Über die starren und die mit ihnen gleichwertigen Körper in der Relativitätstheorie

Von

M. RADOJČIĆ

1. Die vorliegenden Bemerkungen knüpfen sich an die bis jetzt erschienenen zwei Teile meiner axiomatischen Entwicklung der Relativitätstheorie an[1]). Im zweiten Teile dieser Entwicklung handelte es sich, zunächst im eindimensionalen Fall, um die Ableitung der Gleichung

$$(x - x_0)^2 - c^2 (t - t_0)^2 = 0 \tag{1}$$

ohne sich auf Inertialsysteme zu beschränken und um den Umstand, dass dieselbe Gleichung auch bei x-Achsen, die sich nicht mit konstanten Geschwindigkeiten gegeneinander bewegen, erfüllt bleiben kann[2]).

---

[1]) *Grundlegendes zum axiomatischen Aufbau der speziellen Felativitätstheorie* I und II (diese Zeitschrift 1933 und 1934).

[2]) l. c. II, Nr. 11 bis 14. Seitdem diese Arbeit erschienen ist, besonders in der letzten Zeit, gelangte man auf anderen Wegen zu Ergebnissen, die sowohl mit den früheren wie mit den vorliegenden Betrachtungen Berührungsstellen aufweisen, ohne sich mit ihnen zu decken. Ich denke an die, auch der Axiomatik immer näher kommenden Erörterungen, die zum Teil durch das Werk von E. A. Milne, *Relativity, gravitation and world-structure* (Oxford 1935) veranlasst oder angeregt worden sind und an dieses Werk selbst. Siehe H. P. Robertson, *Kinematics and world-structure* (Astrophys J. 1935/36), E. J. Whitrow, *Kinematical relativity* (Proc. London Math. Soc. 1936), L. Page, *A new relativity* (Physic. Rev. 1936) usw. Die Verallgemei-

Nun wollen wir dieses Problem wieder aufnehmen und auf mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten übertragen. Die Art wie das getan werden soll, wird, hoffen wir, zeigen, dass sich dasselbe Problem einfach und natürlich in die Relativitätstheorie eingliedert und selbst für ihr allgemeines Verständnis beibringen könnte.

Die erwähnte axiomatische Entwicklung ist zum Teil dadurch charakterisiert, dass statt Massstäbe und Uhren von aussen einzuführen, diese Begriffe mit Hilfe des Lichtes ebenso erklärt werden, wie es Einstein in der Begründung der speziellen Relativitätstheorie mit der Gleichzeitigkeit getan hat. Schon die Homogenität der Grundlagen, nach der man in der Entwicklung einer Theorie strebt, rechtfertigt es, statt der „starren Körper", — die doch, streng genommen, nur für irdische Verhältnisse ausreichen und dabei verschiedenen Änderungen (Wärme, Elastizität usw.) unterliegen — solche, durch stetige oder diskrete Mengen materieller Punkte gebildete „Körper" zu verwenden, deren gegenseitige Entfernungen, die wir durch Lichtstrahlen erklärt denken, unverändert bleiben[3]). Um einen Namen zu haben, werden wir sie *lichtmetrische* oder kurz *metrische Körper* nennen, da sie diejenigen „Körper" sind, die in der Relativitätstheorie zum Messen geeignet sind. Gilt z. B. für drei Punkte A, B, C eines metrischen Körpers S $AB = AC$ im betrachteten Sinne, so soll das bedeuten, dass fortwährend von A ausgehende Lichtsignale, die in B und C reflektiert werden, gleichzeitig aus B und C in A zurückkehren.

Nun ist in derselben Art von Beziehungen auch die Einstein-sche Gleichzeitigkeit mitenthalten: Zwei Ereignisse in B und C heissen gleichzeitig, falls sie — wie die reflektierten Strahlen — gleichzeitig in A gesehen werden. Drittens brauchen wir die Lichtstrahlen nur fortwährend zwischen den Punkten

---

nerung der Lorentz-Transformationen im Milne-schen Sinne ist nicht die hier betrachtete und die von Page lässt zwar nach einer Bemerkung von H. T. Engstrom und M. Zorn (*The transformation of reference systems in the Page relativity*, Phys. Rev. 1936) die Nullkegel einer euklidischen Mannigfaltigkeit invariant, sie wird jedoch unter anderen Gesichtspunkten hergeleitet (siehe das Ref. im Zentralblatt, Bd. 14 H. 2).

