PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 28 (42), 1980, 125–128

ОБ ОДНОМ РЕЗУЛЬТАТЕ Ј.Д. КЕЧКИЋА

Петар Р. Лазов, Боро М. Пиперевски

1. В работе [1] с использованием классического метода варияции параметра получены следующие два резултата:

I. Дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y'' + f(x)y' = \sum_{v=1}^{n} h_v(y)(y')^{\alpha_v} e^{(\alpha_v-2)\int f(x)dx}, \tag{1.1}$$

где h_v – произвольные функции, α_v – действительные числа, а n – положительное целое число, можно привести к уравнению первого порядка:

$$K'(y) = \sum_{v=1}^{n} h_v(y)K(y)^{\alpha_v-1}. \tag{1.2}$$

II. Дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y'' + g(y)(y')^2 = \sum_{v=1}^{n} h_v(x)(y)^{\alpha_v} e^{(\alpha_v-1)\int g(y)dy}, \tag{1.3}$$

можно привести к уравнению первого порядка:

$$K'(x) = \sum_{v=1}^{n} h_v(x)K(x)^{\alpha_v}. \tag{1.4}$$

I. и II. содержат в себе результаты получены в десети трудах различных авторов. В этом труде получения I. и II. дадим метод, который отличается од метода, употребляемого в работе [1]. При этом, задерживаясь на уравнении требьего порядка, покажем что этот тип редукции можно применить и на нелинейные дифференциальные уравнения более высокого порядка.

2. Рассмотрим уравнение:

$$y'' = F(x, y, y') \tag{2.1}$$

и предположим что для него имеет место:

$$y' = f_1(y) f_2(x), \quad (f_1, f_2 \neq 0). \tag{2.2}$$

Принимая во внимание (2.2), уравнение (2.1) принимает вид:

$$f_1{}'(y) f_1(y) f_1^2(x) + f_1(y) f_2{}'(x) = F(x, y, f_1(y) f_2(x)), \tag{2.3}$$

т.е.

$$f_1{}'(y) f_1(y) = \frac{1}{f_2^2(x)} \left[f(x, y, f_1(y) f_2(x)) - f_1(y) f_2(x) \frac{f_2{}'(x)}{f_2(x)} \right]. \tag{2.4}$$

Выражение с левой стороны соотношения (2.4) не зависит явно од x и чтобы это соотношение представляло тождество, таким же дожно быть выражение и с правой стороны. Это будет выполнено если функция $F(u, v, w)$ имеет вид:

$$F(u, v, w) = w \frac{f_2{}'(u)}{f_2(u)} + \Phi \left(v, \frac{w}{f_2(u)} \right) \cdot f_2^2(u),$$

где $\Phi(t_1, t_2)$ – произвольная функция.

Например, если:

$$\Phi(t_1, t_2) = \sum_{v=1}^{n} h_v(t_1) t_2^{\alpha_v},$$

тогда (2.4) принимаст вид:

$$f_1{}'(y) = \sum_{v=1}^{n} h_v(y) f_1(y)^{\alpha_v - 1}. \tag{2.5}$$

Значит уравнение:

$$y'' - \frac{f_2{}'(x)}{f_2(x)} y' = \sum_{v=1}^{n} h_v(y) (y')^{\alpha_v} f_2(x)^{2 - \alpha_v}, \tag{2.6}$$

редуцирустся на уравнение первого порядка (2.5). Очевидно соотношения (2.6) и (1.1) определяют одно и то же уравнение (замена $-f_2{}'(x)/f_2(x) = f(x)$).

Полностью аналогичным способом, если уравнение (2.3) решить по ${f_2}'(x)$, вытекает что уравнение (1.3) редуцирустся на уравнение (1.4) т.е. результат II.

