PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 27 (41), 1980, pp. 151—167

ВЛОЖЕНИЕ И СОВПАДЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ

Б. Лаковић

§ I. Обозначения и формулировка основных результатов

Через $L_{\vec{p}}([0, 2\pi]^2)$, $\vec{p}=(p_1, p_2)$, $1\leqslant p_i\leqslant\infty$, $i=1, 2$ будем обозначать пространство измеримых функций $f(x, y)$, 2π — периодических по каждому переменному и таких, что норма

$$\|f\|_{\vec{p}, ([0, 2\pi]^2)}=\|f\|_{\vec{p}}=\|\,\|f\|_{p_1, x}\|_{p_2, y}<\infty .$$

Если $f\in L_{\vec{p}}([0, 2\pi]^2)$ и $\int\limits_0^{2\pi} f\,dx=\int\limits_0^{2\pi} f\,dy=0$ почти для всех x и y, будем также использовать обозначение $f\in \overset{\circ}{L}_{\vec{p}}([0, 2\pi]^2)$.

Через $\Delta_{t_1 t_2}^{k_1 k_2}$ будем обозначать смешанную разность, т. е.

$$\Delta_{t_1 t_2}^{k_1 k_2} f=\Delta_{t_1}^{k_1}(\Delta_{t_2}^{k_2} f),\ \ \Delta_{t_2}^{k_2} f=f(x, y+t_2)-f(x, y)$$

(т. е. $\Delta_{t_2}^{k_2} f$ k_2-я разность функции f с шагом t_2).

Смешанный модуль гладкости будем обозначать через $\omega_{k_1 k_2}(f, \delta_1, \delta_2)_{\vec{p}}$ т. е.

$$\omega_{k_1 k_2}(f, \delta_1, \delta_2)_{\vec{p}}=\sup_{|t_1|\leq\delta_1,\ |t_2|\leq\delta_2}\|\Delta_{t_1 t_2}^{k_1 k_2} f\|_{\vec{p}}.$$

Пусть T_{ν_1} (T_{ν_2}) тригонометрический полином порядка ν_1 (ν_2) по переменной x (y). Величину

$$y_{\nu_1 \nu_2}(f)_{\vec{p}}=\inf_{T_{\nu_1}, T_{\nu_2}}\|f-(T_{\nu_1}+T_{\nu_2})\|_{\vec{p}}$$

назовем наилучшим приближением двухмерным углом функции f по переменным x, y.

Пусть $\alpha(t_1, t_2)\geqslant C>0$ функция измеримая на квадрате $[0, 2\pi]^2$ и суммируемая на прямоугольнике $[\delta_1, 2\pi]\times[\delta_2, 2\pi]$ для каждого $\delta_1\in(0, 2\pi)$ и каждого $\delta_2\in(0, 2\pi)$.

Класс функций $SB(\vec{p}, \vec{\theta}, \alpha)$, $\vec{p}=(p_1, p_2)$, $1\leqslant p_i\leqslant\infty$, $\vec{\theta}=(\theta_1, \theta_2)$, $0<\theta_i<\infty$, $i=1, 2$ определен как множество функций $f\in L_{\vec{p}}([0, 2\pi]^2)$ таких, что

$$I_1^{\theta_2}=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\alpha(t_1, t_2)\,\omega_{k_1 k_2}^{\theta_1}(f, t_1, t_2)_{\vec{p}}\,dt_1\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}dt_2<\infty$$

$$I_2^{\theta_2}=\int_1^{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\alpha(t_1, t_2)\,\omega_{k_1}^{\theta_1}(f, t_1)_{\vec{p}}\,dt_1\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}dt_2<\infty$$

$$I_3^{\theta_2}=\int_0^{2\pi}\left\{\int_1^{2\pi}\alpha(t_1, t_2)\,\omega_{k_2}^{\theta_2}(f, t_2)_{\vec{p}}\,dt_1\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}dt_2<\infty$$