[3]) Siehe Teil II, Nr. 5—7 meiner erwähnten Arbeit, wo die Entfernungsbegriffe genau erklärt wurden.

reflektiert werden denken, um auch das entsprechende Zeitmass in den einzelnen Punkten zu erhalten, wie schon vielfach getan worden war, wobei man von Lichtuhren sprach. Ein zwischen A und B reflektierter Strahl soll also in A die Augenblicke $t_n = t_0 + ns$ $(n = 0, 1, 2, \ldots$ und vielleicht auch $-1, -2, \ldots)$ registrieren, wobei $s =$ konst. ist. Also schon in der Definition dieser metrischen Elemente finden sich Raum und Zeit ebenso miteinander verwoben, wie es die ganze Relativitätstheorie charakterisiert. Bezeichnet c die Lichtgeschwindigkeit, so ist $c = s : 2AB =$ konst. und man sieht sofort, dass c in allen Richtungen und allen Punkten des metrischen Körpers S denselben konstanten Wert haben muss.

Also, es ergibt sich nach Einführung von derartigen metrischen Elementen die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit von selbst, während sie sonst ein besonderes Postulat verlangt. Das Postulat kommt nur dann in Betracht, wenn an Stelle der lichtmetrischen Körper die gewöhnlichen starren Körper treten und bedeutet eigentlich, dass die natürlichen starren Körper lichtmetrische Körper sind. Dies soll sich aus Michelson's und anderen Experimenten erwiesen haben.

Wenn aber die starren Körper durch die lichtmetrischen ersetzt werden, muss die Eindeutigkeit der starren Körper aufgegeben werden, wie nun gezeigt werden soll, da Körper, die sich gegenüber der Lichtausbreitung wie starre Körper verhalten, sich gegeneinander in verschiedener Weise dehnen oder zusammenziehen und überhaupt deformieren können. Diese „Relativität der lichtmetrischen Körper" kündigt sich in einfacher Weise schon innerhalb der vorangehenden Andeutungen an: Wie sich auch die Punkte A und B bewegen mögen, C kann sich immer so bewegen, dass dauernd $AB = AC$ sei und es scheint in vorhinein möglich zu sein, dass sich dieser Umstand beim Übergang zu den übrigen Punkten von S bewährt. Inwiefern das möglich ist, kann man alle metrischen Körper, die sich zueinander etwa wie starre Körper verhalten, als zu einem allgemeinen System gehörend auffassen und von verschiedenen *Systemen lichtmetrischer Körper* reden. Nach der allgemeinen Auffassung gehören alle starren Körper der Welt einem einzigen System an.

2. Betrachten wir zuerst den räumlich eindimensionalen Fall (der sich übrigens als Ausnahme gegenüber mehreren Dimensionen verhält). In zweifacher Weise kann vorgegangen werden: 1. indem eine diskrete „metrische Punktreihe“, die sich längs einer stetigen „metrischen Punktreihe“, einer x-Achse bewegt, betrachtet wird, 2. indem auch die erste Punktreihe als eine stetige x'-Achse vorausgesetzt wird[4]).

Im ersten Falle seien A, B, C drei Punkte, die sich auf der x-Achse so bewegen, dass im lichtmetrischen Sinne $AB = BC$ sei. Sind

$$x_A = \alpha(t)\ ,\quad x_B = \beta(t)\ ,\quad x_C = \gamma(t)$$

die Bewegungsgleichungen der drei Punkte, t_0 der Augenblick eines aus B ausgehenden Lichtsignals, t_1, t_2, die Augenblicke der Reflexion in A und C, t_3 der Augenblick, in dem die Strahlen in B zurückkehren, ist ausserdem im Augenblick t_0 $x_A < x_B < x_C$, so ist

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\beta(t_0) - \alpha(t_1) = c(t_1 - t_0)\ ,\ \beta(t_3) - \alpha(t_1) = c(t_3 - t_1)\ ,\\ &\gamma(t_2) - \beta(t_0) = c(t_2 - t_0)\ ,\ \gamma(t_2) - \beta(t_3) = c(t_3 - t_2)\ . \end{aligned}$$

