Sur un ensemble toujours de I^re catégorie de dimension positive

Par

W. SIERPIŃSKI et E. SZPILRAJN

E étant un espace métrique séparable, on dit que E jouit de *la propriété* (λ) lorsque chaque sous-ensemble dénombrable de E est un G_δ dans E. On sait que chaque espace jouissant de cette propriété est *toujours de I^re catégorie* (c. à d. de I^re catégorie sur chaque ensemble parfait)[1].

M. M. Mazurkiewicz et Szpilrajn ont démontré récemment (à l'aide de l'hypothèse du continu) qu'*il existe dans l'espace euclidien à* $n+1$ *dimensions un ensemble de dimension* n *jouissant de la propriété* (λ)[2].

En nous basant sur une idée différente, nous obtenons dans la note présente un résultat un peu plus fort (théorèmes 3 et 4).

Termes, notations et remarques préliminaires

1. *Espaces.* $\mathcal{E}^n$ désignera l'espace euclidien à n dimensions, $\mathcal{J}^n$— le cube fondamental de cet espace. $\mathcal{H}$ désignera l'espace de Hilbert et $\mathcal{H}_0$ l'espace composé de tous les points de $\mathcal{H}$ n'ayant qu'un nombre fini de coordonnées $\neq 0$.

---

[1]) Voir C. Kuratowski, *Topologie I,* Monografie Matematyczne t. III, Warszawa-Lwów 1933. p. 269 et W. Sierpinski, *Hypothèse du continu,* Monografie Matematyczne t. IV, Warszawa-Lwów 1934, p. 94.

[2]) S. Mazurkiewicz et E. Szpilrajn, *Sur la dimension de certains ensembles singuliers,* Fund. Math. 28 (1937), pp. 305—308.

2. *Mesure linéaire.* Nous considérons la mesure linéaire (des ensembles situés dans un espace métrique quelconque) au sens de M. Carathéodory[1]) Pour qu'un ensemble E soit de mesure linéaire nulle, il faut et il suffit qu'il existe pour chaque $\varepsilon > 0$ une décomposition $E = E_1 + E_2 + \dots$ telle que $\delta(E_1) + \delta(E_2) + \dots < \varepsilon$.

3. *Dimension.* Soit E un ensemble situé dans un espace métrique séparable M. La dimension de l'ensemble E (au sens de Brouwer-Menger-Urysohn) sera désignée par $dim(E)$; la dimension de E au point $p \in M$ par $dim_p(E)$ (pour $p \in M - E$ on a par définition : $dim_p(E) = dim_p[E + (p)]$) (où $\delta(Z)$ désigne le diamètre de l'ensemble Z).

Un ensemble E qui n'est pas de dimension finie est dit de *dimension dénombrable*, losqu'il existe une décomposition de E en une suite d'ensembles de dimension 0; il est de *dimension indénombrab'e* dans le cas contraire. (L'espace $\mathscr{H}_0$ est de dimension dénombrable et l'espace $\mathscr{H}$ de dimension indénombrable)[2]).

Un espace qui n'est pas de dimension finie dans p est dit de *dimension dénombrable dans p* lorsqu'il existe des voisinages ouverts de p, arbitrairement petits, dont les frontières sont de dimension finie ou dénombrable, il est de *dimension indénombrable dans p* dans le cas contraire. On démontre facilement que chaque ensemble E qui est de dimension au plus dénombrable en chaque point $p \in E$, est de dimension au plus dénombrable.

Nous traiterons, bien entendu, la dimension indénombrable comme la plus grande, et la dimension dénombrable comme plus grande que chaque dimension finie.

Pour le cas de dimension infinie, on a par définition: $dim(Z) - 2 = dim(Z) - 1 = dim(Z)$.

Conformément à ces conventions et aux théorèmes connus sur la dimension finie[3]), on a toujours:

(a) Pour chaque $p \in M$, la frontière F de chaque voisinage ouvert de p, suffisamment petit, satisfait à l'inégalité $dim(EF) \geq dim_p(E) - 1$.