Для $\nu_1\geqslant 1$ и $\nu_2\geqslant 1$ введем следующие обозначения

$$\beta_0^{\theta_2}(\nu_1, \nu_2)=\int_{\frac{1}{\nu_2}}^{2\pi}\left\{\int_{\frac{1}{\nu_1}}^{2\pi}\alpha(t_1, t_2)\,dt_1\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}dt_2,\quad \beta_{10}^{\theta_2}(\nu_1)=\int_1^{2\pi}\left\{\int_{\frac{1}{\nu_1}}^{2\pi}\alpha(t_1, t_2)\,dt_1\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}dt_2$$

$$\beta_{02}^{\theta_2}(\nu_2)=\int_{\frac{1}{\nu_2}}^{2\pi}\left\{\int_1^{2\pi}\alpha(t_1, t_2)\,dt_1\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}dt_2,\quad \beta_1^{\theta_2}(\nu_1, \nu_2)=\nu_1^{k_1\theta_2}\int_{\frac{1}{\nu_2}}^{2\pi}\left\{\int_0^{1/\nu_1}\alpha(t_1, t_2)\,t_1^{k_1\theta_1}\,dt_1\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}dt_2$$

$$\beta_2^{\theta_2}(\nu_1, \nu_2)=\nu_2^{k_2\theta_2}\int_0^{\frac{1}{\nu_2}}\left\{\int_{\frac{1}{\nu_1}}^{2\pi}\alpha(t_1, t_2)\,t_2^{k_2\theta_1}\,dt_1\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}dt_2$$

$$\beta_3^{\theta_2}(\nu_1, \nu_2)=\nu_1^{k_1\theta_2}\,\nu_2^{k_2\theta_2}\int_0^{\frac{1}{\nu_2}}\left\{\int_0^{\frac{1}{\nu_1}}\alpha(t_1, t_2)\,t_1^{k_1\theta_1}\,t_2^{k_2\theta_1}\,dt_1\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}dt_2.$$

Класс функций $SW(\vec{p}, \vec{\theta}, \alpha)$, $\vec{p}=(p_1, p_2)$, $1\leqslant p_i\leqslant\infty$, $\vec{\theta}=(\theta_1, \theta_2)$. $0<\theta_i<\infty$, $i=1, 2$ определим как множество функций $f\in L_{\vec{p}}([0, 2\pi]^2)$ удовлетворяющих условию: Если

$$\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}A_{\nu_1\nu_2}(x, y)$$

есть ряд Фурье функции $f(x, y)$, то существует функция $g(x, y)\in L_{\vec{p}}([0, 2\pi]^2)$ имеющая ряд Фурье

$$g\sim\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\beta(\nu_1, \nu_2)\,A_{\nu_1\nu_2}(x, y)$$

где $\beta(0, 0)=\beta_0(1, 1)$, $\beta^{\theta_2}(\nu, 0)=\beta_1^{\theta_2}(\nu, 1)+\beta_{10}^{\theta_2}(\nu)$, $\beta^{\theta_2}(0, \nu)=\beta_2^{\theta_2}(1, \nu)+\beta_{02}^{\theta_2}(\nu)$

$$\beta^{\theta_2}(\nu_1, \nu_2)=\beta_0^{\theta_2}(\nu_1, \nu_2)+\beta_1^{\theta_2}(\nu_1, \nu_2)+\beta_2^{\theta_2}(\nu_1, \nu_2)+\beta_3^{\theta_2}(\nu_1, \nu_2)$$

Через $\mathcal{M}$ обозначим множествоо функций $f(x, y) \in L_{\vec{p}}([0, 2\pi]^2)$ имеющих ряд Фурье

$$f \sim \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} a_{n_1} b_{n_2} \cos n_1 x \cos n_2 y, \quad a_{n_1} \downarrow 0, \quad b_{n_2} \downarrow 0.$$

Через $\mathcal{L}$ обозначим множество функций $f(x, y) \in L_{\vec{p}}([0, 2\pi]^2)$ имеющих ряд Фурье

$$f \sim \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} a_{n_1} b_{n_2} \cos n_1 x \cos n_2 y$$

где $a_{n_1} = a'_{n_1}$, для $n_1 = 2^{m_1}$; $a_{n_1} = 0$, для $n_1 \neq 2^{m_1}$ и $b_{n_2} = b'_{n_2}$, для $n_2 = 2^{m_2}$; $b_{n_2} = 0$, для $n_2 \neq 2^{m_2}$.