Wie auch immer zwei Funktionen, z. B. α und β gewählt werden, die dritte, also γ, kann durch Elimination von drei unter den vier Grössen t_0, t_1, t_2 und t_3 aus den vier Gleichungen (2) bestimmt werden. — Bewegt sich der mittlere Punkt B mit der konstanten Geschwindigkeit v und ist

$$\beta(t) = vt\ ,$$

so gewinnt man leicht zur Bestimmung der Funktion γ aus der Funktion α, oder umgekehrt, das folgende Gleichungspaar[5])

$$\begin{aligned} \alpha(t_1) &= h_1 t_1 - h_2 t_2\ ,\\ \gamma(t_2) &= h_1 t_2 - h_2 t_1\ , \end{aligned}$$

worin

$$h_1 = \frac{c^2 + v^2}{2v}\ ,\qquad h_2 = \frac{c^2 - v^2}{2v}$$

ist.

---

[4]) l. c. Teil II, zweiter Abschnitt, der über „gerade Punktreihen“ handelt.

[5]) l. c. II, S. 144. Das Gleichungspaar ist dort unrichtig notiert.

Bewegt sich ausser B auch A mit einer konstanten Geschwindigkeit und ist

$$\alpha(t) = ut\,, \qquad \beta(t) = vt\,, \tag{3}$$

(im allgemeinen $u \neq v$) so gewinnt man

$$\gamma(t) = wt$$

mit

$$w = \varphi(u\,,v) = \frac{2c^2 v - u(c^2 + v^2)}{c^2 + v^2 - 2uv}\,.$$

Also, auch C bewegt sich mit einer konstanten Geschwindigkeit.

Sind D und E zwei weitere Punkte der auf der x-Achse sich bewegenden diskreten oder stetigen „Punktreihe" und ist einerseits $BC = CD$, anderseits $EA = AB$, sind w_D, w_E die entsprechenden Geschwindigkeiten, so bekommt man

$$w_D = \varphi(v\,,w) = \varphi[\,v\,,\varphi(u\,,v)\,] \tag{4}$$

und

$$v = \varphi(w_E\,.\,u)\,. \tag{5}$$

Löst man (5) nach w_E, so bekommt man

$$w_E = \varphi(v\,,u)\,.$$

Die Funktion φ kann also dazu dienen, die Bewegung von weiteren äquidistanten Punkten links und rechts von A und B zu bestimmen. Dabei kommen immer höhere Iterationen in Betracht, von der in (4) vorkommenden Art.

Gehören die betrachteten Punkte zu einer „x'-Achse", die sich auf der x-Achse bewegt, so kann auf demselben Wege die Bewegung eines jeden ihrer Punkte mit beliebiger Genauigkeit bestimmt werden. Ist nähmlich P ein Punkt der x'-Achse, der die Entfernung AB halbiert und ist $\overline{w}$ seine Geschwindigkeit, so ist

$$v = \varphi(u\,,\overline{w})\,.$$

Ist $u = -v$, so folgt $\overline{w} = 0$, sonst gilt die Gleichung

$$\overline{w}^2 - 2\,\frac{c^2 + uv}{u + v}\,\overline{w} + c^2 = 0\,,$$

deren Diskriminante immer positiv ausfällt, denn aus $|u|, |v| < c$ folgt $\pm v(c \mp u) < c(c \mp u)$, hieraus $c^2 + uv > \pm c(u+v)$, dann $(c^2 + uv)^2 > c^2(u+v)^2$, also

$$\left(\frac{c^2+uv}{u+v}\right)^2 - c^2 > 0 .$$

Von den beiden Lösungen

$$\bar{w} = \frac{c^2+uv}{u+v} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2+uv}{u+v}\right)^2 - c^2}$$

gilt nur jene, die den zweien Ausdrücken rechts entgegengesetzte Vorzeichen erteilt, weil nur dann $|\bar{w}| < c$ ist. Also auch die Punkte wie P, die die Entfernungen halbieren, sind eindeutig bestimmt. Durch ein solches „Halbierungsverfahren" kann man aber, offenbar, jedem Punkte beliebig nahe kommen.

