PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 27 (41), 1980, pp. 279—284

DIE EIGENSCHAFTEN DER KEGELSCHNITTE DURCH SPIEGELUNGEN GEÁUSSERT

Vesna Tomašić

Am Anfang möchte ich einigc wichtigste Eigenschaften der Symmetrie anführen, die bei der Arbeit benutzt werden und aus denen sichtbar ist dass diese Rechnung bei ihrer Anwendung eine sehr geringe Zahl einfacher Tatsachen benutzt.

Wir wissen, dass in der Euklids Ebene die Bijektion zwischen den Geraden und den Achsensymmetrien in Bezug anf diese Geraden besteht. Die Achsensymmetrien sind involutäre generatorische Elemente der Isometriegruppe. Wenn die Komposition von zwei verschiedenen Achsensymmetrie involutär ist dann sind die Achsen einander senkrechte Geraden, und die Komposition ist die zentrale Symmetrie.

Achsen — und Zentralsymmetrien sind die einzigen involutären Elemente der Isometriegruppen.

Wenn man in der Isometriegruppe die Achsensymmertien für "Geraden" nimmt und die Zentralsymmetrien für "Punkte", bekommt man die sogenannte "Gruppenebene". Die Menge der Geraden, d.h. die Menge der Erzeugenden bezeichnen wir mit S, die Geraden der Gruppenebene, d.h. der Achsensymmetie, bezeichnen wir mit kleinen lateinisehen Buchstaben, und der Zentralsymmetrie, d.h. die Punkte der Gruppenebene bezeichnen wir mit grossen lateinischen Buchstaben. Das heisst dass die Geraden und die Punkte einzigen involutären Elemente der Gruppenebene sind.

Die Verhältnisse zwischen den Geraden, und Geraden, und zwischen den Punkten und Geraden können mit ihrer Komposition ausgedrückt werden. Demgemäss:

$$ab = ba \quad \text{bedeutet} \quad a \perp b$$

$$aA = Aa \quad \text{bedeutet} \quad A \mathrel{I} a$$

In den Nachweisen, die folgen, wird das bekannte Theorem über drei Symmetrien verwendent.

Wenn a, b, c drei Geraden der Gruppenebene sind und P ein Punkt der Gruppenebene, dann gilt;

a) Aus $a, b, c, \mathrel{I} P$ folgt dass es ein d gibt dass $abc = d$ ist.

b) Wenn a, b, c, p vier Geraden der Grupenebene sind, dann aus $a, b, c \perp p$ folgt dass es ein d gibt solcher dass $abc = d$ ist.

Die geometrische Interpretation des Theorems über drei Symmetrien bedeutet das der orientierte Winkel $\sphericalangle(ab)$ dem orientierten Winkel $\sphericalangle(dc)$ gleich ist, beziehungsweise dass die gerichtete Entfernung von der Gerade a bis zur Gerade b der gerichteten Entfernung der Gerade d bis zur Gerade c gleich ist.

Es ist leicht zu beweisen die necshsten unmittelbaren Folgen des Theorems über drei Symmetrien:

$$\text{Wenn } abc = d \text{ ist und } a, b \mathrel{\underline{\mathrm{I}}} T \Rightarrow c, d \mathrel{\underline{\mathrm{I}}} T$$

$$\text{bzw. ist } abc = d \text{ und } a, b \perp p \Rightarrow c, d \perp p$$

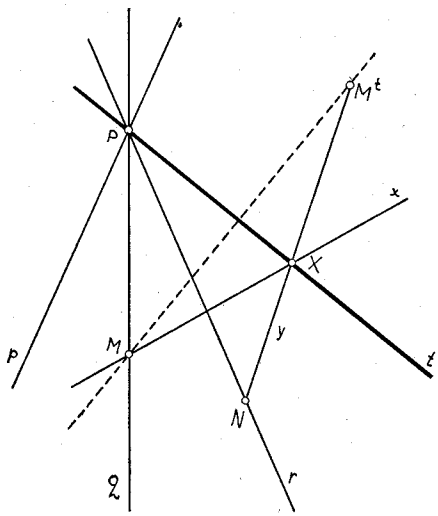
Der Ausdruch $ac = cb$ heisst, dass c Symmetrale des Winkels $\sphericalangle(ab)$ ist, und der Ausdruck $aX = Ya$, bzw. $Y = aXa = X^a$ heisst, dass die Gerade a Symmetrale der Strecke XY ist.