Целью работы является доказательство следующих теорем:

Теорема 1. *Пусть* $1 < p_i < \infty$, $0 < \theta_i < \infty$, $i = 1, 2$. *Тогда*

а) *Если*

$$\max(2, p_1, p_2) \leqslant \min(\theta_1, \theta_2)$$

то

$$SW(\vec{p}, \vec{\theta}, \alpha) \subset SB(\vec{p}, \vec{\theta}, \alpha).$$

б) *Если*

$$\max(\theta_1, \theta_2) \leqslant \min(2, p_1, p_2)$$

то

$$SB(\vec{p}, \vec{\theta}, \alpha) \subset SW(\vec{p}, \vec{\theta}, \alpha).$$

Следствие. *Пусть* $p_1 = p_2 = p$, $1 < p < \infty$, $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, $0 < \theta < \infty$. *Тогда*

а) *если* $\max(2, p) \leqslant \theta < \infty$, *то* $SW(p, \theta, \alpha) \subset SB(p, \theta, \alpha)$,

б) *если* $0 < \theta \leqslant \min(2, p)$, *то* $SB(p, \theta, \alpha) \subset SW(p, \theta, \alpha)$.

Теорема 2. а) *Если* $p_1 = p_2 = \theta_1 = \theta_2 = p$, $1 < p < \infty$, *то*

$$\mathcal{M} \cap SB(p, p, \alpha) = \mathcal{M} \cap SW(p, p, \alpha)$$

б) *Если* $p_1 = p_2 = p$, $1 < p < \infty$, $\theta_1 = \theta_2 = 2$, *то*

$$\mathcal{L} \cap SB(p, 2, \alpha) = \mathcal{L} \cap SW(p, 2, \alpha).$$

Замечания: 1. Случай $p_1 = p_2$ и $\theta_1 = \theta_2$ рассмотрен ранее в работе [1].

2. В случае $p_1 = p_2$, $\theta_1 = \theta_2$, $\alpha(t_1, t_2) = \alpha(t_1)\,\alpha(t_2)$, каждая из функций $\alpha_i(t_i)$, $i = 1, 2$ удовлетворяет некоторому σ — условию, аналогичные теоремы доказаны в работе [2].

В случае функций одного переменного аналогичные результаты имеются в работах [3, 4, 5].

§ 2. Вспомогательные леммы и теоремы

Лемма 1. *Если* $f \in \mathring{L}_{\vec{p}}([0, 2\pi]^2)$, *то*

$$\omega_{k_1}(f, \delta_1)_{\vec{p}} \leqslant C_1\, \omega_{k_1 k_2}(f, \delta_1, 1)_{\vec{p}}, \quad \omega_{k_2}(f, \delta_2)_{\vec{p}} \leqslant C_2\, \omega_{k_1 k_2}(f, 1, \delta_2)_{\vec{p}}$$

Лемма 2. [6]. *Если* $f \in L_{\vec{p}}([0, 2\pi]^2)$, *то*

$$Y_{\nu_1 \nu_2}(f)_{\vec{p}} \leqslant C\, \omega_{k_1 k_2}\left(f, \frac{1}{\nu_1+1}, \frac{1}{\nu_2+1}\right)_{\vec{p}}$$

Лемма 3. [7]. *Каждая функция* $f \in L_p([0, 2\pi]^2)$ *однозначно представима в виде*

$$f(x, y) = F(x, y) + F_1(x) + F_2(y) + F_0$$

$F \in L_p^{\circ}([0, 2\pi]^2)$, $F_1 \in L_p^{\circ}([0, 2\pi])$; $F_2 \in L_p^{\circ}([0, 2\pi])$, F_0-*постоянная*.

