Rôle des décimales dans certains problèmes élémentaires d'Analyse et de Géométrie

Par

MICHEL PETROVITCH

A propos des suggestives refléxions de M. le Dr. L. Zaneti[1]) sur les décimales du nombre π, je me permets de croire que les remarques suivantes peuvent présenter quelque intérêt.

1. Les décimales isolées d'un nombre déterminé interviennent dans les solutions de problèmes d'Analyse et de Géométrie assez simples. J'en indiquerai quelques'uns à titre d'exemple, avec leurs solutions par la théorie des spectres numériques.

Désignons par (E) une courbe

$$(1) \qquad y = E(x)$$

où E est une fonction développable en série

$$E(x) = M_0 + M_1 x + M_2 x^2 + \cdots$$

dont les coefficients M_k seraient des nombres entiers positifs. On sait que parmi les fonctions E il y en a d'algébriques et de transcendantes: dans ce dernier cas la fonction a le cercle $|x| = 1$ comme coupure.

Nous désignerons comme *point caractéristique* de la courbe (E) le point ayant pour l'abscisse $x = 0,1$.

---

1) *Sphinx* N° 3, 1935.

Il est manifeste que:

Lorsque les points caractéristiques de deux courbes (E_1) *et* (E_2) *coincident, les courbes elles-mêmes coincident.*

Car, pour que les deux nombres

$$E_1(0,1) \text{ et } E_2(0,1)$$

soient égaux, il faut et il suffit que les coefficients M_k soient les mêmes pour les deux courbes.

Il est également manifeste que:

Pour qu'un point d'une courbe

$$(2) \qquad y = f(x)$$

coincide avec le point caractéristique d'une courbe (E), *il faut et il suffit:* 1° *qu'il ait pour l'abscisse* $x = 0,1$; 2° *que le nombre* $S = f(0,1)$ *soit positif;* 3° *que la courbe* (E) *ait pour coefficient* M_0 *la partie entière du nombre* S, *et pour coefficient* M_k *la* k*-ième décimale de* S.

Car, l'ordonnée du point caractéristique de (E) est le nombre

$$M_0,\ M_1 M_2 M_3 \cdots$$

ayant comme partie entière le coefficient M_0, et comme k-ième décimale le coefficient M_k. Pour que cette ordonnée soit égale à l'ordonnée $f(0,1)$ de la courbe (2), il faut et il suffit que les conditions énoncées soient remplies.

On voit, par exemple, ainsi que:

Le point caractéristique d'une courbe (E), pour laquelle la fonction $E(x)$ n'est pas un polynome, ne se trouve sur aucune parabole

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$$

dont chaque coefficient a_k n'a qu'un nombre limité de décimales.

Le point caractéristique d'aucune courbe (E) ne se trouve sur le courbe logarithmique

$$y = \log x.$$

La seule courbe (E) dont le point caractéristique se trouve sur le cercle de rayon un ayant son centre à l'origine, est la courbe

$$y = 9x + 9x^2 + 4x^3 + 9x^4 + 8x^5 + 7^6 + x \cdots$$

ayant son coefficient de x^n égal à la n-ième décimale du nombre

$$\sqrt{0{,}99} = \frac{3}{10}\sqrt{11} = 0{,}9949874 \cdots$$

La seule courbe (E) dont le point caractéristique se trouve sur la courbe exponentielle

$$y = e^x$$

est la courbe

$$y = 1 + x + 5x^3 + x^4 + 7x^5 + x^6 + 9x^7 + \cdots$$

dont le coefficient de x^n est égal à la n-ième décimale du nombre

$$e^{0,1} = 1{,}1051719 \cdots$$

2. Envisageons le problème de déterminer la courbe plane dont la sous-normale variera avec x suivant une courbe (E) non donnée, et aura au point caractéristique de cette courbe (E) une longueur donnée L.

La courbe cherchée est

$$(a) \qquad y = \sqrt{C + 2\varphi(x)}$$

où C est la constante ayant pour valeur

$$C = y_0^2 - 2\varphi(0{,}1)$$

y_0 étant l'ordonnée du point caractéristique de la courbe (a) et $\varphi(x)$ étant la fonction représentée par le développement

$$\varphi(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

ayant pour coefficient a_n la $(n-1)$-ième décimale du nombre L divisée par n, le coefficient a_1 étant la partie entière de ce nombre.

Dans le cas, par exemple, où la longueur L doit être celle de l'hypoténuse du triangle rectangle à cathètes égales à 1, la fonction φ sera

$$\varphi(x) = x + 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 2x^4 + \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{3}{7}x^7 + \frac{5}{8}x^8 + \cdots$$

le coefficient de x^n pour $n > 1$ étant la $(n-1)^{ième}$ décimale du nombre

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356 24 \cdots$$

divisée par n.