Der Begriff der Spiegelung wurde nicht bis vor kurzem für die Erforschung der Kurven zweiter Ordnung (Klasse) verwendet. Prof. Emil Molnár (Budapest) gab die Definition der Flächen und Kurven zweiter Ordnung (Klasse) basiert auf dem Begriff der Spiegelung (Potsdam (1973).

Hier wird nur über die Kurven gesprochen, so zitieren wir die Definition der Kurven.

Definition 1. Es seip p eine gegebene Gerade, nnd M und N zwei voneinander verschiedene Punkte die mit der Gerade p nicht inzident aber komplanär sind und $M^t \neq N$. Die Kurve zweiter Klasse ist die Menge

$$o = \{t \mid t = qpr\}$$



B. 1

wo q und r Verbindungsgeraden irgendwelchen Punkt P von der Gerade p reiheweise der Punkte M und N sind. (Bild 1).

Die Berührungspunkte der Tangenten sind die Punkte

$$X = \langle M^t N \rangle \cap t$$

welche eine Kurve k zweiter Ordnung ergeben.

Prof. Molnár bedient sich nicht weiter in seiner Darstellung mit zitierten Definition.

Hier wird gezeigt werden wie man einige Eigenschaften von Kurven zweiter Ordning (Klasse) in der Euklid's Ebene aus der angefürten Definition bekommen kann. Benützend die gegebene Definition wird gezeigt:

1. Jede Tangente der Kurve ist genau mit einem Punkt der Kurve inzident.

Die Geraden t und $\langle M^t N \rangle$ sind voneinander verschieden weil $N f p$,* $N \mathbin{I} r$ und $p \cap r = P$ ist. Darum ist: $p \neq r$, und wegen $qt = pr$ auch $q \neq t$. Aus $N f p$ und $P = q \cap p$ folgt $N \neq P$. Ánlich aus $M f q$, $M \mathbin{I} p$ und $P = q \cap p$ wegen $t \neq q$ folgt $M \neq P$, $M f t$ und $M^t f t$. Aus $M \neq M^t$, $M^t \neq N$ folgt dass die Gerade $\langle M^t N \rangle \neq t$ ist. Die Tangente t ist die Symmetrale der Strecke MM^t und darum ist t und der Punkt $X = t \cap \langle M^t N \rangle$ eindeutig bestimmt.

2. Um fesstellen zu können dass die Definition der Kurve zweiter Ordnung richtig ist, muss man zeigen:

Irgendwelche Gerade u hat mit der Kurve zweiter Ordnung meist zwei gemeisame Punkte.

Es sei dass die Gerade u die Kurve

$$k = \{X \mid X = \langle M^t N \rangle \cap t\}$$

in den Punkten X und Y schneidet (Bild 2). Der Definition nach sind die Punkte X und Y Berührungspunkte der Tangenten. Bezeichnen wir mit:

$$x = \langle MX \rangle, \quad y = \langle MY \rangle, \quad z = \langle MZ \rangle.$$

Nehmen wir an dass noch ein gemeinsamer Punkt Z der Geradde u und der Kurve k besteht. Das heisst, dass Z der Berührungspunkt einer Tangente $t = qpr$ ist. Analog sind X und Y Berührungspunkte der Tengenten $t_1 = q_1 pr_1$ bzw. $t_2 = q_2 pr_2$.

Der Voraussetzung nach ist $Z \mathbin{I} u, t, z$ und daraus folgt $zut \in S$. Aus $z, y, x \mathbin{I} M$ folgt $yxz \in S$. Es sei $yxz = z_1$ oder $z = xyz_1$. Der Ausdruck zut wird:

$$zut = xyz_1 urpq \in S.$$

Der Fall 1. Nehmen wir an dass $M f u$.

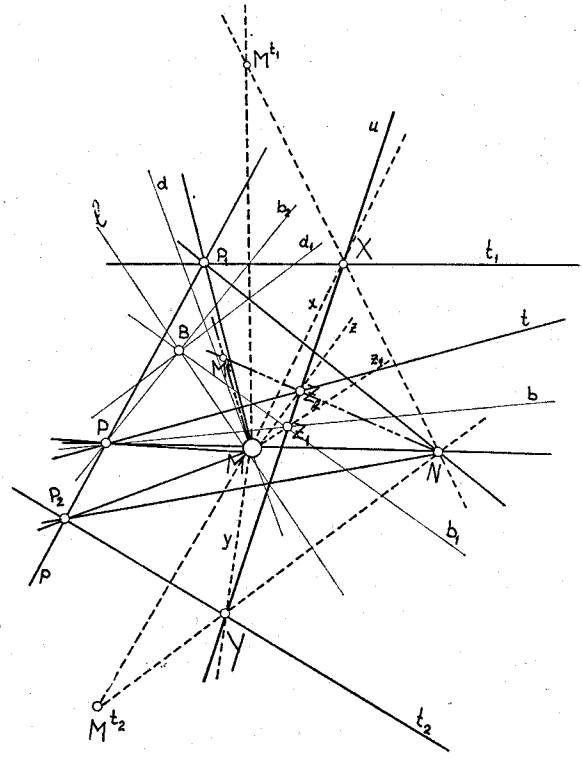
Zeigen wir zuerst dass $z \neq z_1$ ist. Aus $yxz = z_1$ hätten wir für $z = z_1$ $xyz = z$ oder $y = x$ was unmöglich ist weil der Voraussetzung nach, die Punkte X und Y, und darum auch die Geraden x und y verschieden sind, weil $X, Y, Z, Z_1 \mathbin{I} u$ und $M f u$,