(b) Chaque ensemble E est contenu dans un ensemble $G_{\delta\sigma}$ (dans M), de même dimension.

(c) La relation: $dim(N) = 0$ entraîne : $dim(EF) \geq dim(E + N) - 1$.

*

Lemme 1. *Soit M un espace séparable de mesure linéaire positive. Si $\aleph_1 = \mathfrak{c}$, il existe un ensemble $Q \subset M$, jouissant de la propriété (λ) et de la propriété suivante:*

(ω) Q possède des points communs avec chaque ensemble borelien dans M, de mesure linéaire positive.

---

[1]) Cf. p. ex. S. Saks, *Theory of Integral*, Monografie Matematyczne t. VII, Warszawa-Lwów 1937, p. 53.

[2]) W. Hurewicz, *Ueber unendlich dimensionale Punktmengen.* Proceed. Akad. Amsterdam 31 (1928), pp. 918-922.

[3]) Cf. p. ex. Kuratowski l. c., pp. 132 et 126.

Démonstration. Il résulte de l'égalité: $\aleph_1 = \mathfrak{c}$, qu'il existe une suite transfinie

$$(1) \qquad p_1, p_2, \cdots, p_\omega, p_{\omega+1}, \cdots, p_\xi, \cdots \qquad | \ \xi < \Omega$$

formée de tous les points de l'espace M.

La classe **B** de tous les ensembles boreliens dans M, de mesure linéaire positive, étant de puissance du continu, il résulte de notre hypothèse qu'il existe une suite transfinie

$$(2) \qquad B_1, B_2, \cdots, B_\omega, B_{\omega+1}, \cdots, B_\xi, \cdots \qquad | \ \xi < \Omega$$

formée de tous les ensembles de la classe **B**.

Pareillement, la classe **H** de tous les ensembles G_δ de mesure linéaire nulle, contenus dans M étant de puissance $\mathfrak{c}$, il existe (d'après l'hypothèse du continu), une suite transfinie

$$(3) \qquad H_1, H_2, \cdots, H_\omega, H_{\omega+1}, \cdots, H_\xi, \cdots \qquad | \ \xi < \Omega$$

formée de tous les ensembles de la classe **H**.

Nous définirons maintenant par l'induction transfinie une suite transfinie de points de M

$$(4) \qquad q_1, q_2, \cdots, q_\omega, q_{\omega+1}, \cdots, q_\xi, \cdots \qquad | \ \xi < \Omega$$

et une suite transfinie d'ensembles appartenant à la classe **H**

$$(5) \qquad \Gamma_1, \Gamma_2, \cdots, \Gamma_\omega, \Gamma_{\omega+1}, \cdots, \Gamma_\xi, \cdots \qquad | \ \xi < \Omega$$

comme il suit.

Posons $\Gamma_1 = 0$ et soit q_1 le premier terme de la suite (1) qui est un élément de l'ensemble B_1. Soit maintenant α un nombre ordinal donné, $1 < \alpha < \Omega$, et supposons que nous avons déjà défini tous les ensembles G_δ (dans M) de mesure linéaire nulle, Γ_ξ, où $\xi < \alpha$, et tous les points q_ξ, où $\xi < \alpha$. L'ensemble Q_α des points q_ξ, où $\xi < \alpha$, est donc au plus dénombrable, donc de mesure linéaire nulle. L'ensemble $S_\alpha = Q_\alpha + \sum_{\xi<\alpha} \Gamma_\xi$, en tant qu'une somme d'une suite au plus dénombrable d'ensembles de mesure linéaire nulle est donc aussi de mesure linéaire nulle et est contenu par conséquent dans un ensemble G_δ (dans M) de mesure linéaire nulle[1]). Il existe donc

[1]) Cf. p. ex. Saks, l. c., p. 53.

un terme de la suite (3) qui contient S_α ; c'est bien le premier de ce genre que nous désignerons par Γ_α.

L'ensemble $B_\alpha - \Gamma_\alpha$ est évidemment non vide. Nous désignons par q_α le premier terme de la suite (1) qui est un élément de $B_\alpha - \Gamma_\alpha$.

