Sur les lignes de courbure des surfaces réglées à plan directeur

Par

DRAGOSLAV MITRINOVITCH

I.

Dans la présente Note nous considérons les surfaces réglées à plan directeur yOz, à savoir

$$z = f(x)\, y + \varphi(x) \tag{1}$$

et nous nous proposons de déterminer les lignes de courbure de ces surfaces.

Le procédé bien connu conduit, pour définir les lignes de courbure des surfaces (1), à l'équation différentielle

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2By\frac{dy}{dx} + Cy^2 + 2D\frac{dy}{dx} + 2Ey + F = 0, \tag{2}$$

où

$$\begin{aligned}
A &= f'(1+f^2), \\
B &= \frac{1}{2} f''(1+f^2), \\
C &= f'(ff'' - f'^2), \\
D &= \frac{1}{2} \varphi''(1+f^2), \\
E &= \frac{1}{2}\left[(ff'' - 2f'^2)\varphi' + ff'\varphi''\right], \\
F &= f\varphi'\varphi'' - f'\varphi'^2 - f'.
\end{aligned} \tag{3}$$

Le problème proposé se ramène donc à une équation différentielle qui ne peut être intégrée que pour des formes spéciales des fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$.

Nous allons montrer que les lignes de courbure des surfaces (1), *où la fonction* $f(x)$ *est arbitraire et où la fonction* $\varphi(x)$ *est définie par une équation linéaire intégrable du second ordre, se déterminent par des quadratures.*

II.

Dans le cas particulier où

$$f(x) = \text{Const.} = k\,,$$

l'équation (2) se ramène à

$$dx \cdot [(1 + k^2)\,\varphi''\,dy + k\,\varphi'\,\varphi''\,dx] = 0\,.$$

En supposant que

$$\varphi'' \neq 0\,,$$

on arrive à la conclusion suivante:

Pour la surface de translation

$$z = ky + \varphi(x) \tag{4}$$

une famille des lignes de courbure est représentée en projection sur le plan des xy *par l'équation*

$$y = -\frac{k}{1+k^2}\,\varphi + C_1\,,$$

et une autre famille par

$$x = C_2\,,$$

C_1 *et* C_2 *étant des constantes arbitraires.*

Les lignes de courbure de la surface de translatiou (4) s'obtiennent donc sans aucune quadrature.

III.

Supposons que la condition

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0$$

soit vérifiée; cette condition, toutes les réductions étant faites, s'écrit sous la forme[1])

$$(5) \qquad (f'\varphi'' - f''\varphi')^2 = 4f'^2(ff'' - f'^2) - f''^2(1 + f^2);$$

dans ce cas l'équation (2) se décompose en deux équations linéaires.

Or, d'une des fonctions $f(x)$ et $\varphi(x)$ dans l'équation (1) on dispose arbitrairement, et l'autre fera connaître la relation (5). Si l'on prend $\varphi(x)$ comme arbitraire, pour trouver $f(x)$ il faut intégrer une équation différentielle du second ordre non réductible aux quadratures. Mais si c'est la fonction $f(x)$ qui est arbitraire, la fonction φ' est définie par l'équation linéaire suivante

$$(6) \qquad f' \cdot \frac{d\varphi'}{dx} - f'' \cdot \varphi' = \pm \sqrt{4f'^2(ff'' - f'^2) - f''^2(1 + f^2)}.$$

Ce qui précède se résume en résultat suivant:

Les lignes de courbure des surfaces

$$z = f(x)y + \varphi(x),$$

où la fonction $f(x)$ est quelconque et où la dérivée de la fonction $\varphi(x)$ est définie par l'équation intégrable (6), *s'obtiennent par des quadratures.*

---

1) On suppose que $f' \neq 0$.