3. Предположим что дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$y''' = F(x, y, y', y''), \tag{3.1}$$

имеет такие решения, для которых выполняется:

$$y' = f_1(y) f_2(x), \qquad (f_1, f_2 \neq 0). \tag{3.2}$$

Из (3.2) непосредствено следует:

$$y'' = {f_1}'(y) f_1(y) f_2^2(x) + f_1(y) {f_2}'(x). \tag{3.3}$$

На основании (3.2) и (3.3) уравнение (3.1) становится:

$$\begin{aligned} &[{f_1}''(y) f_1(y) + {f_1}'(y)^2] f_1(y) f_2^3(x) + 3 f_1(y) {f_1}'(y) f_2(x) {f_2}'(x) + \\ &\quad + f_1(y) {f_2}''(x) = F(x, y, f_1(y) f_2(x), {f_1}'(y) f_1(y) f_2^2(x) + f_1(y) {f_2}'(x)). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Уравнение (3.4) можно написать в виде:

$$\begin{aligned} &[{f_1}''(y) f_1(y) + {f_1}'(y)^2] f_1(y) = e^{3\int f(x)dx} \{ F(x, y, f_1(y) e^{-\int f(x)dx}, \\ &{f_1}'(y) f_1(y) e^{-2\int f(x)dx} - f_1(y) f(x) e^{-\int f(x)dx}) - \\ &- 3 f(x) [{f_1}'(y) f_1(y) e^{-2\int f(x)dx} - f_1(y) f(x) e^{-\int f(x)dx}] - \\ &- [2 f^2(x) + f'(x)] f_1(y) e^{-\int f(x)dx} \}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

где выполнена замена $f(x) = -{f_2}'(x)/f_2(x)$.

Выражение с левой стороны соотношения (3.5) не зависит явно од x и чтобы это соотношение представляло тождество, таким же должно быть выражение и с правой стороны. Это будет выполчено если функция $F(u, v, w, z)$ имеет вид:

$$\begin{gathered} F(u, v, w, z) = 3 f(u) z + [2 f^2(u) + f'(u)] w + \\ + e^{-3\int f(u)du} \Phi(v, w e^{\int f(u)du}, \ (z + f(u) w) e^{2\int f(u)du}), \end{gathered}$$

где $\Phi(t_1, t_2, t_3)$ – произвольная функция.

Например, если:

$$\Phi(t_1, t_2, t_3) = \sum_{v=1}^{n} h_v(t_1) t_2^{\alpha_v} t_3^{\beta_v},$$

где h_v – произвольные функции, α_v, β_v – действительные числа и n – положительное целое число, тогда уравнение (3.5)

$$f_1{}''(y)f_1(y) + f_1{}'(y)^2 = \sum_{v=1}^{n} h_v(y)f_1(y)^{\alpha_v+\beta_v-1}f_1{}'(y)^{\beta_v}, \tag{3.6}$$

и тогда можно формулировать следующий результат:

Дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$\begin{aligned} &y''' + 3f(x)y'' + [2f^2(x) + f'(x)]y' = \\ &= \sum_{v=1}^{n} h_v(y)(y')^{\alpha_v}[y'' + f(x)y']^{\beta_v}e^{(\alpha_v+2\beta_v-3)\int f(x)dx}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

редуцируется на уравнение второго порядка (3.6). Если известно общее решение $f_1(y) = \Phi(y, A, B)$ (A и B – произвольные постоянные), уравнения (3.6), общее решение уравниния (3.7) будет определятся соотношением:

$$\int \frac{dy}{\Phi(y, A, B)} = \int e^{-\int f(x)dx}dx + C,$$

где C – третая произвольная постоянная.

Полностью аналогичным образом, решая уравнение (3.4) по $f_2{}''(x)$, приходим к следующему результату:

Дифференциальное уравнение третьего порядка:

$$\begin{aligned} &y''' + 3f(y)y''y' + [f^2(y) + f'(y)](y')^3 = \\ &= \sum_{v=1}^{n} h_v(x)(y')^{\alpha_v}[y'' + f(y)(y')^2]^{\beta_v}e^{(\alpha_v+\beta_v-1)\int f(y)dy}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

редуцируется на уравнение второго порядка:

$$f_2{}''(x) = \sum_{v=1}^{n} h_v(x)f_2(x)^{\alpha_v}f_2{}'(x)^{\beta_v}. \tag{3.9}$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] J.D. Kečkić: *Additions to Kamke's treatise, VII: Variation of parameters for nonlinear second order differential equations*, Univ. Beog. Publ. Elektroteh. Fak. ser. mat. fiz. No 544–576 (1976), 31–36.

Математички факултет
ул. Пиринска бб. Карпош II
91000 Скопjе
п. фах 504