

**ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ НОРМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ  
МНОГОЧЛЕНОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИИ К МЕТОДАМ  
СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ**

*Миодраг Ивович*

(сообщено 2. 03. 1979)

Пусть  $f(x)$ -непрерывная  $2\pi$ -периодическая функция и пусть  $\{\lambda_k^n\}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots$ ) матрица действительных чисел.

При помощи матрицы  $\{\lambda_k^n\}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots$ ), мы получим тригонометрический многочлен

$$(1) \quad U_n(f; x) = \frac{a_0 \lambda_0^n}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

где  $a_0, a_k$  и  $b_k$  коэффициенты Фурье функции  $f(x)$ .

Если в точке  $x$  существует  $U_n(f; x)$  при всех  $n$  и существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(f; x)$ , то мы будем говорить что метод задан при помощи (1), определенный матрицей  $\{\lambda_k^n\}$  ( $\lambda$ -метод), суммирует ряд Фурье функции  $f$  в точке  $x$ .

$\lambda$ -метод, определенный при помощи матрицы  $\{\lambda_k^n\}$ , называется  $F$ -перманентным если он суммирует ряд Фурье любой непрерывной  $2\pi$ -периодической функции во всех точках  $x$ , т.е. если

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} U_n(f; x) = f(x)$$

для всех непрерывных функций  $f(x)$  в каждой точке.

Известно что

$$(A) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k^n = 1 \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$(B) \quad \|U_k^n\| = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |K_n(t)| dt = O(1) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

где

$$K_n(t) = \frac{\lambda_0^n}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^n \cos kt$$

ядро  $\lambda$ -метода, являются необходимыми и достаточными условиями  $F$ -перманентности этого метода суммирования.

Условия (А) и (В) сохраняются без изменений, если в равенстве (2) требовать, чтобы сходимость была равномерной.

Так как проверка выполнения (А) более проста чем проверка условия (В), то условие (В) было предметом исследований многих авторов. В их работах главным образом рассматривались достаточные условия выполнения условия (В), так как точное исчисление нормы  $\|U_n^\lambda\|$ ,  $n = 1, 2, \dots$  возможно лишь в специальных случаях.

Наиболее простой случай у которого норму можно точно вычислить это случай метода у которого ядро  $K_n(t)$  положительно, т.е.

$$K_n(t) = \frac{\lambda_0^n}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^n \cos kt \geq 0, \quad t \in [0, \pi].$$

Здесь норма

$$(3) \quad \|U_n^\lambda\| = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |K_n(t)| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi K_n(t) dt = \lambda_0^n$$

и она будет ограниченной в случаях ограниченности коэффициента  $\lambda_0^n$ . Если выполняется и условие (А), то  $\lambda$ -метод будет  $F$ -перманентным.

Фейером было показано что для положительности ряда

$$\frac{\lambda_0^n}{2} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda_k^n \cos kt; \quad \lambda_n^n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

достаточно выполнение условий

$$\begin{aligned} \Delta \lambda_k^n &= \lambda_k^n - \lambda_{k+1}^n \geq 0 \\ \Delta^2 \lambda_k^n &= \lambda_k^n - 2\lambda_{k+1}^n + \lambda_{k+2}^n \geq 0. \end{aligned}$$

т.е. выпуклость последовательности  $\lambda_k^n$ .

Для того чтобы результат Фейера имел место и в случае финитных методов суммирования (методы определенные матрицей  $\{\lambda_k^n\}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots$ )), ясно что и разности

$$\begin{aligned}\Delta^2 \lambda_{n-1}^n &= \lambda_{n-1}^n - 2\lambda_n^n, \\ \Delta^2 \lambda_n^n &= \lambda_n^n\end{aligned}$$

должны быть положительными. Иными словами, последовательности

$$\lambda_0^n, \lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_n^n, 0$$

и

$$\lambda_0^n, \lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_n^n, 0, 0$$

должны быть выпуклыми.

Исследование ограниченности нормы приводит к исследованию интеграла.

$$(4) \quad \|U_n^\lambda\| = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |K_n(t)| dt \quad (n = 1, 2, \dots).$$

В настоящей работе мы займемся достаточными условиями, налагаемыми на коэффициенты  $\lambda_k^n$ , при которых норма  $\|U_n^\lambda\|$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ограничена, пользуясь разложением

$$\int_0^\pi |K_n(t)| dt = \int_0^\delta |K_n(t)| dt + \int_\delta^\pi |K_n(t)| dt, \quad 0 < \delta < \frac{\pi}{2}$$

что до сих пор не пользовалось.

