

SOUS-GROUPES DISTINGUÉS DU GROUPE UNITAIRE ET DU GROUPE GÉNÉRAL LINÉAIRE D'UN ESPACE DE HILBERT QUATERNIONNIEN

Aleksandar Torgašev

1. Résultat

Dans l'article [6], Pierre de la Harpe a considéré des sous-groupes distingués (fermés ou non-fermés ou non-fermés) du groupe générale linéaire d'un espace de Hilbert complexe et séparable, et démontre le résultat principal suivant:

Chaque sous-groupe distingué non-trivial et non-central G du groupe $GL(H)$ est pris en sandwich entre deux groupe distingués $SL(H, C_0)$ et $GE(H, C)$, c'est à dire

$$(*) \quad SL(H, C_0) \subseteq G \subseteq GE(H, C)^1$$

Dans cette note, étant inspirés par une question de Pierre de la Harpe, nous considérons ce problème dans les espaces de Hilbert quaternioniens, et démontrons un résultat analogue dans ce cas.

Nos preuves représentent les modifications des méthodes utilisés dans l'article [6] pour les espaces complexes ou réels; en outre, nous ne pouvons pas simplement appliquer les résultats des espaces complexes ou réels.

Nous utilisons des notations suivants:

$\mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{Q}$ – les corps des nombres réels, complexes et quaternioniens, respectivement ($\mathbf{R} \subseteq \mathbf{C} \subseteq \mathbf{Q}$; i, j, k – des unités quaternioniennes imaginaires);

$\mathbf{F}^* = \mathbf{F} \setminus \{0\}$, pour $\mathbf{F} = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{Q}$;

$L(n, \mathbf{F})$ – l'ensemble de tous les matrices carrées avec les éléments du corps \mathbf{F} ($\mathbf{F} = \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{Q}$), $U(n; \mathbf{F})$ – l'ensemble de tous les matrices unaires $\pi \in L(n; \mathbf{F})$;

\tilde{H} – un espace de Hilbert quaternionien séparable et de dimension infinie, avec le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$;

$L(\tilde{H})$ – l'algèbre des opérateurs linéaires et bornés de l'espace \tilde{H} ;

¹Ce résultat est un analogue direct du fameux "Sandwich-theorem" de Calkin pour les idéaux bilatéraux de l'algèbre $L(H)$.

H^s – l'image symplectique de l'espace \tilde{H} , avec le produit scalaire complexe $[\cdot, \cdot] = \text{p.c. } \langle \cdot, \cdot \rangle$;

A^s – l'image symplectique dans $L(H^s)$ d'un opérateur $A \in L(\tilde{H})$ et

$$L^s(H^s) = \{A^s \mid A \in L(\tilde{H})\};$$

évidemment,

$$\begin{aligned} L^s(H^s) &= \{B \in L(H^s) \mid (-J^s)BJ^s = B\}, \\ L(H^s) &= L^s(H^s) + iL^s(H^s), \end{aligned}$$

où $J^s = (jI)^s$ est un anticonjugaison dans H^s ;

$GL(\tilde{H})$ – le groupe de tous les opérateurs invertibles de $L(\tilde{H})$, et $U(\tilde{H})$ – le groupe de tous les opérateurs unitaires dans \tilde{H} ;

$C(\tilde{H})$ et $C_0(\tilde{H})$ – les idéaux des opérateurs compact et des opérateurs de dimension finie dans \tilde{H} .

Comme dans l'article [6], nous considérons les sous-groupes suivants de $GL(\tilde{H})$ qui sont tous distingués:

- (1°) $GE(\tilde{H}, \tilde{C}) = \{A \in GL(\tilde{H}) \mid A - rI \in C(\tilde{H}), \text{ pour un } r \in \mathbf{R}^*\}$
- (2°) $GL(\tilde{H}, \tilde{C}) = \{A \in GL(\tilde{H}) \mid A - I \in C(\tilde{H})\}$
- (3°) $GL(\tilde{H}, \tilde{C}_0) = \{A \in GL(\tilde{H}) \mid A - I \in C_0(\tilde{H})\}$
- (4°) $SL(\tilde{H}, \tilde{C}_0) = \{A \in GL(\tilde{H}, \tilde{C}_0) \mid \det(A) \stackrel{\text{def}}{=} \det(A^s) = 1\}$
- (5°) $R^* = \{rI \mid r \in \mathbf{R}^*\}$.