Envisageons encore, comme dernier exemple, le problème de déterminer la courbe plane dont l'aire limitée par l'axe des x, l'arc de la courbe et les deux ordonnées extrêmes, correspondant aux abscisses 0 et x, variera avec x suivant une courbe (E) non donnée, avec la condition qu'entre l'origine et le point caractéristique de la courbe (E) l'aire ait une valeur donnée P.

La courbe cherchée est

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

où a_n est égal à la $(n+1)^{ième}$ décimale de P multiplieé par $n+1$.

Dans le cas, par exemple, où l'aire P doit être égale à celle du quadrant du cercle de rayon 1, la courbe cherchée sera

$$y = 7 + 16x + 15x^2 + 12x^3 + 45x^4 + \cdots$$

où le coefficient de x^n est égal à la $(n+1)^{ième}$ décimale de

$$\frac{\pi}{4} = 0{,}7853981633 97 \cdots$$

multipliée par $n+1$.

3. Le problème, par exemple, de déterminer directement la décimale de rang n du nombre π est peut-être un de ces problèmes dont Euler disait que, quoique parfaitement définis, ils ne paraissent sujets à aucune analyse. Il se peut même qu'il appartient au domaine de problèmes dont Poincaré disait qu'une analyse capable de les résoudre „serait à notre analyse actuelle ce que celle-ci est à l'arithmétique des tribus nègres".

Mais, il n'en est pas moins vrai que *la décimale d'un rang voulu d'une infinité de classes de nombres algébriques ou transcendants N se laisse directement exprimer par une intégrale définie rattachée au nombre N.*

Tel serait, par exemple, le cas de tout nombre N défini comme ordonnée du point caractéristique d'une courbe (E). L'équation de la courbe étant

$$y = E(x) = M_0 + M_1 x + M_2 x^2 + \cdots$$

la n-ième décimale de N est égale à la valeur de l'intégrale

$$\frac{10^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} E\left(\frac{e^{ti}}{10}\right) e^{-nti}\, dt. \tag{3}$$

En effet, l'expression (3) s'écrit

$$\frac{10^n}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} 10^{-k} M_k \int_0^{2\pi} e^{(k-n)ti}\, dt.$$

Toutes les intégrales du second membre sont nulles, sauf celle correspondant à $k = n$ et ayant pour valeur 2π; la valeur de (3) se réduit bien à M_n.

On le vérifie, par exemple, sur la fonction rationnelle

$$E(x) = \frac{2x + 7x^2 + 2x^3 - x^4 + x^5}{1 - x^3} \tag{4}$$

dont on connait à l'avance la n-ième décimale du nombre correspondant $E(0{,}1)$. La courbe (E) a pour équation

$$y = 2x + 7x^2 + 2x^3 + x^4 + 8x^5 + 2x^6 + x^7 + 8x^8 + \cdots$$

et N est le nombre rationnel

$$N = E(0{,}1) = \frac{27195}{99900} = 0{,}27218218\ldots$$

La n-ième décimale est la valeur de l'expression (3) où pour $E(x)$ est à prendre la fonction (4).

Envisageons, comme second exemple, le cas de nombres N engendrés comme valeur que prend pour $x=0,1$ une fonction $f(x)$ remplissant les conditions suivantes:

1° elle est holomorphe au voisinage de $x=0$;

2° les termes indépendants de x dans $f(x)$ et dans toutes ses dérivées sont des nombres entiers positifs à un seul chiffre.

Il en est, par exemple, ainsi, d'une infinité de fonctions y satisfaisant aux équations différentielles

$$y^{(p)}=P\left(x, y, y', \ldots y^{(p-1)}\right)$$

où P est polynome en variables qu'il contient, à coefficients nombres entiers. Les intégrales de la nature ici considérée d'une telle équation sont celles qui pour $x=0$ prennent une valeur égale à un entier positif plus petit que 10, le même fait ayant lieu aussi pour leurs dérivées d'ordre 1, 2, ... $(p-1)$.

La n-ième décimale M_n du nombre algébrique ou transcendant

$$N=\int_0^\infty e^{-x} f\left(\frac{x}{10}\right) dx$$

aura pour valeur

$$M_n=\frac{n!\,10^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(\frac{e^{xi}}{10}\right) e^{-nxi}\,dx. \tag{5}$$

En effet, des formules

$$f(x)=M_0+\frac{M_1}{1!}x+\frac{M_2}{2!}x^2+\cdots$$

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt=n!$$

on tire

$$N=M_0+\frac{M_1}{10}+\frac{M_2}{10^2}+\frac{M_3}{10^3}+\cdots$$

D'autre part, le coefficient $\frac{M_n}{n!}$ de la fonction $f(x)$ est fourni par la formule de la théorie générale des fonctions

$$(6) \qquad \frac{M_n}{n!} = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(re^{xi})\, e^{-nxi}\, dx$$

où, la fonction $f(x)$ étant entière, on peut prendre pour r un nombre positif quelconque. En y prenant $r=0{,}1$ on aura la formule (5).