Так как

$$\int_\delta^\pi |K_n(t)| dt = o(1), \quad 0 < \delta < \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

при очень слабых предположениях, то мы занимаемся достаточными условиями для коэффициентов  $\lambda_n^n$  при которых интеграл

$$\int_0^\delta |K_n(t)| dt, \quad 0 < \delta < \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

будет ограниченным. Тем самым и норма  $\|U_n^\lambda\|$ ,  $n = 1, 2, \dots$  также будет ограниченной. Мы получим достаточные условия ограниченности нормы

$\|U_n^\lambda\|$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  более слабые чем уже известные условия такого рода, т.е. условия более слабые чем выпуклость последовательностей  $\lambda_k^n$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ;  $n = 1, 2, \dots$ ). Кроме того, мы получим и достаточные условия  $F$ -перманентности  $\lambda$ -метода суммирования.

**Теорема.** Пусть для некоторого натурального числа  $p$  коэффициенты  $\lambda_k^n$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ;  $n = 1, 2, \dots$ ;  $\lambda_{n+1}^n = 0$  для  $k > n$ ) удовлетворяют условиям:

$$(I) \quad \lambda_{k-p}^n - \lambda_{k+p}^n \downarrow 0 \text{ для } k = p, p+1, \dots, n+p,$$

$$(II) \quad \sum_{k=0}^n |\Delta \lambda_k^n| = O(1), \quad \lambda_0^n = O(1) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$(A) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k^n = 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Тогда условия:

а) (I) и (II) достаточны для того чтобы  $\|U_n^\lambda\| = O(1)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,

б) (I), (II) и (A) достаточны для того чтобы  $\lambda$ -метод являлся  $F$ -перманентным.

Нетрудно заметить что условия (I) и (II) более слабые чем выпуклость.

**Доказательство теоремы.** Пусть  $\delta$  число такое что  $p\delta < \frac{\pi}{2}$ .

Норму  $\|U_n^\lambda\|$  напомним в форме

$$\|U_n^\lambda\| = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |K_n(t)| dt = \frac{2}{\pi} \left( \int_0^\delta |K_n(t)| dt + \int_\delta^\pi |K_n(t)| dt \right) = \frac{2}{\pi} (I_1 + I_2),$$

где

$$I_1 = \int_0^\delta |K_n(t)| dt \quad I_2 = \int_\delta^\pi |K_n(t)| dt$$

и

$$K_n(t) = \frac{\lambda_0^n}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^n \cos kt.$$

Ограниченность нормы  $\|U_n^\lambda\|$  можно исследовать при помощи ограниченности интегралов  $I_1$  и  $I_2$ .

Ограниченность интеграла  $I_2$  следует из преобразования Абеля ядра  $K_n(t)$ , где

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_\delta^\pi \left| \frac{\lambda_0^n}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^n \cos kt \right| dt = \\ &= \int_\delta^\pi \left| \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_k^n - \lambda_{k+1}^n) \frac{\sin(k + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} + \lambda_n^n \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{t}{2}} \right| dt \leq \end{aligned}$$

$$(5) \quad \leq \frac{\pi}{2} \ln \frac{\pi}{\delta} \left( \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta \lambda_k^n| + |\lambda_n^n| \right).$$

Так как  $\lambda_{n+1}^n = 0$ , то (5) можно написать в форме

$$(6) \quad I_2 \leq \frac{\pi}{2} \ln \frac{\pi}{\delta} \left( \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta \lambda_k^n| + |\lambda_n^n| \right) = \frac{\pi}{2} \ln \frac{\pi}{\delta} \sum_{k=0}^n |\Delta \lambda_k^n|,$$

в которой правая часть ограничена (это следует из условия (II)),

Исследование ограниченности интеграла  $I_1$  более сложное.

Так как  $p\delta < \frac{\pi}{2}$ , то и  $\sin pt \geq 0$  для всех  $t \in [0, \delta]$  и поэтому

