PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 28 (42), 1980, 129–134

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ КЛАССА $W^r H(\delta_0)_L$

Слободан Милорадович

Пусть L пространство интегрируемых 2π-периодических функций f и пусть

$$\omega(f,\delta)_L = \sup_{|t|\le\delta} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t)-f(x)|dx, \qquad 0<\delta\le\pi,$$

модуль непрерывности функции f в L.

Через

$$H(\delta_0)_L = \{f\colon \omega(f,\delta_0)_L \le 1\}$$

обозначим класс функций f из L для которых модули непрерывности в фиксированой точке δ_0, $0<\delta_0\le\pi$, не превосходят единицы, а через

$$W^r H(\delta_0)_L = \{f\colon f^{(r)} \in H(\delta_0)_L,\ \ r\in N\}$$

обозначим класс функций из L для которых r-та производная $f^{(r)} \in H(\delta_0)_L$.

На данных классах будем рассматривать задачу о верхней грани коэффициентов фурье

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\ \ b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$

где n-фиксированное натуральное число. Аналогичная задача в пространстве C непрерывных 2π-периодических функций рассматривана Лебегом [1] и Автором [2].

Прежде всего дадим решение задачи о приближений 2π-периодический функций в метрике C через функции из C с периодом $\frac{2\pi}{k}(k\ge 2, k\in N)$. Период функции f будем обозначать $\Omega(f)$. Положим

$$\bar{f}(x) = \max_{0\le s\le k} f\left(x+\frac{2s\pi}{k}\right),\ \ f(x) = \min_{0\le s\le k} \underline{f}\left(x+\frac{2s\pi}{k}\right),\ \ s\in N,$$
$$d(x) = \frac{f(\bar{x}) - \underline{f}(x)}{2},\ \ 0\le x\le\frac{2\pi}{k}.$$

Справедлива такая

Лемма. *Если функция* f *принадлежит* C, $\Omega(f)=2\pi$, *то*

$$\inf_{\Omega(\varphi)=\frac{2\pi}{k}} f \|f-\varphi\|_{C[0,2\pi]} = \|d\|_{C\left[0,\frac{2\pi}{k}\right]}. \tag{1}$$

Доказательство. Сразу проверяется что $d\in C$, $d(0)=d\left(\frac{2\pi}{k}\right)$, $\Omega(d)=\frac{2\pi}{k}$, $\Omega(\varphi^*)=\frac{2\pi}{k}$ где $\varphi^*=\frac{\bar{f}+\underline{f}}{2}$.

Так как для любого $x\in[0,2\pi]$, $f(x)-\varphi^*(x)\le \bar{f}(x)-\varphi^*(x)=d(x)$, $f(x)-\varphi^*(x)\ge \underline{f}(x)-\varphi^*(x)=-d(x)$, то $|f(x)-\varphi^*(x)|\le d(x)$ и

$$\|f-\varphi^*\|_{C[0,2\pi]} \le \|d\|_{\left[0,\frac{2\pi}{k}\right]}. \tag{2}$$

Учитывая что d непрерывна функция на замкнутом интервале то существует такое $x_0\in\left[0,\frac{2\pi}{k}\right]$ что $d(x_0)=\|d\|$. Для любой φ, $\Omega(\varphi)=\frac{2\pi}{k}$,

$$\|f-\varphi\|_{C[0,2\pi]} \ge \max_{0\le s\le k}\left|f\left(x_0+\frac{2\pi s}{k}\right)-\varphi(x_0)\right| \ge \max(\bar{f}(x_0)-\varphi(x_0),$$
$$\varphi(x_0)-\underline{f}(x_0)) \ge d(x_0)=\|d\|,$$

т.е.

$$\|f-\varphi\|_{C[0,2\pi]} \ge \|d\|_{C\left[0,\frac{2\pi}{k}\right]}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) получается (1).

Так как множество $C_{\left[0,\frac{2\pi}{k}\right]}$ не строго выпукло то функция с помощью которой достигается равенство, вообще говоря, (1) неединствена.

Заметим что лемма справедлива в более общем случае, когда $\Omega(\varphi)=\frac{2\pi l}{k}$, $(l,k)=1$. Доказательство не немяется.