Wegen $x, y, z \mathbin{I} M$ und $yxz = z_1$, wo $x \neq y \neq z \neq x$ ist, aus $z \mathbin{I} Z$, $z \neq z_1$, $z = \langle MZ \rangle$ und $z_1 \mathbin{I} M$ folgt $z_1 f Z$. Der vorausstzung nach ist $u \mathbin{I} Z$ und $u f M$ so ist $z_1 \neq u$ und der der Punkt $Z_1 = u \cap z_1$ existiert Aus $P f u$ und $Z_1 \mathbin{I} u$ folgt $P \neq Z_1$ und die Gerade $b = \langle PZ_1 \rangle$ existiert.

---

*) Wegen technische Schwierigkeiten wird hier das Symbol $\not\in$ für der Begriff „nicht inzident" benutzt.

Aus $z_1, u, b \mathbin{\rfloor\!\!\rfloor} Z_1$ folgt $z_1 ub = b_1 \in S$ und $b_1 \mathbin{\rfloor\!\!\rfloor} Z_1$. Ähnlich aus $b, r, p \mathbin{\rfloor\!\!\rfloor} P$ foigt $brp = b_2$ und $b_2 \mathbin{\rfloor\!\!\rfloor} P$. So kann zut in den Ausdruck



B. 2.

$$zut = xyz_1\, urpq = xyz_1\, ubbrpq = xyb_1\, b_2\, b \in S$$

transponiert werden.

Es sei $B = b_1 \cap b_2$ und zeigen wir dass $M = B$ nicht passieren kann. Da $b_1 \cap b_2 = B$ ist, so ist genügend zu zeigen, dass eine von den Geraden b_1 oder b_2, mit dem Punkt M nicht inzident ist. Zeigen wir $z \cdot B$. dass $b_2 \mathbin{f} M$.

Da $b_2 = brp$ und der Definition nach sind die Geraden $b, r,$ und p voneinander veschieden und $b, r, p \mathbin{\rfloor\!\!\rfloor} P$ was wegen $b_2 \neq r$ und $r \mathbin{\rfloor\!\!\rfloor} M$, $b_2 \mathbin{f} M$, ergibt.

Der Fall 2. Sei es $u \mathbin{\rfloor\!\!\rfloor} M$. In diesem Fall kann man den Beweis ableiten, der dem Vorhergehenden analog ist, wenn man die Geraden $\bar{x} = \langle NX \rangle$, $\bar{y} = \langle NY \rangle$ und $\bar{z} = \langle NZ \rangle$ einführt, denn in diesem Fall gilt $u \mathbin{f} N$.

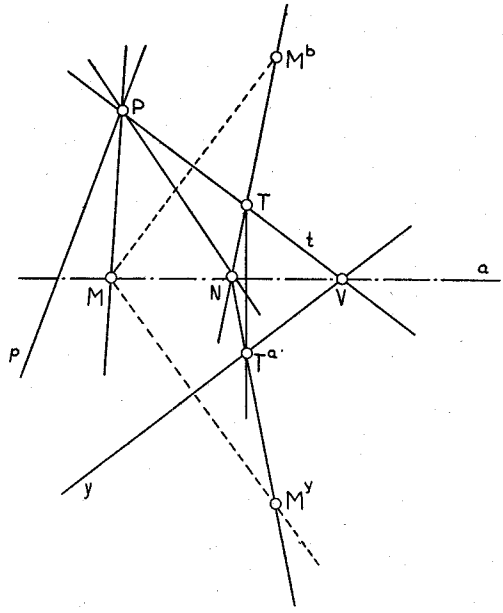
Darum die Gerade $c = \langle MB \rangle$ existiert.