Les suites (4) et (5) sont ainsi définies; nous désignons par Q l'ensemble de tous les termes de la suite (4). Remarquons qu'on a pour chaque $\mu < \Omega$:

$$Q_\mu = Q\Gamma_\mu. \tag{6}$$

L'ensemble Q jouit évidemment de la propriété (ω); nous allons démontrer qu'il jouit également de la propriété (λ).

Soit donc

$$D = (q_{\xi_1}, q_{\xi_2}, q_{\xi_3}, \cdots)$$

un sous-ensemble dénombrable de Q. Par conséquent il existe un nombre ordinal $\mu < \Omega$ tel que $\mu > \xi_n$ pour $n = 1, 2, \cdots$, d'où $D \subset Q_\mu$. On a donc

$$D = Q_\mu - (Q_\mu - D). \tag{7}$$

L'ensemble Q_μ est, d'après (6), un G_δ dans Q. D'autre part l'ensemble Q_μ est au plus dénombrable, donc l'ensemble $Q_\mu - D$ est également au plus dénombrable. Il en résulte, d'après (7), que D est un G_δ dans Q, c. q. f. d.

Lemme 2. *Soient: M un espace séparable et Q un sous-ensemble de M, jouissant de la propriété (ω) dans M. Thèse: $dim_p(Q) \geqslant dim_p(M) - 1$ pour chaque $p \in M$.*

D é m o n s t r a t i o n. Considérons les propriétés suivantes de l'ensemble $Q \subset M$:

(ω_1) $BQ \neq 0$ pour chaque ensemble B borelien dans M, de dimension $\geqslant 1$;

(ω_2) $dim(BQ) \geqslant dim(B) - 1$ pour chaque ensemble B borelien dans M;

(ω_3) $dim_p(Q) \geqslant dim_p(M) - 1$ pour chaque $p \in M$.

Nous allons démontrer que $(\omega) \to (\omega_1) \to (\omega_2) \to (\omega_3)$.

1° $(\omega) \to (\omega_1)$. Cette relation résulte directement du fait que chaque ensemble de mesure linéaire nulle est de dimension 0 [1].

2° $(\omega_1) \to (\omega_2)$. Soient: Q un ensemble jouissant de la propriété (ω_1), B un ensemble borelien dans M et H un ensemble $G_{\delta\sigma}$ dans M tel que

$$(8) \qquad H \supset BQ \qquad \text{et} \qquad dim\,(BQ) = dim\,(H)\ ^{2)}$$

L'ensemble $B - H$ étant borelien, disjoint de Q et l'ensemble Q jouissant de la propriété (ω_1), on a $dim\,(B-H) = 0$. Par conséquent, on a, en vertu de (8):

$$dim\,(BQ) = dim\,(H) \geqslant dim\,(BH) \geqslant dim\,(B) - 1\ ^{3)}$$

3° $(\omega_2) \to (\omega_3)$. Soit $p \in M$. La frontière F de chaque voisinage ouverte de p suffisament petit, est de dimension $\geqslant dim_p\,(M) - 1$ [4]. L'ensemble Q satisfaisant à la condition (ω_2), on a $dim\,(FQ) \geqslant dim_p\,(M) - 2$, d'où il résulte que $dim_p\,(Q) \geqslant dim_p\,(M) - 1$.

Le lemme 2 est ainsi démontré.

Chaque ensemble de dimension $n+1$ contenu dans $\mathscr{E}^{n+1}$ contenant des points intérieurs, la dimension de chaque sous-ensemble de $\mathscr{E}^{n+1}$ jouissant de la propriété (λ) est de dimension $\leqslant n$. Nous obtenons d'après cette remarque et d'après les lemmes 1 et 2 le

Théorème 3. *Si $\aleph_1 = \mathfrak{c}$, il existe dans l'espace $\mathscr{E}^{n+1}$ un ensemble jouissant de la propriété (λ), de dimension n dans chaque points de cet espace.*

Les lemmes 1 et 2 nous donnent également le

Théorème 4. *Si $\aleph_1 = \mathfrak{c}$, il existe des ensembles jouissant de la propriété (λ), situés resp. dans l'espace $\mathscr{H}$ ou $\mathscr{H}_0$, de dimension resp. indénombrable ou dénombrable dans chaque point de cet espace.*

*

[1]) E. Szpilrajn, *La dimension et la mesure*, Fund. Math. 28 (1937), pp. 85 et 86.

