PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 27 (41), 1980, 169—174

# ЭКСТРАПОЛИРОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ С НЕРАЦИОНАЛЬНЫМИ ПЛОТНОСТЬЯМИ ПО ЗНАЧЕНИЯМ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

*Й. Малишич*

Пусть $x(t)$, $-\infty<t<+\infty$ стационарный случайный процесс. Процесс

(1) $$y(t)=x(t)+a_1 x(t-\theta)+\cdots+a_N x(t-N\theta), \quad a_k\in R, \quad \theta>0$$

будем называть $\theta$-преобразованием порядка $N$ процесса $x(t)$. В [1] показано что, если все корни $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ уравнения $z^N+a_1 z^{N-1}+\cdots+a_N=0$ по модулю менше единици, тогда

(2) $$x(t)=\sum_{j=0}^{\infty} d_j y(t-j\theta),$$

где ряд справа сходится в среднем квадратичном, а коэффициенты $d_j$ находятся из некоторых рекурентных соотношений. Если $H_{a,b}(x)$ — подпространство гильбертова пространства $H$ комплексных случайных величин конечной дисперсии, натянутое на совокупность $x(t)$, $a\leqslant t\leqslant b$, тогда

(3) $$H_{a,b}(y)\subset H_{a-N\theta,b}(x)$$

($a$, $b$ — конечные числа).

В настоящей работе мы будем рассматрывать случай когда один из процессов $x(t)$ и $y(t)$ обладает рациональной спектральной плотностью. В случае экстраполирования по данным на конечном интервале процессов типа $\theta$-преобразования основную роль в выводах будет играть следующая модифицированная лемма Яглома [4].

Лемма 1. *Для того чтобы функция $\Phi_{s,T}(\lambda)$ была спектральной характеристикой экстраполирования в точку $s\geqslant 0$ стационарного случайного процесса $x(t)$, заданого на $T\leqslant t\leqslant 0$ достаточно (в случае ограниченной спектральной плотности $g(\lambda)$), чтобы функции $\Phi_{s,T}(\lambda)$ и $\Psi_{s,T}(\lambda)=[e^{i\lambda s}-\Phi_{s,T}(\lambda)]g(\lambda)$ можно было продолжить в область комплексных значений $\lambda$ так, что*

1° *Функция* $\Phi_{s,T}(\lambda)$ — *целая функция* $\lambda$ *вида*

(4) $$\Phi_{s,T}(\lambda)=\sum_{j=1}^{M} e^{i\lambda t_j}R_j(\lambda),$$

*где* $T\leqslant t_j\leqslant 0$, а $R_j(\lambda)$ — *рациональные функции* $\lambda$ *пре всех* $j=\overline{1, M}$.

2° *Функция* $\Psi_{s,T}(\lambda)$ — *аналитическая функция* $\lambda$ *вида*

(5) $$\Psi_{s,T}(\lambda)=\Psi_{s,T}^{(1)}(\lambda)+e^{i\lambda T}\,\Psi_{s,T}^{(2)}(\lambda),$$

*где* $\psi_{s,T}^{(1)}(\lambda)$ — *функция, аналитическая в верхней полуплоскости и при* $|\lambda|\to\infty$ *она убывает в этой полуплоскости не медленнее чем* $|\lambda|^{h_1}$, $h_1<-1$ *а* $\Psi_{s,T}^{(2)}|\lambda|$ — *функция, аналитическая в нижней полуплоскости и при* $|\lambda|\to\infty$ *в этой полуплоскости она убывает не медленнее чем* $|\lambda|^{h_2}$, $h_2<-1$.

3° $$\Phi_{s,T}(\lambda)\in L^2(F).$$

Теорема 1. *Пусть* $x(t)$ *стационарный процесс с рациональной спектральной плосностью*

(6) $$g(\lambda)=B_0\frac{|B(\lambda)|^2}{|A(\lambda)|^2}=B_0\frac{|(\lambda-\beta_1)\cdots(\lambda-\beta_m)|^2}{|(\lambda-\gamma_1)\cdots(\lambda-\gamma_n)|^2}$$

