ou *Publ. Math. Univ. Belgrade,* IV, *1935, pp. 1—138),* pp. 106 et 124; dans la terminologie qui y est employée, $\mathcal{T}$ est un *tableau ramifié* de rang $\leq \omega_1$ et de puissance $\leq \aleph_1$, l'égalité éventuelle entraînant la réponse négative au problème précédent (et donc à celui-là de Souslin). Si $\mathcal{T}$ est dénombrable, la réponse au problème est — on le déduit du théorème 5 — affirmative; *et vice versa.*

On peut prouver ceci: *Pour que $\mathcal{T}$ soit dénombrable, il faut et il suffit que l'espace $T(\mathcal{T})$ vérifie la condition K_0* (que nous vénons d'énoncer en note [10]).