Частные суммы ряда Фурье функции $F(x, y)$ порядка ν_1 по x, ν_2 по y, будем обозначать, последовательно, через $s_{\nu_1\infty}$, $s_{\infty\nu_2}$, $s_{\nu_1\nu_2}$. Суммы $s_{\nu_1\infty}(f - s_{\infty\nu_2})$, $s_{\infty\nu_2}(f - s_{\nu_1\infty})$ и $s_{\nu_1\infty} + s_{\infty\nu_2} - s_{\nu_1\nu_2}$ будем обозначать через T_{ν_1}, θ_{ν_2}, U_{ν_1, ν_2}.

Запись $f(x) \ll g(x)$ обозначает, что существует не зависящая от x постоянная $c > 0$ такая, что $f(x) \leqslant cg(x)$. Если одновременно $f(x) \ll g(x)$ и $g(x) \ll f(x)$, то будем записывать $f(x) \approx g(x)$.

Лемма 4. [6]. *Если* $f \in L_{\vec{p}}([0, 2\pi]^2)$, $1 < p_i < \infty$, $i = 1, 2$, *то*

$$Y_{\nu_1\nu_2}(f)_{\vec{p}} \approx \|f - U_{\nu_1\nu_2}\|_{\vec{p}}$$

Лемма 5. *Если* $f \in L_{\vec{p}}([0, 2\pi]^2)$, *то*

$$\omega_k\left(T_{\nu_1}, \frac{1}{\nu}\right)_{\vec{p}} \approx \frac{1}{\nu^k}\left\|\frac{\partial^k}{\partial x^k} T_\nu\right\|_{\vec{p}}, \quad \omega_{k_1 k_2}\left(s_{\nu_1\nu_2}, \frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2}\right)_{\vec{p}} \approx \frac{1}{\nu_1^{k_1}\nu_2^{k_2}}\left\|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}} s_{\nu_1\nu_2}\right\|_{\vec{p}}$$

Лемма 6. (Литтльвуда-Пэли) [8]. *Пусть* $m = (m_1, m_2)$ *целочисленний неотрицательний вектор*, $f \in L_p([0, 2\pi]^2)$

$$f \sim \sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty} A_{\nu_1\nu_2}(x, y), \quad \Delta_{m_1 m_2}(x, y) = \sum_{\nu_1=2^{m_1}}^{2^{m_1+1}-1}\ \sum_{\nu_2=2^{m_2}}^{2^{m_2+1}-1} A_{\nu_1\nu_2}(x, y).$$

Тогда $\|f\|_{\vec{p}} \approx \left\|\left[\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty} \Delta^2_{m_1 m_2}(x, y)\right]^{\frac{1}{2}}\right\|_{\vec{p}}$

Лемма 7 (Марцинкевича) [8]. *Пусть* $\vec{n} = (n_1, n_2)$ *целочисленный неотрицательный вектор*, λ_n *численная последовательность*,

$$\Delta_1\lambda_n = \lambda_{(n_1+1,\, n_2)} - \lambda_{(n_1\, n_2)}, \quad \Delta_2\lambda_n = \lambda_{(n_1,\, n_2+1)} - \lambda_{(n_1,\, n_2)}, \quad f \sim \sum_{\nu_1=0}^{\infty}\sum_{\nu_2=0}^{\infty} A_{\nu_1\nu_2}(x, y)$$

Тогда: Если

$$|\lambda_n| \leqslant M \text{ и } \sum_{\nu_1=2^{n_1-1}}^{2^{n_1}-1}\ \sum_{\nu_2=2^{n_2-1}}^{2^{n_2}-1} |\Delta_1\Delta_2\lambda_{(\nu_1,\, \nu_2)}| \leqslant M$$

то функция $\varphi(x, y)$, $\varphi(x, y) \sim \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} \lambda_{(n_1,\, n_2)} A_{n_1,\, n_2}(x, y)$ *принадлежит к* $L_{\vec{p}}([0, 2\pi]^2)$ *и* $\|\varphi\|_{\vec{p}} \leqslant C_p M \|f\|_{\vec{p}}$.