($B_0>0$, $m<n$, $I_m\gamma_k>0$, $I_m\beta_j>0$), *а* $y(t)$ *его* $\theta$-*преобразование порядка* $N$ *из* (1). *Пусть известны значения* $y(t)$ *при* $t\in[T, 0]$, $T<0$. *Обозначим*:

$$r=\left[\frac{s}{\theta}\right],\quad l=\left[\frac{-T}{\theta}\right]$$

*и* $T$ *не делится на* $\theta$. *Тогда спектральная характеристика экстраполирования процесса* $y(t)$ *в точку* $s>0$ *по его значениям на* $[T, 0]$ *при* $r\geqslant N$ *имеет вид*

(7) $$\Phi_{s,T}^{y}(\lambda)=R_1(\lambda)\sum_{j=0}^{l} c_j^{(1)}e^{-i\lambda j\theta}+e^{i\lambda T}R_2(\lambda)\sum_{j=0}^{l} c_j^{(2)}e^{i\lambda j\theta},$$

*где* $R_1(\lambda)=\dfrac{\omega_1(\lambda)}{|B(\lambda)|^2}$ *и* $R_2(\lambda)=\dfrac{\omega_2(\lambda)}{|B(\lambda)|^2}$ *рациональные функции* $\lambda$, *у которых* $\omega_1(\lambda)$ *и* $\omega_2(\lambda)$ *многочлены степени не больше* $(n-m-1)$.

Заметим. что функция (7) всегда удовлетворяет условиям 1° и 3° Леммы 1, так что требуется лишь проверить условие 2°.

Приведенное ниже доказательство теоремы 1 будет включать также и описание метода определения коэффициентов $c_j^{(1)}$ и $c_j^{(2)}$, а также всех коэффициентов многочленов $\omega_1(\lambda)$ и $\omega_2(\lambda)$, т.е. доставит нам метод явного определения функции $\Phi_{s,T}^{y}(\lambda)$.

Доказательство. Распишем функцию

$$\Psi_{s,T}^{y}(\lambda)=\left[e^{i\lambda s}-\Phi_{s,T}^{y}(\lambda)\right]g_y(\lambda)\equiv\Psi^*(\lambda)\cdot g_x(\lambda),$$

$$\Psi^*(\lambda)=\left[e^{i\lambda s}-\Phi_{s,T}^{y}(\lambda)\right]\left|\sum_{j=0}^{N}a_j e^{-i\lambda j\theta}\right|^2=$$

$$= \left[e^{i\lambda s} - \Phi^{y}_{s,T}(\lambda)\right] \sum_{j=-N}^{N} a_j^* e^{i\lambda j\theta} =$$

$$= \sum_{j=-N}^{N} a_j^* e^{i\lambda(s+j\theta)} - R_1(\lambda) \sum_{j=0}^{l} c_j^{(1)} e^{-i\lambda j\theta} \cdot \sum_{j=-N}^{N} a_j^* e^{i\lambda j\theta} -$$

$$- R_2(\lambda) e^{i\lambda T} \sum_{j=0}^{l} c_j^{(2)} e^{i\lambda j\theta} \cdot \sum_{j=-N}^{N} a_j^* e^{i\lambda j\theta} =$$

$$= \sum_{j=-N}^{N} a_j^* e^{i\lambda(s+j\theta)} - R_1(\lambda) \sum_{j=-l-N}^{N} p_j e^{i\lambda j\theta} - e^{i\lambda T} R_2(\lambda) \sum_{j=-N}^{l+N} q_j e^{i\lambda j\theta} =$$

$$= \left\{ \sum_{j=-N}^{N} a_j^* e^{i\lambda(s+j\theta)} - R_1(\lambda) \sum_{j=0}^{N} p_j e^{i\lambda j\theta} - e^{i\lambda T} R_2(\lambda) \sum_{j=l+1}^{l+N} q_j e^{i\lambda j\theta} \right\} +$$

$$+ e^{i\lambda T} \left\{ - \sum_{j=-l-N}^{-l-1} p_j e^{i\lambda j\theta} R_1(\lambda) - R_2(\lambda) \sum_{j=-N}^{0} q_j e^{i\lambda j\theta} \right\} +$$

$$+ \left\{ -R_1(\lambda) \sum_{j=-l}^{-1} p_j e^{i\lambda j\theta} - e^{i\lambda T} R_2(\lambda) \sum_{j=0}^{l} q_j e^{i\lambda j\theta} \right\} \equiv$$