Aus $x, y, c \mathbin{\rfloor\!\!\rfloor} M$ folgt $xyc = d$, wo $d \mathbin{\rfloor\!\!\rfloor} M$ und aus $c, b_1, b_2 \mathbin{\rfloor\!\!\rfloor} B$ folgt $cb_1 b_2 = d_1$ $d_1 \mathbin{\rfloor\!\!\rfloor} B$. So bekommt man:

$$zut = xyccb_1\, b_2\, q = dd_1\, q \in S.$$

Da $d, q \mathrel{I} M$ so ist ist $dd_1 q \in S$ wenn $d_1 \mathrel{I} M$, oder $d = d_1$ oder $d_1 = q$ ist.

Wenn es $d_1 \mathrel{I} M$ wäre, würde $d_1 = \langle MB \rangle = c$ und daraus $cb_1 b_2 = c$ was $b_1 = b_2$ ergibt, und daraus würde $z_1 ub = prb$ was $z_1 u = pr$ ergibt.



B. 3

Aus $p, r \mathrel{I} P$ würde auch $u \mathrel{I} P$ und aus $u \mathrel{I} P, Z$ und $t \mathrel{I} P, Z$ würde $u = p = \langle PZ \rangle$ sein. Aber das ist unmöglich, denn in diesem Fall wäre die Tangente t inzident mit drei voneinander unterschiedlichen Punkten X, Y, Z der Kurve k. Dementschprechend ist nicht d_1 mit M inzident und das bedeutet dass der Berührungspunkt $Z = z \cap t$ irgendwelcher Tangente t nictht mit der Gerade u inzident ist.

Nehmen wir an dass $d = d_1$ ist. Aus $d = xyc$ und $d_1 = b_2 b_1 c$ folgt $xy = b_1 b_2$ und $yx = z_1$ ubbrp. Aus $z_1 = yxz$ bekommt man $yx = yxzurp$ und daraus $1\, l = zurp$ *bzw.* $p = zur$. Weil $u, z \mathrel{I} Z$ ist, es wäre $p, r \mathrel{I} Z$ was s mit $p, r \mathrel{I} P$, $p = r$ ergibt. Das ist aber unmöglich weil der Voraussetzung nach $p \not I N$ und $r = \langle PN \rangle$.

Prüfen wir noch den Fall nach, wenn $P = Z$ ist. Dann ist $z = q$ und $p = t$. Nämlich aus $\langle M^t N \rangle \cap t = P$ und $\langle M^t N \rangle = tqt$ folgt $q^t = r$. So bekommt man: $t = qptqt \Rightarrow 1 = qptq \Rightarrow q = ptq \Rightarrow 1 = pt \Rightarrow p = t$. In diesem Fall ist der Punkt P_1 (oder P_2) verschieden von Z und wir betrachten das Produkt xut_1. Wegen $x, y, q \mathrel{I} M$ ist $xqy = x_1$, daraus folgt $x = qyx_1$ und es ist: $xut_1 = qyx_1 ut_1$.

Wenn die Gerarden $\overline{b}_1$, $\overline{b}_2$, $\overline{d}_1$, $\overline{d}_2$ änlich wie beim vorhergehenden. Beweis eingeführt wreden, bekommt man am Ende die Kontradiktion $u = t_1$.

3. Die Punkte M und N sind die Brennpunkte der Kurve

$$k = \{X \mid X = \langle M^t N \rangle \cap t\}.$$

Bezeichnen wir mit $x=\langle MX\rangle$ und $y=\langle NX\rangle$, wo X irgendwelcher Punkt der Kurve k ist. Wegen $\langle M^t N\rangle \mathbin{\rfloor\!\lfloor} X$ und $N\neq X$ folgt $\langle M^t N\rangle=\langle NX\rangle$, was neben $x \mathbin{\rfloor\!\lfloor} M, X, y=x^t$ ergibt. Das heisst, die Tangente t ist die Symmetrieachse des Winkels $\widehat{MXN}$ für jeden Punkt X der Kurve, so sind die Punkte M und N die Brennpunkte der Kurve.

4. Die Gerade $a=\langle MN\rangle$ ist die Symmetrieachse der betrachteten Kurve (Bild 3).

Bezeichnen wir mit T den Berührungspunkt irgendwelcher Tangente t der Kurve k, und mit V den Schnittpunkt der Tangente t und der Gerade $a=\langle MN\rangle$. Es soll gezeigt werden dass die Gerade $y=\langle T^a V\rangle$ Tangente der Kurve ist und der Punkt $T^a=\langle M^y N\rangle\cap y$ sein Berührungspunkt. Bezeichnen wir die Geraden $\langle MT^a\rangle=x_1$ und $\langle NT^a\rangle=y_1$. Wenn y die Tangente der Kurve ist, dann muss $x_1 y=yy_1$ bzw. $x_1 yy_1=y$ sein. Aus der Bedingung $x_1, y, y_1 \mathbin{\rfloor\!\lfloor} T^a$ folgt $x_1 yy_1=y_2\in S$. Nehmen wir an das y keine Tangente der Kurve ist. d.h. dass $y\neq y_2$ ist.