Falls die Transformationen

$$x' = f(x, t) \ , \ t' = g(x, t) ,$$

die die Bewegung der x'-Achse gegenüber der x-Achse feststellen, differenzierbare Funktionen enthalten, kann von der invarianten Gleichung (1), in Differentialen umgeschrieben, ausgegangen werden. Also

$$dx^2 - c^2\,dt^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad dx'^2 - c'^2\,dt'^2 = 0$$

sollen ineinander übergehen. Dies liefert die Differentialgleichungen

$$f'_x f'_t - c^2 g'_x g'_t = 0 ,$$

$$f'^2_x - c^2 g'^2_x = -\frac{1}{c^2}(f'^2_t - c^2 g'^2_t) ,$$

die nach der Bemerkung, dass stets

$$g'_t > 0$$

sein muss und dass es zweckmässig ist vorauszusetzen

$$f'_x > 0$$

(was nur bedeutet, dass beide Achsen dieselbe Richtung haben) leicht in die Form

$$
\begin{aligned}
f'_x &= g'_t \\
f'_t &= c^2 g'_x
\end{aligned}
\tag{6}
$$

gebracht werden können. Wird in (6) nochmals differenziert, so ergibt sich für f und g die Laplace-sche Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} = 0 \quad , \quad \tau = it ,$$

die den konformen Charakter dieser Transformationen bestetigt.

Bewegt sich die x'-Achse mit der konstanten Geschwindigkeit v gegen die x-Achse, so folgt aus (6) sofort die Lorentz-Transformation. In der Tat, dann hängt $x - vt$ nur von x' ab, also kann man

$$x' = \varphi(x - vt)$$

schreiben, folglich lauten die Gleichungen (6)

$$\varphi' = g'_t \quad , \quad - v\varphi' = c^2 g'_x , \tag{7}$$

woraus sich die Gleichung

$$c^2 g'_x + v g'_t = 0$$

und deren allgemeines Integral

$$g = \psi(c^2 t - vx) \tag{8}$$

ergeben. Wird (8) in die erste Gleichung (7) gesetzt so folgt

$$\varphi' = c^2 \psi'$$

und da φ' und ψ' Funktionen zweier unabhängigen Veränderlichen sind,

$$\varphi' = c^2 \psi' = a = \text{konst} .$$

Also ist mit geeigneten Anfangsbedingungen

$$
\begin{aligned}
x' &= a(x - vt) , \\
t' &= a\left(t - \frac{vx}{c^2}\right) ,
\end{aligned}
$$

worin a von der Wahl der Einheiten abhängt.

Auch das Beispiel (3) kann jetzt vollständig erledigt werden. Wie gesehen, falls zwei Punkte der x'-Achse konstante, aber verschiedene Geschwindigkeiten haben, so sind die Geschwindigkeiten aller Punkte dieser Asche konstant und es ist keine wesentliche Einschränkung, wenn allgemein

$$x = w\,t$$

angenommen wird, wobei w nur von x' abhängt. Also ist jetzt

$$x' = \varphi\left(\frac{x}{t}\right),$$

folglich lauten die Gleichungen (6)

$$\frac{1}{t}\varphi' = g'_t \quad , \quad -\frac{x}{t^2}\varphi' = c^2 g'_x \,, \tag{9}$$

woraus sich die Differentialgleichung

$$c^2 t\, g'_x + x\, g'_t = 0$$

und deren allgemeines Integral

$$g = \psi\,(c^2 t^2 - x^2) \tag{10}$$

ergeben. Wird (10) in die erste Gleichung (9) gesetzt, so folgt

$$\varphi' = 2\,c^2 t^2 \psi'$$

und hieraus

$$\psi\,(c^2 t^2) = \frac{a}{2}\log c^2 t^2 + c'$$

und

$$\varphi\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{ac}{2}\log\frac{c + \frac{x}{t}}{c - \frac{x}{t}} + c'' ,$$

wo $a = \varphi'(0)$ ist. Wird für $x = 0$ und $t = 1$ angenommen, dass $x' = 0$ und $t' = 0$ sei, so muss $c' = c'' = 0$ sein und wir erhalten