$$\equiv \Psi_1^*(\lambda) + e^{i\lambda T} \Psi_2^*(\lambda) + \xi(\lambda).$$

В силу Леммы 1 должно быть $\xi(\lambda) = 0$, а из этого следует, что

$$p_j = 0,\ j = \overline{-l, -1};\quad q_j = 0,\ j = \overline{0, l}.$$

Чтобы найти значения $c_j^{(2)}$, $j = \overline{0, l}$, т.е. чтобы воспользоваться условиями $q_j = 0$, $j = \overline{1, l}$, напишем следующую цепочку равенств

$$\sum_{j=0}^{l} c_j^{(2)} e^{i\lambda j\theta} (1 - \alpha_1 e^{i\lambda\theta}) = \sum_{j=-1}^{l} A_j^{(1)} e^{i\lambda j\theta},$$

где

$$A_j^{(1)} = C_j^{(2)} - \alpha_1 C_{j+1}^{(2)},\ j = \overline{0, l-1};\ A_l^{(1)} = C_l^{(1)},\ A_{-1}^{(1)} = -\alpha_1 C_0^{(2)};$$

$$\sum_{j=-k}^{l} A_j^{(k)} e^{i\lambda j\theta} (1 - \alpha_{k+1} e^{-i\lambda\theta}) = \sum_{j=-k-1}^{l} A_j^{(k+1)} e^{i\lambda j\theta},$$

где

$$A_j^{(k+1)} = A_j^{(k)} - \alpha_{k+1} A_{j+1}^{(k)},\ j = \overline{-k,\ l-1};\ A_l^{(k+1)} = A_l^{(k)},\ A_{-k-1}^{(k+1)} = \alpha_{k+1} A_{-k}^{(k)}$$

при $1 \leqslant k < N$;

$$\sum_{j=-N}^{l} A_j^{(N)} e^{i\lambda j\theta} (1 - \alpha_1 e^{i\lambda\theta}) = \sum_{j=-N}^{l+1} B_j^{(1)} e^{i\lambda j\theta},$$

где

$$B_j^{(1)} = A_j^{(N)} - \alpha_1 A_{j-1}^{(N)},\ j = \overline{-N+1,\ l};\ B_{l+1}^{(1)} = -\alpha_1 A_l^{(N)},\ B_{-N}^{(1)} = A_{-N}^{(N)};$$

$$\sum_{j=-N}^{l+\nu} B_j^{(\nu)} e^{i\lambda j\theta} (1 - \alpha_{j+1} e^{i\lambda\theta}) = \sum_{j=-N}^{l+\nu+1} B_j^{(\nu+1)} e^{i\lambda j\theta},$$

где

$B_j^{(\nu+1)}=B_j^{(\nu)}-\alpha_{\nu+1}B_{j-1}^{(\nu)},\ j=\overline{-N+1,\ \ l+\nu};\ \ B_{l+\nu+1}^{(\nu+1)}=-\alpha_{\nu+1}B_{l+\nu}^{(\nu)},\ \ B_{-N}^{(\nu+1}=B_{-N}^{(\nu)},$

при $1\leqslant\nu\leqslant N-1$.

У нас $B_j^{(N)}=q_j$ и из $q_j=0$ следует

$$B_j^{(N-1)}-\alpha_N B_{j-1}^{(N-1)}=0,$$

т.е.

$$B_j^{(N-1)}=B_0^{(N-1)}\alpha_N^j.$$

Потом мы приходим к

$$B_j^{(N-2)}-\alpha_{N-1}B_{j-1}^{(N-2)}=B_0^{(N-1)}\alpha_N^j,$$

потом к $B_j^{(N-3)}$, итд. до $C_j^{(2)}$. Значения постоянных $B_0^{(N-1)}$, $B_0^{(N-2)}$, ... определяются, все кроме одной, с помощью граничных условий.