Лемма 8. *Справедлива эквиваленция*

$$\left\|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}} s_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}\right\|_{\vec{p}} \approx \left\|\left[\sum_{m_1=\nu_1}^{\infty}\sum_{m_2=\nu_2}^{\infty} 2^{2m_1k_1}2^{2m_2k_2}\Delta^2_{m_1m_2}(x,y)\right]^{\frac{1}{2}}\right\|_{\vec{p}}$$

Лемма 9. [9]. *Пусть* $f(x)\in L_p$, $1<p<\infty$, $f\sim\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\cos\nu x$, $a_\nu\downarrow 0$.
Тогда:

$$\omega_k\left(f,\ \frac{1}{n}\right)_p \approx \frac{1}{n^k}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^p\,\nu^{(k+1)p-2}\right\}^{\frac{1}{p}}+\left\{\sum_{\nu=n+1}^{\infty}a_\nu^p\nu^{p-2}\right\}^{\frac{1}{p}}$$

Лемма 10. [9]. *Пусть* $f(x)\in L_p$, $1\leqslant p<\infty$, $f\sim\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu\cos\nu x$, $a_\nu=a_\nu'$, *для* $\nu=2^n$ *и* $a_\nu=0$, *для* $\nu\neq 2^n$.
Тогда:

$$\omega_k\left(f,\ \frac{1}{n}\right)\approx\frac{1}{n^k}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu^2\nu^{2k_1}\right\}^{\frac{1}{2}}+\left\{\sum_{\nu=n+1}^{\infty}a_\nu^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма 11. *Если* $f\in \overset{\circ}{L}_{\vec{p}}([0,2\pi]^2)$, $1\leqslant p_i<\infty$, $i=1,\ 2$ *и*

$$\int_1^{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\alpha(t_1,\ t_2)\,\omega^{\theta_1}_{k_1k_2}(f,\ t_1,\ t_2)_{\vec{p}}\,dt_1\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}dt_2<\infty$$

то

$$\int_1^{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\alpha(t_1,\ t_2)\,\omega^{\theta_1}_{k_1}(f,\ t_1)_{\vec{p}}\,dt_1\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}dt_2<\infty,$$

$$\int_0^{2\pi}\left\{\int_1^{2\pi}\alpha(t_1,\ t_2)\,\omega^{\theta_1}_{k_2}(f,\ t_2)_{\vec{p}}\,dt_1\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}dt_2<\infty.$$

Через $\Sigma SB^\circ(\vec{p},\ \vec{\theta},\ \alpha)$ обозначим множество функций $f(x,\ y)\in L_{\vec{p}}([0,\ 2\pi]^2)$ таких, что

$$I_4^{\theta_2}=\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\alpha(t_1,\ t_2)\,\omega^{\theta_1}_{k_1k_2}(F,\ t_1,\ t_2)_{\vec{p}}\,dt_1\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}dt_2<\infty$$

$$I_5^{\theta_2}=\int_1^{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi}\alpha(t_1,\ t_2)\,\omega^{\theta_1}_{k_1}(F_1,\ t_1)_{\vec{p}}\,dt_1\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}dt_2<\infty$$

$$I_6^{\theta_2}=\int_0^{2\pi}\left\{\int_1^{2\pi}\alpha(t_1,\ t_2)\,\omega^{\theta_2}_{k_2}(F_2,\ t_2)_{\vec{p}}\,dt_1\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}dt_2<\infty$$

где F, F_1, F_2 функции об которых говорит лемма 3.

Лемма 12. *Классы функций* $SB(\vec{p},\ \vec{\theta},\ \alpha)$ *и* $\Sigma SB^\circ(\vec{p},\ \vec{\theta},\ \alpha)$ *совпадают.*

§ 3. Доказательство теорем 1 и 2

Доказательство теоремы 1.