De même façon, nous avons les sous-groupes distingués suivant du groupe unitaire général $U(\tilde{H})$:

$$\begin{aligned} UE(\tilde{H}, \tilde{C}) &= GE(\tilde{H}, \tilde{C}) \cap U(\tilde{H}), \\ U(\tilde{H}, \tilde{C}) &= GL(\tilde{H}, \tilde{C}) \cap U(\tilde{H}), \\ U(\tilde{H}, \tilde{C}_0) &= GL(\tilde{H}, \tilde{C}_0) \cap U(\tilde{H}), \\ SU(\tilde{H}, \tilde{C}_0) &= SL(\tilde{H}, \tilde{C}_0) \cap U(\tilde{H}), \\ R^1 &= R^* \cap U(\tilde{H}) = \{I, -I\}. \end{aligned}$$

Maintenant, nous pouvons énoncer le théorème principale, le “sandwich-theorem” pour les sous-groupes distingués des groupes $U(\tilde{H})$ et $GL(\tilde{H})$.

THEOREME. (i) Soit \tilde{U} un sous-groupe distingué non-trivial et non-central de $U(\tilde{H})$.

Alors $SU(\tilde{H}, \tilde{C}_0) \subseteq \tilde{U} \subseteq UE(\tilde{H}, \tilde{C})$.

(ii) Soit \tilde{G} un sous-groupe distingué non-trivial et non-central de $GL(\tilde{H})$.

Alors: $SL(\tilde{H}, \tilde{C}_0) \subseteq \tilde{G} \subseteq GE(\tilde{H}, \tilde{C})$.

L'auteur remercie beaucoup à prof. dr. Pierre de la Harpe qui a lui proposé ce problème et a fait plusieurs améliorations dans cete note.

Il remercie aussi le fond de la recherches scientifiques de la Rép. Soc. de Serbie, qui a supporté ce travail.

3. Démonstration

Comme dans le cas complexe, il convient de diviser la démonstration en deux parts, formulés dans deux propositions.

PROPOSITION 1. (i) Soit \tilde{U} un sous-groupe distingué de $U(\tilde{H})$. Alors: $\tilde{U} = U(\tilde{H})$, ou bien $\tilde{U} \subseteq UE(\tilde{H}, \tilde{C})$.

(ii) Soit \tilde{G} un sous-groupe dinstingué de $GL(\tilde{H})$. Alors: $\tilde{G} = GL(\tilde{H})$ ou bien $\tilde{G} \subseteq GE(\tilde{H}, \tilde{C})$.

Preuve. (i) Nous démontrons tout d'abord l'analogue du Lemme 1 de P. De la Harpe [6] (p. 243).

Nous remarquons d'abord que presque tous les résultats de l'article [2] de A. Brown et C. Pearcy s'étendent au cas quaternionien.²

Dénotant

$$(\tilde{F}) = L(\tilde{H}) \setminus \{rI + C(H) \mid r \in \mathbf{R}\},$$

on peut obtenir spécialement les généralisations des résultats du Lemme 3.3, du Théorème 2 et bu Corollaire 3.4 de [2].

Puisque la structure quaternionienne de l'espace $\tilde{H}^p = \tilde{H} \oplus \dots \oplus \tilde{H} (p \in \mathbf{N})$ est introduit par

$$J_p \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Jx_1 \\ \vdots \\ Jx_p \end{pmatrix},$$

nous obtenons faciement que dans le Théorème 2 ([2], p. 119) les opérateurs $A_{11}, \dots, A_{32} \in L(\tilde{H})$, et dans le Corollaire 3.4 les opérateurs $B, C, V \in L(\tilde{H})$.