[2]) Voir la proposition (b), p. 118.

[3]) Voir la proposition (c), p. 118.

[4]) Voir la proposition (a), p. 118.

On considère parfois des propriétés encore plus restrictives que la propriété (λ): les propriétés (σ) et (S).

On dit qu'un ensemble E jouit de *la propriété* (σ) lorsque chaque ensemble F_σ dans E est un G_δ dans E[1]. M. Kuratowski a démontré que chaque ensemble de dimension finie, jouissant de cette propriété est de dimension 0[2]. — Considérons maintenant la propriété (S).

Appelons *mesure* dans l'espace métrique M chaque fonction finie, non negative et absolument additive d'ensemble borelien (dans M). Convenons de dire qu'un ensemble $Z \subset M$ jouit de *la propriété* (S) par rapport à la mesure μ lorsque

(S) L'ensemble Z a un ensemble au plus dénombrable des points communs avec tout ensemble de mesure μ nulle[3].

Théorème 5. *Chaque ensemble jouissant de la propriété* (S) *par rapport à une mesure* μ *est de dimension* 0.

Démonstration. Supposons qu'un ensemble Z situé dans l'espace M jouit de la propriété (S) par rapport à une mesure μ (dans M). Soit p un point fixe de Z et J l'ensemble des nombres non negatifs. Pour chaque nombre $r \geqslant 0$ et chaque ensemble $E \subset J$ désignons par $S(r)$ la sphère de centre p et de diamètre r, et par $S(E)$ la somme de toutes les sphères $S(r)$ pour $r \in E$. On voit facilement que pour chaque ensemble borelien $B \subset J$, l'ensemble $S(B)$ est borelien dans M et que la fonction d'ensemble borelien (dans J) $\nu(B) = \mu[S(B)]$ est une mesure dans J. On peut donc construire un ensemble parfait P de nombres non négatifs, contenant le point 0 et tel que $\nu(P) = 0$, c. à d. $\mu[S(P)] = 0$. L'ensemble Z jouissant de la propriété (S) par rapport à μ, l'ensemble $Z \cdot S(P)$ est au plus dénombrable, il existe donc une suite de nombres positifs $r_1, r_2, \cdots$ tendant vers 0 et tel que $Z \cdot S(r_n) = 0$. Il en résulte que $dim_p(Z) = 0$, c. q. f. d.

On sait que chaque sous-ensemble du cube $\mathcal{J}^n$ jouissant de la propriété (S) par rapport à la mesure lebesguienne (n-dimensionnelle) jouit éga-

---

1) Kuratowski l. c., p. 272.

2) Mazurkiewicz-Szpilrajn l. c., p. 307.

3) Cf. p. ex. Sierpinski l. c., pp. 81—94.

lement de la propriété (σ)[1]. Cela résulte directement du fait que chaque ensemble borelien est la somme d'un ensemble F_σ et d'un ensemble de mesure lebesguienne nulle. Cette dernière proposition étant vraie pour chaque mesure[2], la propriété (S) (d'un ensemble situé dans un espace métrique arbitraire) par rapport à une mesure quelconque, entraîne la propriété (σ).

Par conséquent, le théorème 5 est contenu, pour le cas d'un ensemble de dimension finie, dans le resultat mentionné de M. Kuratowski.

---

[1]) Voir Sierpiński l. c., p. 90, lemme 3; cf. aussi E. Szpilrajn, *Sur un problème de M. Banach*, Fund. Math. 15 (1930), p. 212.

[2]) E. Szpilrajn, *Sur les ensembles et les fonctions absolument mesurables* (en polonais), C. R. de la Soc. des Sciences et des Lettres de Varsovie 30 (1937), p. 43 [2]).