$$\begin{aligned} x' &= \frac{ac}{2}\log\frac{ct + x}{ct - x}\,, \\ t' &= \frac{a}{2}\log\left(t^2 - \frac{x^2}{c^2}\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Die Transformationsgleichungen (11) gehören keiner transitiven reellen Gruppe an; sie sind nur dann reell, wenn $c^2 t^2 - x^2 \geqq 0$ ist, also ist in irgendeinem Augenblick $t > 0$ die ganze „x'-Achse" im Intervall $\left(-\frac{t}{c}, +\frac{t}{c}\right)$ enthalten, welches sich für $t = 0$ auf den Punkt $x = 0$ zusammenzieht. Nichtsdestoweniger ist die x'-Achse in bezug auf die Lichtausbreitung eine ebensolche „unendliche starre Achse" wie die x-Achse selbst; auch ihre Dauer ist, von ihrem Gesichtspunkt betrachtet, in Vergangenheit wie in Zukunft unendlich.

Macht man die Voraussetzung, auf beiden Achsen gelte das Relativitätsprinzip für alle Naturgesetze ebenso wie für die Lichtausbreitung, so kann man schlechtweg sagen, dass vermeintliche Beobachter auf der x-Achse dieselben Vorstellungen über ihre eindimensionale Welt haben müssen, wie entsprechende Beobachter auf der x'-Achse über die ihrige. Nur würden die ersteren im Augenblick $t = 0$ die ganze x'-Welt aus einem Punkte entstehen und sich stets ausdehnen sehen, und die letzteren würden seit der unendlichen Vergangenheit $t' = -\infty$ die x-Welt aus unendlicher Weite zuströmen und immer kleiner werden sehen und sie würden der x-Welt eine in vor-unendlicher Vergangenheit liegende Vorzeit zugeben müssen.

3. Der Übergang zu mehreren räumlichen Dimensionen gestaltet sich am einfachsten, wenn es sich um eine euklidische Raum-Zeit-Mannigfaltigkeit handelt, da man dann den Raum, im zweidimensionalen Fall die Ebene, unmittelbar durch beliebig weit ausgedehnte, zwei-oder dreidimensionale lichtmetrische Körper auf Grund der Lichtausbreitung metrisch gegeben denken kann. Bewegen sich zwei solche „Körper" gegeneinander, so besteht bei Verwendung rechtwinkliger kartesischer Koordinaten, die an beide „Körper" „gebunden" sind, als einzige Bedingung die Invarianz der Gleichung

$$(12) \qquad c^2 (t - t_0)^2 - \sum_1^{n-1} (x^k - x_0^k)^2 = 0 \qquad (n = 3, 4)$$

für beliebige t_0 und x_0^k. Die allgemeinste transitive Gruppe reeller Transformationen, die (12) invariant lässt, ist wie bekannt eine $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$-gliedrige Gruppe konformer Transformationen und kann aus einer Verschiebung des Koordinatenursprungs, einer Lorentz-Transformation und einer Transformation von der Form

$$x'^{\nu} = \frac{x^{\nu} - q\,\gamma_{\nu} \sum (x^k)^2}{Q(x)} \qquad \nu, k = 1, 2, \ldots, n$$

zusammengesetzt werden, wobei $ict = x^n$, $ict' = x'^n$ und

$$1 - 2q \sum \gamma_k x^k + q^2 \sum \gamma_k^2 \cdot \sum (x^k)^2 = Q(x)$$

gesetzt wurde und q, γ_{ν} beliebige Parameter bezeichnen[6]). Durch die letzte Transformation ändert sich die linke Seite von (12) insoviel, als

$$\sum (x'^{\nu} - x_0'^{\nu})^2 = \frac{1}{Q(x)\,Q(x_0)} \sum (x^{\nu} - x_0^{\nu})^2 \tag{13}$$

gilt. Dieselbe Transformation kommt dann und nur dann in Betracht, wenn die beiden metrischen Körper zu verschiedenen Systemen solcher Körper gehören.