а) Пусть $f\in SW(\vec{p}, \vec{\theta}, \alpha)$ и $f\sim\sum\limits_{\nu_1=0}^{\infty}\sum\limits_{\nu_2=0}^{\infty}A_{\nu_1\nu_2}(x, y)$. Тогда существует функция $g\in L_{\vec{p}}([0, 2\pi]^2)$ такая, что $g\sim\sum\limits_{\nu_1=0}^{\infty}\sum\limits_{\nu_2=0}^{\infty}\beta(\nu_1, \nu_2)A_{\nu_1\nu_2}(x, y)$. Классы $SB(\vec{p}, \vec{\theta}, \alpha)$ и $\Sigma SB^{\circ}(\vec{p}, \vec{\theta}, \alpha)$ совпадают (лемма 12), поэтому для доказательства утверждения а) теоремы 1. надо доказать, что из $f\in SW(\vec{p}, \vec{\theta}, \alpha)$ следует $I_4^{\theta_2}<\infty$, $I_5^{\theta_2}<\infty$, $I_6^{\theta_2}<\infty$, где I_4, I_5, I_6 определены выше.

Обозначим

$$\mu(0, t_2)=\int\limits_1^{2\pi}\alpha(t_1, t_2)\,dt_1,\quad \mu(\nu, t_2)=\int\limits_{\frac{1}{2^\nu}}^{\frac{2}{2^\nu}}\alpha(t_1, t_2)\,dt_1,\quad \nu\geqslant 1.$$

Учитывая, что $F=F-U_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}+T_{2^{\nu_1}}+Q_{2^{\nu_2}}+s_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}$ где U, T, Q определены выше, имеем:

$$I_4^{\theta_2}\approx\int\limits_0^{2\pi}\left\{\int\limits_0^{2\pi}\alpha(t_1, t_2)\,\omega_{k_1k_2}^{\theta_1}(F, t_1, t_2)_{\vec{p}}\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}dt_2\approx$$

$$\approx\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{1}{2^{\nu_2}}}^{\frac{2}{2^{\nu_2}}}\left\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\mu(\nu_1, t_2)\,\omega_{k_1k_2}^{\theta_1}\left(F, \frac{1}{2^{\nu_1}}, \frac{1}{2^{\nu_2}}\right)_{\vec{p}}\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}dt_2=$$

$$=\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{1}{2^{\nu_2}}}^{\frac{2}{2^{\nu_2}}}\left\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\mu(\nu_1, t_2)\,\omega_{k_1k_2}^{\theta_1}\left(F-U_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}+T_{2^{\nu_1}}+Q_{2^{\nu_2}}+s_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}},\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{1}{2^{\nu_1}}, \frac{1}{2^{\nu_2}}\right)_{\vec{p}}\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}dt_2\leqslant J_1+J_2+J_3+J_4$$

оценим отдельно полученные интегралы.

$$J_1=\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{1}{2^{\nu_2}}}^{\frac{2}{2^{\nu_2}}}\left\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\mu(\nu_1, t_2)\,\omega_{k_1k_2}^{\theta_1}\left(F-U_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}, \frac{1}{2^{\nu_1}}, \frac{1}{2^{\nu_2}}\right)_{\vec{p}}\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}dt_2$$

Из свойств модуля гладкости следует, что

$$\omega_{k_1 k_2}\left(F-U_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}, \frac{1}{2^{\nu_1}}, \frac{1}{2^{\nu_2}}\right)_{\vec{p}} \leqslant \| F-U_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}} \|_{\vec{p}}, \text{ и}$$

$$J_1 \geqslant \sum_{\nu_2=0}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^{\nu_2}}}^{\frac{2}{2^{\nu_2}}} \left\{ \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \mu(\nu_1, t_2) \left(\int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\sum_{m_1=\nu_1}^{\infty} \sum_{m_1=\nu_2}^{\infty} \Delta^2_{m_1 m_2}(x, y) \right]^{\frac{p_1}{2}} dx \right\}^{\frac{p_2}{p_1}} dy \right)^{\frac{\theta_1}{p_2}} \right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} dt_2 .$$