Utilisant ces résultats, tous les détails d'échelon 1 du Lemme 1 dans [6] réstent identiques dans notre cas (avec des scalaires quaternioniens).

Dans l'échelon 2 du Lemme 1, nous obtenons une matrice quaternionienne unitaire

$$\tilde{B}_n = \begin{bmatrix} a_0 & -\bar{q} \\ q & a_0 \end{bmatrix}$$

où $a_0 = 2|\alpha_n|^2 - 1 \in \mathbf{R}$ et $q = -2\bar{\alpha}_n\beta_n \in \mathbf{Q} (\alpha_n, \beta_n \in \mathbf{Q}; |\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2 = 1, |\alpha_n| \leq \tau < 1)$; donc, $a_0^2 + |q|^2 = 1$.

Maintenant, rappelons que le spectre $\sigma(\tilde{\pi})$ d'une matrice $\tilde{\pi} \in L(p; \mathbf{Q})$ est défini par

$$\sigma(\tilde{\pi}) = \{\lambda \in \mathbf{Q} \mid \tilde{\pi}v_p = v_p\lambda, \text{ avec } v \in \mathbf{Q}^p \setminus \{0\}\}.$$

²Pour les détails, on peut consulter l'article [9], où les résultats principaux concernant des commutateurs dues à Brown et pearcy sont généralisées aux espaces de Hilbert quaternioniens.

Il possède la propriété de “rotabilité” au sens que $\lambda \in \sigma(\tilde{\pi})$ implique $\alpha\lambda\alpha^{-1} \in \sigma(\tilde{\pi})$ (pour tout $\alpha \in \mathbf{Q}^*$), et par conséquent

$$\sigma(\tilde{\pi}) = \cup_{\alpha \in \mathbf{Q}^*} \alpha \sigma_i(\tilde{\pi}) \alpha^{-1},$$

où $\sigma_i(\tilde{\pi}) = \sigma(\tilde{\pi}) \cap \mathbf{C}$.

Dénotant par π^s l'image symplectique de la matrice $\tilde{\pi} \in L(2; \mathbf{Q})$, c'est à dire

$$\pi^s = \begin{bmatrix} \pi_1 & -\bar{\pi}_2 \\ \pi_2 & \pi_1 \end{bmatrix} \in L(4; \mathbf{C})$$

où $\tilde{\pi} = \pi_1 + j\pi_2 \in L(2; \mathbf{C}) + jL(2; \mathbf{C})$, nous avons $\sigma_i(\tilde{\pi}) = \sigma(\pi^s)$ et par définition, $\det(\tilde{\pi}) = \det(\pi^s)$.

Si $q = z_1 + jz_2$ ($z_1, z_2 \in \mathbf{C}; a_0^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$), nous obtenons

$$(\tilde{B}_n)^s = \begin{pmatrix} a_0 & -\bar{z}_1 & 0 & \bar{z}_2 \\ z_1 & a_0 & -\bar{z}_2 & 0 \\ 0 & z_2 & a_0 & -z_1 \\ z_2 & 0 & \bar{z}_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

et alors

$$\det((\tilde{B}_n)^s - \lambda) = ((a_0 - \lambda)^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2)^2 (\lambda \in \mathbf{C}).$$

Donc, la matrice $B_n \in U(2; \mathbf{Q})$ a deux valeurs propres complexes

$$\lambda_1 = \gamma_n + i\delta_n, \quad \lambda_2 = \gamma_n - i\delta_n$$

d'ordre deux, où γ_n, δ_n sont définis comme dans [6] (p. 244).

En vertu des théorèmes 7 et 8 de H.C. Lee [7], il existe alors une matrice $\tilde{V}_n \in U(2; \mathbf{Q})$ qui réduit la matrice \tilde{B}_n à la forme diagonale:

$$\tilde{V}_n \tilde{B}_n \tilde{V}_n^* = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2).^3$$

Le reste de la preuve est alors identique à celui de l'article [6].