In Differentialen ausgedrückt, lautet die Forderung, dass, statt (12), die Gleichung

$$\sum (dx^k)^2 = 0$$

invariant sei und es lautet (13)

$$\sum (dx'^k)^2 = \frac{1}{Q^2} \sum (dx^k)^2 \,. \tag{14}$$

Weitere Verallgemeinerungen liegen nun an der Hand. Die soeben erwähnten Verhältnisse behalten im Kleinen immer ihre Gültigkeit, weil im Kleinen von lichtmetrischen Körpern unmittelbar gesprochen werden kann. Sie bilden die metrischen Elemente, aus denen die Welt als metrische Mannigfaltigkeit bestimmt werden kann. Die Verallgemeinerung auf beliebige Mannigfaltigkeiten kann offenbar nur darin bestehen, dass, wie auch immer eine metrische Mannigfaltigkeit durch ihre Fundamentalform

$$ds^2 = g_{ik}(x)\, dx^i dx^k \,, \tag{15}$$

---

6) Siehe S. Lie und F. Engel, Theorie der Transformationsgruppen, Bd. 3, Kap. 17—19.

welcher ein bestimtes System lichtmetrischer Körper zugrunde liegt, festgestellt sei, der Übergang zu einem anderen System stets so möglich ist, dass nach Wahl geeigneter Koordinaten im zweiten System die Gleichung

$$g_{ik}\, dx^i\, dx^k = 0$$

invariant bleibt. Also muss in den neuen Koordinaten x'

$$ds'^2 = g_{ik}(x')\, dx'^i\, dx'^k,$$

mit denselben Funktionen g_{ik} sein. Aus dieser Invarianz folgt stets

$$ds' = \varrho(x)\, ds, \tag{16}$$

wobei ϱ eine positive Funktion der x^i ist. Obwohl in dieser Transformation einem bestimmten Koordinatensystem in einem System metrischer Körper ein bestimmtes Koordinatensystem in einem anderen System metrischer Körper zugeordnet wird, ist das Wesen der Transformation von der Wahl der Koordinatensysteme unabhängig. Ist nähmlich $x^i = f_i(\xi)$ irgendeine Koordinatentransformation, die (15) in

$$ds^2 = \gamma_{ik}(\xi)\, d\xi^i\, d\xi^k$$

umwandelt, so ergibt dieselbe Transformation, d. h. $x'^i = f_i(\xi')$, im anderen System metrischer Körper wieder

$$ds'^2 = \gamma_{ik}(\xi')\, d\xi'^i\, d\xi'^k.$$

Um den konkreten Sinn der betrachteten Transformationen hervorzuheben, sei die folgende Überlegung beigefügt. — Wie bekannt, genügt es in der Umgebung eines Punktes einer gegebenen Mannigfaltigkeit die Lichtausbreitung zu bestimmen, um in den zur Verfügung stehenden Koordinaten das Verhältnis der g_{ik} im selben Punkte zu erhalten. So kann ds in jedem Punkte bis auf einen Proportionalitätsfaktor $\lambda(x)$ bestimmt werden. Dieser lässt sich durch das Aufsuchen geodetischer Linien, d. h. durch die „kräftefreie" Bewegung der materiellen Punkte ermitteln, die „Uhren mit sich führen".[7] Da

---

[7]) Siehe H. Weyl, *Raum, Zeit, Materie*, S. 207 und 285 der 4 Auflage oder auch T. Levi-Civita, *Der absolute Differentialkalkül*, Kap. 8, Nr. 28.

wir vom Anfang an nur „Lichtuhren" anerkennen, welche wiederum „konstante" Entfernungen materieller Punkte voraussetzen, ist es klar, dass dabei an ein bestimmtes System der lichtmetrichen Körper in allen Punkten der Mannigfaltigkeit, oder wenigstens in einem gewissen Bereich derselben, gedacht werden soll und dass folglich die somit eindeutig bestimmten g_{ik} einem einzigen System lichtmetrischer Körper (nicht nur einem Koordinatensystem) entsprechen. Werden zwei verschiedene Systeme lichtmetrischer Körper S und S' zugleich ins Auge gefasst, so stehen uns in jedem Punkte der Mannigfaltigkeit, oder des betreffenden Bereiches, zwei lokale lichtmetrische Körper zur Verfügung, der eine zu S, der andere zu S' gehörig, die in jedem Punkte zwei verschiedene Werte für λ liefern. Bezieht sich (15) auf S und ist (in denselben Koordinaten) in S'

$$ds'^2 = g'_{ik}\, dx^i\, dx^k \quad ,$$

so kann, wenn das Verhältnis der beiden λ mit ϱ bezeichnet wird,

$$g'_{ik} = \varrho^2 g_{ik}$$

geschrieben werden und wir erhalten wieder die Beziehung (16).