Теперь мы можем доказат такую теорему:

Теорема 1. *Если* $f\in H(\delta_0)_L$, *то*

$$\frac{1}{n\delta_0\pi} \le \sup a_n(f) = \sup b_n(f) \le \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sin\frac{n\delta_0}{2}}, & \delta_0\in\left(0,\frac{2\pi}{3\pi}\right] \\ \frac{1}{4\pi\sin\frac{n\delta_0}{2}}, & \delta_0=\frac{2\pi}{(2s+1)n},\ s=1,2,\dots, \end{cases}$$
$$\sup a_n(f)=\sup b_n(f)=\frac{1}{2\pi}, \frac{2\pi}{3n}\le\delta_0\le\pi.$$

Доказательство. В силу периодичности

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(x+\frac{\pi}{2n}\right)\cos nx dx.$$

Следовательно, если f^* экстремальная функция для $b_n(f)$, $f^*\left(x+\frac{\pi}{2n}\right)$ будет экстремальная функция для $a_n(f)$ и

$$\sup_{f\in H(\delta_0)_L} a_n(f) = \sup_{f\in H(\delta_0)_L} b_n(f). \tag{4}$$

Пусть $\delta_0 \in \left(0, \frac{\pi}{n}\right]$. Так как

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{2\pi\sin\frac{n\delta_0}{2}}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\left[\cos n\left(x-\frac{\delta_0}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\cos n\left(x+\frac{\delta_0}{2}\right)\right]dx = \frac{1}{2\pi\sin\frac{n\delta_0}{2}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left[f\left(x+\frac{\delta_0}{2}\right)-f\left(x-\frac{\delta_0}{2}\right)\right]\cos nx dx$$

то $b_n(f) \le \frac{1}{2\pi\sin\frac{n\delta_0}{2}}$, т.е.

$$\sup_{f\in H(\delta_0)_L} b_n(f) \le \frac{1}{2\pi\sin\frac{n\delta_0}{2}}. \tag{5}$$

Для функции $\varphi(x) = \frac{\operatorname{sig} n \sin nx}{4n\delta_0}$,

$$\omega(\varphi,\delta_0) = \sup_{|t|\le\delta_0}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\varphi(x+t)-\varphi(x)|dx = \sup_{|t|\le\delta_0}\frac{4nt}{4n\delta_0} = 1 \text{ и } \varphi\in H(\delta_0)_L.$$

Учитывая (4), (5) и что

$$b_n(\varphi) = \frac{1}{4n\delta_0\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\sin nx|dx = \frac{1}{n\delta_0\pi},$$

получаем

$$\frac{1}{n\delta_0\pi} \le \sup_{f\in H(\delta_0)_L} a_n(f) = \sup_{f\in H(\delta_0)_L} b_n(f) \le \frac{1}{2\pi\sin\frac{n\delta_0}{2}}. \tag{6}$$

Пусть, теперь, $\delta_0 = \frac{2\pi}{kn}$, $k\ge 2$, $k\in N$. Так как экстремльная функциь f должна быт нечетна, то

$$f(x) \sim \sum_{v=1}^{\infty} b_n(f)\sin vx.$$

Тогда

$$f\left(x+\frac{\pi}{kn}\right)-f\left(x-\frac{\pi}{kn}\right)\sim\sum_{v=1}^{\infty}2b_n(f)\sin\frac{v\pi}{kn}\cos vx.$$

Если $v=knj,\ j=1,2,\dots$, то

$$f\left(x+\frac{\pi}{kn}\right)-f\left(x-\frac{\pi}{kn}\right)\sim\sum_{v\neq knj}^{\infty}2b_n(f)\sin\frac{v\pi}{kn}\cos vx,$$

и для любой 2π-периодической функции

$$\varphi(x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{j=1}^{\infty}[a_j(\varphi)\cos jx+b_j(\varphi)\sin jx],$$

$$b_n(f)=\frac{1}{2\pi\sin\frac{\pi}{k}}\int_{\pi}^{\pi}\left[f\left(x+\frac{\pi}{kn}\right)-f\left(x-\frac{\pi}{kn}\right)\right][\cos nx-\varphi(knx)]dx$$

откуда получаем

$$\begin{aligned}|b_n(\varphi)|&\leq\frac{1}{2\pi\sin\frac{\pi}{k}}\inf_{\varphi}\max_{x\in[-\pi,\pi]}|\cos nx-\varphi(knx)|=\\&=\frac{1}{2\pi\sin\frac{\pi}{k}}\inf_{\varphi}\|\cos x-\varphi(kx)\|_{C[0,2\pi]}\end{aligned}$$