Следствие 1. *Если в теореме* 1 $l=0$, *тогда*

$$\Phi_{s,T}^y(\lambda)=R_1(\lambda)+e^{i\lambda T}R_2(\lambda). \tag{8}$$

Следствие 2. *Если $T$ кратное $\theta$, т.е. $T=-\nu\theta$, то полагая $T$ не кратным $\theta$, а затем переходя в теореме* 1 *к пределу $T\to\nu\theta$, получим*

$$\Phi_{s,T}^y(\lambda)=\sum_{j=0}^{\nu}C_j e^{-i\lambda j\theta}\cdot R(\lambda). \tag{9}$$

Теорема 2. *Если $l=0$ и $r<N$, то*

$$\Phi_{s,T}^y(\lambda)=R_1(\lambda)+e^{i\lambda T}R_2(\lambda)+Ae^{i\lambda(s-r\theta-\theta)} \tag{10}$$

*при* $\left[\dfrac{s-T}{\theta}\right]=r+1$;

$$\Phi_{s,T}^y(\lambda)=R_1(\lambda)+e^{i\lambda T}R_2() \tag{11}$$

*при* $\left[\dfrac{s-T}{\theta}\right]=r$.

Теорема 3. *Если $l>0$ и $r<N$, тогда*

$$\Phi_{s,T}^y(\lambda)=R_1(\lambda)\sum_{j=0}^{l}C_j^{(1)}e^{-i\lambda j\theta}+e^{i\lambda T}R_2(\lambda)\sum_{j=0}^{l}C_j^{(2)}e^{i\lambda j\theta}+\sum_{j=r+1}^{K}h_j e^{i\lambda(s-j\theta)}, \tag{12}$$

*где* $K=\left[\dfrac{s-T}{\theta}\right]$, *т.е.* $k=r+l$ *или* $k=r+l+1$.

Доказательства теорем 2 и 3 вполне аналогичны доказательству теоремы 1. Эти доказательства доставляют также методы однозначного определения функции $\Phi_{s,T}^y(\lambda)$, т.е. включают в себе эффективное решение задачи об экстраполировании.

Теперь переходим к случаю когда процесс $y(t)$ из (1) является процессом с рациональной спектральной плотностью и будем решать экстраполяционую задачу для процессов $x(t)$. Для таких случаев имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть процессы* $x(t)$ *и* $y(t)$ *связаны соотношением* (1) *и пусть спектральная плотность процесса* $y(t)$ *рациональная функция. Пусть, далее, как и раньше* $r=\left[\frac{s}{\theta}\right]$, $l=\left[\frac{-T}{\theta}\right]$ *и пусть* $\nu=\left[\frac{s-T}{\theta}\right]$. *Тогда*

$$\Phi^x_{s,T}(\lambda)=R_1(\lambda)+e^{i\lambda T}R_2(\lambda) \tag{13}$$

*при* $l=0$, $k=r$;

$$\Phi^x_{s,T}(\lambda)=R_1(\lambda)+e^{i\lambda T}R_2(\lambda)+he^{i\lambda(s-r\theta-\theta)} \tag{14}$$

*при* $l=0$ *и* $k=r+1$;

$$\Phi^x_{s,T}(\lambda)=R_1(\lambda)\sum_{j=0}^{l}C_j^{(1)}e^{-i\lambda j\theta}+ \tag{15}$$

$$+R_2(\lambda)e^{i\lambda T}\sum_{j=0}^{l}C_j^{(2)}e^{i\lambda j\theta}+\sum_{j=r+1}^{\nu}h_je^{i\lambda(s-j\theta)}$$

*при* $0<l<N$;

$$\Phi^x_{s,T}(\lambda)=R_1(\lambda)\sum_{j=0}^{N}C_j^{(1)}e^{-i\lambda j\theta}+ \tag{16}$$

$$+R_2(\lambda)e^{i\lambda T}\sum_{j=0}^{N}C_j^{(2)}e^{i\theta j\theta}+\sum_{j=r+1}^{r+N}h_je^{i\lambda(s-j\theta)}$$

*при* $l\geqslant N$.

Здесь опять сразу ясно, что условия 1° и 3° леммы выполняются, так что надо проверить лишь условие 2°.