On le vérifie, par exemple, sur l'exemple simple

$$f(x) = e^x$$

dans quel cas le nombre N est

$$N = \int_0^\infty e^{-0{,}9\,x} dx = \frac{1}{0{,}9} = 1{,}111 \cdots$$

La formule (6) donne pour la n-ième décimale de ce nombre

$$M_n = \frac{n!\, 10^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\frac{e^{ti}}{10} - nti}\, dt$$

ce qui, d'après la formule intégrale connue

$$\int_0^{2\pi} e^{re^{ti} - nti}\, dt = \frac{2\pi r^n}{n!}$$

pour $r = \frac{1}{10}$ fournit bien $M_n = 1$.

La décimale M_n se laisse aussi exprimer par une autre formule se rapportant à la fonction

$$E(x) = \int_0^\infty e^{-t} f(xt)\, dt = M_0 + M_1 x + M_2 x^2 + \cdots$$

Le nombre N est l'ordonnée du point caractéristique de la courbe

$$y = E(x) \tag{7}$$

en vertu de quoi M_n sera exprimé par la formule (3).

Ainsi, dans le cas de

$$f(x) = e^x$$

la fonction $E(x)$, pour $|x| < 1$, est

$$E(x) = \int_0^\infty e^{-(1-x)t}\, dt = \frac{1}{1-x}$$

de sorte que M_n sera donné par la formule

$$M_n = \frac{10^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-nti}}{1 - \frac{e^{ti}}{10}}\, dt = 1$$

4. Le rayon de convergence de toute série $E(x)$ est égal à 1. Par suite, d'après le théorème de Polya—Carlson, si la fonction n'a pas ce cercle comme coupure, c'est une fonction rationnelle, et l'ordonnée du point caractéristique de la courbe (7) est un nombre commensurable. Pour qu'il ait un nombre limité de décimales, il faut et il suffit que $E(x)$ se réduise à un polynome. Dans le cas où le nombre de décimales est illimité, la fonction $E(x)$ est de la forme

$$E(x) = P(x) + \frac{Q(x)\, x^{n+1}}{1-x^m}$$

où P et Q sont des polynomes, avec $Q(0) \neq 0$, le degré de P étant n. La partie décimale se compose de la partie non périodique

$$M_1\, M_2 \cdots M_n$$

et de la partie périodique à période

$$M_{n+1}\, M_{n+2} \cdots M_{n+m}.$$

On le vérifie sur l'exemple précédent de nombre

$$N = \frac{27195}{99900}$$

dont la fonction correspondante $E(x)$ s'exprime sous la forme

$$E(x) = 2x + 7x^2 + \frac{2x^3 + x^4 + 8x^5}{1 - x^3}.$$

La partie non périodique de N se compose de $n = 2$ décimales, et la période de $m = 3$ décimales; on connait à l'avance toutes ces décimales.

Lorsque le nombre N est transcendant, la fonction correspondante $E(x)$ l'est aussi, sans quoi le nombre $E\,(0{,}1)$ serait algébrique. De plus, elle a le cercle $|x| = 1$ comme coupure, et par suite *ne satisfait à aucune équation différentielle du premier ordre*

$$F(x, y, y') = 0$$

algébrique en y *et* y', *à coefficients n'ayant pas de lignes singulières.*

Ainsi, par exemple, la fonction $E(x)$ engendrant le nombre π, ne satisfait à aucune équation de cette nature. Il en est de même de la fonction $E(x)$ engendrant le nombre e.

Nous remarquerons, en terminant, que ce qui vient d'être exposé dans cette Note, ne l'a été fait que dans le bùt de montrer que le problème de calculer directement la n-ième décimale d'un nombre défini d'une manière déterminée n'est pas si inabordable qu'on serait tenté de le croire.

La méthode précedente s'étend au cas où les coefficients M_k de la fonction $E(x)$ sont des entiers affectés d'un signe quelconque, inférieurs à un nombre fixe. Elle s'étend même au cas des entiers M_k quelconques, à la condition que la fonction correspondante $E(x)$ soit holomorphe au voisinage de $x = 0$, c'est-à-dire que la

$$\text{lim. sup. de } \sqrt[n]{|M_n|}$$

soit finie.