Die Funktion ϱ kann immer als eine „Umeichung" darstellend aufgefasst werden, aber sie ist nicht die allgemeinste, da sie sich aus der entsprechenden endlichen Transformationsgruppe herleitet. ϱ ändert sich mit dem System metrischer Körper, bleibt aber innerhalb desselben Systems invariant. Man kann ϱ als eine lineare *Dichte* des Systems S' in Bezug auf das System S in den einzelnen Punkten der Mannigfaltigkeit deuten, wozu die folgende Bemerkung, die am einfachen Beispiel (11) gemacht werden kann, genügen mag. Dort findet man

$$\varrho(x, t) = \frac{ac}{\sqrt{c^2 t^2 - x^2}} ,$$

also ist auf den Geraden $x = \pm ct$, die die „Grenze" der x'-Welt in Bezug auf die x-Welt darstellen, $\varrho = \infty$, was auf die unendlich zunehmende Dichte der Weltlinien $x' = \text{konst.}$ (z. B. $x' = m, m = 0, \pm 1, \cdots \to \pm\infty$) in der Nähe dieser „Grenzen" hinweist. In einer euklidischen Mannigfaltigkeit folgt aus (14)

$$\varrho = \frac{1}{Q} \qquad (n > 2)$$

und die Grenze der S'-Welt vom Standpunkte der S-Welt, an der $\varrho = \infty$ ist, wird durch die $(n-1)$-dimensionale Fläche zweiten Grades $Q = 0$ gegeben.

Es mag noch bemerkt werden, dass diese Gleichwertigkeit von verschiedenen lichtmetrischen Körpern nur die Kinematik der Relativitätstheorie betrifft: Alle möglichen lichtmetrischen Körper, die in einem Weltpunkte denkbar sind, sind „lichtkinematisch" gleichwertig. Wird aber auch die Wirkung des Gravitationsfeldes in Betracht genommen, so kann offenbar nur in Bezug auf ein einziges System lichtmetrischer Körper die kräftefreie Bewegung genau den geodetischen Linien der Welt folgen; für die anderen Systeme müssen noch gewisse, ausserhalb der Gravitation liegende Kräfte vorhanden sein, die eine durch geodetische Linien beschriebene Bewegung bewirken. Ausnahmen sind aber möglich, wie schon das erwähnte Beispiel (11) zeigt, worin jeder Punkt der x'-Achse, falls sich die x-Achse im Trägheitszustand befindet, ebenfalls eine Trägheitsbewegung beschreibt. Man kann auch sagen: Die betrachtete Welt hat für die Beobachter, die nur ein System der lichtmetrischen Körper beachten wollen, dieselben kinematisch-metrischen Eigenschaften, wie für die entsprechenden Beobachter eines anderen Systems, aber beide Gruppen von Beobachtern finden ein verschiedenes Verhalten ihrer „starren" Körper zum Gravitationsfeld.

Wie auch immer diese Überlegung ein bloss theoretisches Interesse haben mag, die Frage nach ihrer Beziehung zur Wirklichkeit kann wohl gestellt werden. Das Verhalten jener inneren Kräfte, die den starren Körpern ihre Starrheit verleihen, eine Starrheit, die sich nach den experimentellen Grundlagen der Relativitätstheorie in so eizigartiger Weise gegenüber der Lichtausbreitung benimmt, könnte gegenüber der Gravitation verschiedene Formen besitzen, von denen die in der allgemeinen Relativitätstheorie angenommene offenbar die einfachste ist. Es wäre auch denkbar, dass sich im Lauf der Weltentwicklung die starren Körper in einem Bereich der Welt anders benehmen, als in einem anderen Bereiche — inwieweit von starren Körpern, in den verschiedenen Weltgegenden gesprochen werden kann.

Aber unabhängig von den Fragen, die an die starren Körper, in irgendwelchem Zusammenhange gestellt werden könnten, gilt die allgemeine Relativitätstheorie gewiss innerhalb eines bestimmten Systems der lichtmetrischen Körper, während ihr kinematischer Teil innerhalb eines jeden denkbaren Systems ihre Gültigkeit behält. Das Einsteinsche Gravitationsgesetz enthält aber die natürliche Voraussetzung, dass jenes ausgezeichnete System der lichtmetrischen Körper mit dem Inbegriff der wirklichen starren Körper zusammenfällt.