Da $y \mathbin{\rfloor\!\lfloor} T^a, V$ und $t \mathbin{\rfloor\!\lfloor} T, V$ sind, so ist $y=t^a$.

Analog aus $x^t \mathbin{\rfloor\!\lfloor} N, T$ und $x_1 \mathbin{\rfloor\!\lfloor} N, T^a$ folgt $y_1^a=x^t$.

Dann ist

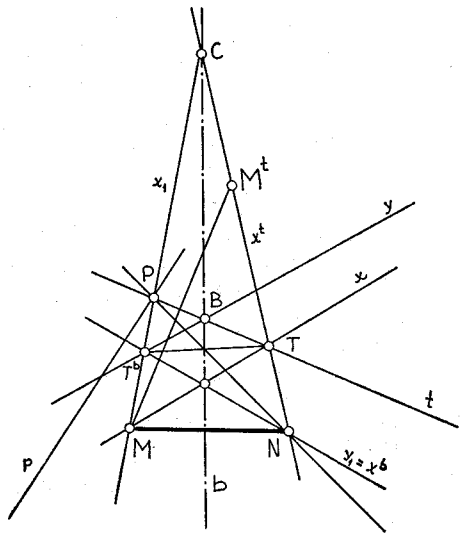
$$y_2=x_1 yy_1=x_1\, ataatxta=x_1\, axta.$$

Aus $a, x, x_1 \mathbin{\rfloor\!\lfloor} M$ und $x \mathbin{\rfloor\!\lfloor} T, M, x_1 \mathbin{\rfloor\!\lfloor} T^a, M$ folgt $x_1=x^a$ so ist $x_1 ax=$ $=axa\rho x=a$ und

$$y_2=x_1 yy_1=x_1\, axta=ata=t^a=y$$

was gezeigt verden sollte.

5. Analog bekommt man dass die Kurve symmetrisch ist in Bezug auf die Symmetrale b der Strecke MN (Bild 4).



B. 4

Bezeichnen wir mit T den Berührungspunkt irgendwelcher Tangente t der Kurve k, und mit $B=t\cap b$, $y=\langle T^b B\rangle$, $x_1=\langle MT^b\rangle$, $y_1=\langle NT^b\rangle$. Wie in vorausgehendem Fall soll man zeigen dass $x_1 yy_1=y$ ist. Nehmen wir an dass $x_1 yy_1=y_2$ ist wo $y_2\neq y$ ist.

Aus der Bedingung

$$y=t^b,\ y_1=x^b \text{ folgt}$$

$$x_1 yy_1=x_1\ btbbxb=x_1\, btxb=x_1\, bx_1^b\, x_1^b\, txb=btb=t^b=y$$

denn es ist $x_1\, bx_1^b=b$ und $x_1^b=\langle MT^b\rangle^b=\langle NT\rangle=x^t$.

Ähnlich wie in den angeführten Beispielen kann man auch andere Eigenschaften der Kurven zweiter Ordnung (Klasse) un der Euklid's Ebene zeigen.

Dieselbe Definition der Kurven zweiter Ordnung (Klasse) kann man in projektiv-metrischen bzw. singulären projektiv-metrischen Ebenen benutzen und sie kann uns für die Erfoschungen der Kurveneigenschaften in diesen Ebenen dienen.

REFERENCES

[1] Bachmann F.: *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff Springer-Verlag* 1959.

[2] Barlotti A.: *Un osservazione intorno ad un teorema di B. Segre sui q-archi.* Math. Zeitschrift 1966.

[3] Cossu A. *Sulle ovali di un piano proietivo sopra un corpo finito.* Atti Accad. Naz. Lincei Redinconti 1960.

[4] Dembowski P. *Finite Geometries. Springer-Verlag* 1968.

[5] Molnar E. *Die Kegelschnitte auf der Grundlage des Spiegelungsbegriff.* Sonderlagen aus Grundlagen der Geom3tr.e und algebraische Methoden. Potsdam 1973.

[6] Panella G. *Garatterizzazione delle quadriche di uno spazio (tridimensionale) lineare sopra un corpo finito.* Boll. Un. Math. Ital. 1955.