Так кат $\Omega(\varphi(kx))=\frac{2\pi}{k}$, то пользуясь леммой легко вычислается что

$$\inf_{\varphi}\|\cos x-\varphi(kx)\|_{C[0,2\pi]}=\begin{cases}1,\quad k=2s,\quad s=1,2,\dots,\\ \cos\dfrac{\pi}{2k},\quad k=2s+1,\quad s=1,2,\dots.\end{cases}$$

Для $\delta_0=\frac{2\pi}{n(2s+1)},\ s=1,2,\dots,$

$$b_n(f)\leq\frac{\cos\frac{\pi}{2(2s+1)}}{2\pi\sin\frac{\pi}{2s+1}}=\frac{1}{4\pi\sin\frac{\pi}{2(2s+1)}},$$

т.е,

(7) $$\sup_{f\in H(\delta_0)_L}b_n(f)\leq\frac{1}{4\pi\sin\frac{n\delta_0}{4}}.$$

Из (6) и (7) получается утврждение первой части Теоремы 1. Из (7) для $\delta_0=\frac{2\pi}{3n}$ следует что

(8) $$\sup_{f\in H\left(\frac{2\pi}{2n}\right)_L}b_n(f)\leq\frac{1}{2\pi}.$$

Для функции $g(x) = \frac{1}{4}\left[\delta\left(x-\frac{\pi}{2n}\right)-\delta\left(x+\frac{\pi}{2n}\right)\right]$, где δ функция Дирака, $\omega\left(g,\frac{2\pi}{3n}\right)_L = 1$,

$$b_n(g) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\delta\left(x-\frac{\pi}{2n}\right)-\delta\left(x+\frac{\pi}{2n}\right)\right]\sin nx dx = \frac{1}{2\pi}. \tag{9}$$

Из (8) и (9) следует

$$\sup_{f\in H\left(\frac{2\pi}{2n}\right)_L} b_n(f) = \frac{1}{2\pi}.$$

Пусть, теперь, $\delta_0 > \frac{2\pi}{3n}$. Так как $\omega(g,\delta_0) = 1$, $b_n(g) = \frac{1}{2\pi}$,

$$b_n(f) \le \frac{1}{2\pi}\omega\left(f,\frac{2\pi}{3n}\right) \le \frac{1}{2\pi}\omega(f,\delta_0)_L,$$

то

$$\sup_{f\in H(\delta_0)_L} b_n(f) = \frac{1}{2\pi},$$

чем доказана и вторая часть Теоремы 1.

Теорема 2. *Если $f \in W^r H(\delta_0)_L$, то*

$$\frac{1}{n^{r+1}\delta_0\pi} \le \sup a_n(f) = \sup b_n(f) \le \begin{cases} \frac{1}{2\pi n^r \sin\frac{n\delta_0}{2}}, & \delta_0 \in \left(0,\frac{2\pi}{3n}\right] \\ \frac{1}{4\pi n^r \sin\frac{n\delta_0}{4}}, & \delta_0 = \frac{2\pi}{n(2s+1)},\ s = 1,2,\ldots \end{cases}$$

$$\sup a_n(f) = \sup b_n(f) = \frac{1}{2\pi n^r},\ \ \delta_0 \in \left[\frac{2\pi}{3n},\pi\right].$$

Доказательство. Интегрируя по частям получаем что

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi n^r}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(x)\cos\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)dx,$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi n^r}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(x)\sin\left(nx+\frac{r\pi}{2}\right)dx$$

и повтарая те же самые расуждения как в Теореме 1. получаем доказательство Теоремы 2.

Из Теоремы 1. и 2. получается асимптотическая формула как

Следствие. Если $f \in W^r H(\delta_0)_L (W^0 H(\delta_0)_L = H(\delta_0)_L)$, то

$$\sup b_n(f) = \sup a_n(f) \approx \frac{1}{n^{r+1}\delta_0 \pi} \ \text{ при } \ \delta_0 \to 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] Lebesgue H., *Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz*, Bull. Soc. Math. France, 38 (1910), 184–210.

[2] Miloradović S., *Aproksimacije funkcija Fourier-ovim sumama i gornja granica Fourier-ovih koeficijenata*, magistarski rad, Beograd 1977, str. 51.

Београд
Јурија Гагарина 115/82