$$\begin{aligned} K_n(t) \sin pt &= \frac{\lambda_0^n}{2} \sin pt + \sum_{k=1}^n \lambda_k^n \cos kt \sin pt = \\ &= \frac{\lambda_0^n}{2} \sin pt + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \lambda_k^n [\sin(k+p)t - \sin(k-p)t] = \\ (7) \quad &= \frac{1}{2} \lambda_0^n \sin pt + \frac{1}{2} \sum_{k=p+1}^{n+p} \lambda_{k-p}^n \sin kt - \frac{1}{2} \sum_{k=-p+1}^{n-p} \lambda_{k+p}^n \sin kt = \\ &= \frac{1}{2} \lambda_0^n \sin pt + \frac{1}{2} \sum_{k=p+1}^{n-p} (\lambda_{k-p}^n - \lambda_{k+p}^n) \sin kt - \frac{1}{2} \sum_{k=n-p+1}^{n+p} \lambda_{k-p}^n \sin kt - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{k=-p+1}^p \lambda_{k+p}^n \sin kt = \frac{1}{2} \sum_{k=p}^{n+p} (\lambda_{k-p}^n - \lambda_{k+p}^n) \sin kt - \frac{1}{2} \sum_{k=-p+1}^{p-1} \lambda_{k+p}^n \sin kt. \end{aligned}$$

Из того что сумму

$$-\frac{1}{2} \sum_{k=-p+1}^{p-1} \lambda_{k+p}^n \sin kt$$

можно выписать в виде

$$\begin{aligned} (8) \quad &-\frac{1}{2} \sum_{k=-p+1}^{p-1} \lambda_{k+p}^n \sin kt = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p-1} (\lambda_k^n - \lambda_{2p-k}^n) \sin(p-k)t = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p-1} (\lambda_{p-k}^n - \lambda_{p+k}^n) \sin kt, \end{aligned}$$

то заменяя (8) в (7) мы получим

$$K_n(t) \sin pt = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p-1} (\lambda_{p-k}^n - \lambda_{p+k}^n) \sin kt + \frac{1}{2} \sum_{k=p}^{n+p} (\lambda_{k-p}^n - \lambda_{k+p}^n) \sin kt$$

из чего следует:

$$K_n(t) = \frac{1}{2 \sin pt} \sum_{k=1}^{p-1} (\lambda_{p-k}^n - \lambda_{p+k}^n) \sin kt + \frac{1}{2 \sin pt} \sum_{k=p}^{n+p} (\lambda_{k-p}^n - \lambda_{k+p}^n) \sin kt.$$

Если обозначим

$$S_1 = \frac{1}{2 \sin pt} \sum_{k=1}^{p-1} (\lambda_{p-k}^n - \lambda_{p+k}^n) \sin kt$$

$$S_2 = \frac{1}{2 \sin pt} \sum_{k=p}^{n+p} (\lambda_{k-p}^n - \lambda_{k+p}^n) \sin kt,$$

то ядро  $K_n(t)$  можно написать в виде

$$(9) \quad K_n(t) = S_1 + S_2$$

Сумма  $|S_1|$  ограничена при  $t \in [0, \delta]$ . Это следует из того что

$$\left| \frac{1}{2 \sin pt} \sum_{k=1}^{p-1} (\lambda_{p-k}^n - \lambda_{p+k}^n) \sin kt \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p-1} |\lambda_{p-k}^n - \lambda_{p+k}^n| \left| \frac{\sin kt}{\sin pt} \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p-1} |\lambda_{p-k}^n - \lambda_{p+k}^n|,$$

поэтому что  $p$  конечное натуральное число, а коэффициенты  $\lambda_k^n$  ограничены.

Сумма

$$S_3 = \frac{1}{2 \sin pt} \sum_{k=1}^{p-1} (\lambda_0^n - \lambda_{2p}^n) \sin kt$$

положительна и ограничена. Её положительность следует из того что  $\lambda_0^n - \lambda_{2p}^n > 0$  и  $\sin pt > 0$ ,  $t \in [0, \delta]$ , для всех  $k = 1, 2, \dots, p$ . Положительность суммы  $S_3$  следует из

$$\frac{1}{2 \sin pt} \sum_{k=1}^{p-1} (\lambda_0^n - \lambda_{2p}^n) \sin kt \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p-1} (\lambda_0^n - \lambda_{2p}^n) = \frac{p-1}{2} (\lambda_0^n - \lambda_{2p}^n).$$

Ядро  $K_n(t)$  при помощи сумм  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  можно выразить в виде

$$(10) \quad K_n(t) = (S_1 - S_3) + (S_2 + S_3).$$

Первая часть  $(S_1 - S_3)$  ограничена, так как  $S_1$  и  $S_4$  ограничены. Если обозначим

$$(11) \quad S_1 - S_3 = M_p = M_p(t),$$

то и

$$\int_0^\delta |M_p(t)| dt = O(1)$$

при всех натуральных  $p$ .