Доказательство приводим лишь в случае $l\geqslant N$. Тогда

$$\Psi^*(\lambda)=\left[e^{i\lambda s}-\Phi^x_{s,T}(\lambda)\right]\cdot\left|\sum_{j=0}^{N}a_je^{-i\lambda j\theta}\right|^{-2}=$$

$$=\sum_{j=-\infty}^{\infty}e^{i\lambda s}d_j^{(N)}e^{i\lambda j\theta}-R_1(\lambda)\sum_{j=0}^{\infty}\tau_j^{(N)}e^{i\lambda j\theta}-$$

$$-e^{i\lambda T}\sum_{j=0}^{\infty}\tau_j^{(N)}e^{-i\lambda j\theta}R_2(\lambda)-\sum_{j=r+1}^{r+N}h_je^{i\lambda(s-j\theta)}\cdot\sum_{j=-\infty}^{\infty}d_j^{(N)}e^{i\lambda j\theta},$$

где

$$\frac{1}{1+a_1e^{i\lambda\theta}+\cdots+a_Ne^{i\lambda N\theta}}=\sum_{j=0}^{\infty}\tau_j^{(N)}e^{i\lambda j\theta},$$

$$\frac{1}{1+a_1 e^{-i\lambda\theta}+\cdots+a_N e^{-i\lambda N\theta}}=\sum_{j=0}^{\infty}\tau_j^{(N)}e^{-i\lambda j\theta},$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}\tau_j^{(N)}e^{i\lambda j\theta}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\tau_j^{(N)}e^{-i\lambda j\theta}=\sum_{j=-\infty}^{\infty}d_j^{(N)}e^{i\lambda j\theta}.$$

Так как

$$\sum_{j=r+1}^{r+N}h_j e^{i\lambda(s-j\theta)}\cdot\sum_{j=-\infty}^{\infty}d_j^{(N)}e^{i\lambda j\theta}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta_k^{(N)}e^{i\lambda(s+k\theta)}$$

где

$$\delta_k^{(N)}=\sum_{j=r+1}^{r+N}h_j d_{j+k}^{(N)},$$

мы имеем

$$\Psi^*(\lambda)=\left\{\sum_{j=-r}^{\infty}d_j^{(N)}e^{i\lambda(s+j\theta)}-R_1(\lambda)\sum_{j=0}^{\infty}\tau_j^{(N)}e^{i\lambda j\theta}-\right.$$

$$\left.-\sum_{j=-r}^{\infty}\delta_j^{(N)}e^{i\lambda(s+j\theta)}\right\}+e^{i\lambda T}\left\{-\sum_{-\infty}^{-\nu}d_j^{(N)}e^{i\lambda(s+j\theta-T)}-\right.$$

$$\left.-R_2(\lambda)\sum_{j=0}^{\infty}\tau_j^{(N)}e^{-i\lambda j\theta}-\sum_{j=-\infty}^{-\nu}\delta_j^{(N)}e^{i\lambda(s+j\theta-T)}\right\}+$$

$$+\left\{\sum_{j=-\nu+1}^{-r-1}\left[d_j^{(N)}-\delta_j^{(N)}\right]e^{i\lambda(s+j\theta)}\right\}\equiv$$

$$\equiv\Psi_1^*(\lambda)+e^{i\lambda T}\Psi_2^*(\lambda)+\xi(\lambda),$$

так что

$$\delta_j^{(N)}=d_j^{(N)},\quad j=\overline{-\nu+1,\ -r-1}$$

и из этой системы мы и получаем значения $h_j$, $j=\overline{r+1,\ r+N}$.

## ЛИТЕРАТУРА

1. J. Малишић, *Екстраполација и други линеарни проблеми једне класе стационарних случајних процеса са нерационалним спектралним густинама*, Београд. 1973.

2. Й. Малишич, *Об экстраполировании по всему прошлому для некорых стационарных процессов с нерациональными плотностьями*, Весник 2 (1978).

3. J. L. Doob, *Stochastic processes*, New York, 1953.

4. А. М. Яглом, *Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных процессов с рациональной спектральной плотностью* Труды ММО, 4 (1955), 333—374.

5. A. M. Yaglom, *Outline of some topics in linear extrapolation of stationary random processes*, Proc. of the Fifth Berkeley simp. on Math. Stat. and Prob., 1965, 259—278.

6. Y. Hajek. *On linear estimation theory for an infinite number of observation*, Teor. verojatn., 2 (1961), 182—193.