La Lemme 2 et la lemme 3 restent en vigueur aussi, où dans la Lemme 2 nous avons le groupe unitaire $SU(2; \mathbf{Q})$ ou bien son image symplectique $SpU(4; \mathbf{C})$.

Pour finir la démonstration de (i), il reste seulement d'utiliser le théorème de Halmos-Kakutani pour les espaces quaternioniens.

(ii) Comme dans le cas réel, les arguments principaux de Proposition 6 dans [6] (p. 253 et 254) restent valables pour le cas quaternionien aussi.

Le fait que l'idéal $C(\tilde{H})$ est un idéal absolument maximal de $L(\tilde{H})$ est la Proposition 1. C de [5] (p. II. 9).

Le fait que $GL(\tilde{H})$ est égal à son groupe des commutateurs s'étend au cas quaternionien.

³Il existe aussi une matrice $\tilde{W} \in U(2; \mathbf{Q})$ telle que $\tilde{W}_n \tilde{B}_n \tilde{W}_n^* = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, mais pour garder l'analogie avec l'échelon 2 du Lemme 1 de [6], nous préférons la forma mentionnée.

Ensuite, le dernier fait de connéxité du groupe $GL(\tilde{H})$ dans la topologie normique réste valaable aussi, c.q.f.d. \square

PROPOSITION 2. (i) *Chaque sous-groupe distingué non-central \tilde{U} de $U(\tilde{H})$ continent le sous-groupe $SU(\tilde{H}, \tilde{C}_0)$.*

(ii) *Chaque sous-groupe distinué non-central \tilde{G} de $GL(\tilde{H})$ contient le sous-groupe $SL(\tilde{H}, \tilde{C})$.*

– Les preuves sont par ses idées et sa technique identiques à celles de [6] (Proposition 2, Lemme 5 – sans changement, et Proposition 3).

Dans la démonstration, on utilise le théorème de Schur pour les groupes $SU(\tilde{H}, \tilde{C}_0)$, $SL(\tilde{H}, \tilde{C}_0)$, et les propriétés des groupes classiques $SU(n; \mathbf{Q})$, $SL(n; \mathbf{Q})$ ou de ses images simplictiques $SpU(2n, \mathbf{C})$ et $SU^*(2n, \mathbf{C})$, cc.q.f. \square

REFERENCES

- [1] E. Artin, *Algèbre géométrique*, Gauthiers-Villars, Paris – 1962 (traduction en russe: “Nauka”, Moskva, 1969).
- [2] A. Brown et C. Percy, *Structure of commutators of operators*, Ann. of Math. – 82 (1965), 112–127.
- [3] J.W. Calkin, *Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert spaces*, Ann of Math. – 42 (1941), 839–873.
- [4] P.R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, Van Nostrand, New York, 1967.
- [5] P. De La Harpe, *Classical Banach-Lie algebras and Banach-lie groups of operators in Hilbert space*, Springer Lecture Notes in Math. (no. 285), Springer, Berlin, 1972.
- [6] P. De La Harpe, *Sous-groupes distingués du groupe unitaire et du groupe général linéaire d'un espace de Hilbert*, Comment. Math. Helvetici – 51 (1976), 241–257.
- [7] H.C. Lee, *Eigenvalues and canonical forms of matrices with quaternion coefficients*, Proc. Royal Irish Acad. (sect. A) – 52 (1949), 253–260.
- [8] N.A. Wiegmann, *Some theorems on matrices with quaternion elements*, Canad. Journal of Math. – 7 (1955), 191–201.
- [9] A. Torgašev, *Commutators on Wachs (quaternionic Hilbert spaces)*, à paraitre dans Math. Balcanica – 7 (1977) (Belgrade).

Institut de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
11000 Belgrade, Studentski trg 16-a.