Вторая часть в (10) будет

$$S_2 + S_3 = \frac{1}{2 \sin pt} \sum_{k=1}^{n+p} \xi_k^n \sin kt,$$

где коэффициенты

$$\xi_k^n = \begin{cases} \lambda_0^n - \lambda_{2p}^n, & k = 1, 2, \dots, p-1; \\ \lambda_{k-p}^n - \lambda_{k+p}^n, & k = p, p+1, \dots, n-p; \\ \lambda_{k-p}^n, & k = n-p+1, n-p+2, \dots, n+p. \end{cases}$$

Из того что мы предположили что  $\xi_0^n \downarrow 0$  и из результатов Й. Караматы и М. Томича [1] следует положительность суммы  $(S_2 + S_3)$ , т.е.

$$S_2 + S_3 > 0 \text{ при всех } t \in [0, \delta]$$

Из (10) при помощи (11) следует

$$K_n(t) - M_p(t) = S_2 + S_3 > 0 \text{ } t \in [0, \delta].$$

Интегрируя модуль левой части в (12), мы получим

$$(13) \quad \begin{aligned} \int_0^\delta |K_n(t) - M_p(t)| dt &= \int_0^\delta (K_n(t) - M_p(t)) dt = \\ &= \frac{\lambda_0^n \delta}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k^n}{k} \sin k\delta - \int_0^\delta M_p(t) dt, \end{aligned}$$

а также и

$$(14) \quad \begin{aligned} \int_0^\delta |K_n(t) + (-M_p(t))| dt &\geq \left| \int_0^\delta |K_n(t)| - | -M_p(t)| dt \right| = \\ &= \left| \int_0^\delta |K_n(t)| dt - \int_0^\delta | -M_p(t)| dt \right|. \end{aligned}$$

Из (13) и (14) следует

$$\left| \int_0^{\delta} |K_n(t)| dt - \int_0^{\delta} |-M_p(t)| dt \right| \leq \frac{\lambda_0^n \delta}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k^n}{k} \sin kt - \int_0^{\delta} M_p(t) dt$$

т.е.

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda_0^n \delta}{2} - \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k^n}{k} \sin kt + \int_0^{\delta} M_p(t) dt + \int_0^{\delta} |-M_p(t)| dt &\leq \int_0^{\delta} |K_n(t)| dt \leq \\ &\leq \frac{\lambda_0^n \delta}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k^n}{k} \sin kt + \int_0^{\delta} |-M_p(t)| dt - \int_0^{\delta} M_p(t) dt \end{aligned}$$

и поэтому

$$I_1 = \int_0^{\delta} |K_n(t)| dt \leq \frac{\lambda_0^n \delta}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k^n}{k} \sin kt + \int_0^{\delta} |-M_p(t)| dt - \int_0^{\delta} M_p(t) dt$$

Сумма

$$\frac{\lambda_0^n \delta}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k^n}{k} \sin kt$$

ограничена на  $[0, \delta]$ , что следует из преобразования Абеля

$$(15) \quad \frac{\lambda_0^n \delta}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \Delta \lambda_k^n \sum_{v=1}^k \frac{\sin v\delta}{v} + \lambda_n^n \sum_{v=1}^n \frac{\sin v\delta}{v}.$$

Из того что

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^k \frac{\sin v\delta}{v} &= O(1) \quad \text{при всех } k \text{ и} \\ \sum_{k=1}^{n-1} |\Delta \lambda_k^n| &= O(1), \quad \lambda_n^n = O(1), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

что следует из условия (II), мы получим ограниченность суммы (15). Из ограниченности интегралов

$$\int_0^{\delta} |-M_p(t)| dt; \quad \int_0^{\delta} M_p(t) dt$$



и ограниченности суммы (15) следует ограниченность интеграла  $I_1$ .

Так как интегралы  $I_1$  и  $I_2$  ограничены, то и норма

$$\|U_n^\lambda\| = \frac{2}{\pi}(I_1 + I_2)$$

ограниченна. Тем самым часть (а) теоремы доказана.

Если предположим и условие (А), то метод суммирования будет  $F$ -перманентным.

#### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Karamata, J. et Tomić, M. – *Considerations géométriques relatives aux polynomes et séries trigonométriques*. Ibid. S. 157–175.
- [2] С. А. Теляковский. *Оценка нормы функции через ее коэффициенты Фурье, удобная в задачах теории аппроксимации*, Труды МИАН СССР, 1971 том 109, стр. 65–97.
- [3] С. Р. Никольский *О линейных методах суммирования рядов Фурье* Известия АН СССР. 12 (1948), 259–278.

Stevana Sremca 2-A  
11000 Beograd (*Jugoslavija*)