Применяя неравенство Минковского для $\frac{\theta_1}{p_2}$, $\frac{\theta_1}{p_1}$, $\frac{\theta_2}{p_2}$, $\frac{\theta_2}{p_1}$ последовательно, получим

$$J_1 \leqslant \left(\int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\sum_{\nu_2=0}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^{\nu_2}}}^{\frac{2}{2^{\nu_2}}} \left(\sum_{\nu_1=0}^{\infty} \mu(\nu_1, t_2) \left[\sum_{m_1=\nu_1}^{\infty} \sum_{m_2=\nu_2}^{\infty} \Delta^2_{m_1 m_2}(x, y) \right]^{\frac{\theta_1}{2}} \right)^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} dt_2 \right]^{\frac{p_1}{\theta_2}} dx \right\}^{\frac{p_2}{p_1}} dy .$$

Сумму $S_{\nu_1\nu_2}(x, y) = \sum_{\nu_2=0}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^{\nu_2}}}^{\frac{2}{2^{\nu_2}}} \left\{ \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \mu(\nu_1, t_2) \left[\sum_{m_1=\nu_1}^{\infty} \sum_{m_2=\nu_2}^{\infty} \Delta^2_{m_1 m_2}(x, y) \right]^{\frac{\theta_1}{2}} \right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} dt_2$

оценим применяя неравенство Минковского для $\frac{\theta_1}{2}$ и $\frac{\theta_2}{2}$. Получим, что

$$S_{\nu_1\nu_2}(x, y) = \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \Delta^2_{m_1 m_2}(x, y) \left\{ \sum_{\nu_2=0}^{m_2} \int_{\frac{1}{2^{\nu_2}}}^{\frac{2}{2^{\nu_2}}} \left[\sum_{\nu_1=0}^{m_1} \int_{\frac{1}{2^{\nu_1}}}^{\frac{2}{2^{\nu_1}}} \alpha(t_1, t_2)\, dt_1 \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} dt_2 \right\}^{\frac{2}{\theta_2}} \right)^{\frac{\theta_2}{2}} =$$

$$= \left\{ \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \Delta^2_{m_1 m_2}(x, y)\, \beta_0^2(2^{m_1}, 2^{m_2}) \right\}^{\frac{\theta_2}{2}}$$

где

$$\beta_0^{\theta_2}(2^{m_1}, 2^{m_2}) = \int_{\frac{1}{2^{m_2}}}^{2\pi} \left\{ \int_{\frac{1}{2^{m_1}}}^{2\pi} \alpha(t_1, t_2)\, dt \right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} dt_2 .$$

Тогда:

$$J_1 \leqslant \left(\int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \beta_0^2(2^{m_1}, 2^{m_2})\, \Delta^2_{m_1 m_2}(x, y) \right]^{\frac{p_1}{2}} dx \right\}^{\frac{p_2}{p_1}} dy \right)^{\frac{\theta_2}{p_2}} =$$

$$= \left\| \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \Delta^2_{m_1 m_2}(x, y)\, \beta_0^2(2^{m_1}, 2^{m_2}) \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_{\vec{p}}^{\theta_2} .$$

Применяя леммы 5 и 8, получим, что

$$J_2=\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{1}{2^{\nu_2}}}^{\frac{2}{2^{\nu_2}}}\left\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\mu(\nu_1,\ t_2)\,\omega_{k_2k_2}^{\theta_1}\left(T_{2^{\nu_1}},\ \frac{1}{2^{\nu_1}},\ \frac{1}{2^{\nu_2}}\right)_{\vec{p}}\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}dt_2\approx$$

$$\approx\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{1}{2^{\nu_2}}}^{\frac{2}{2^{\nu_2}}}\left\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\frac{\mu(\nu_1,\ t_2)}{2^{\nu_1k_1\theta_1}}\left\|\frac{\partial^{k_1}}{\partial x^{k_1}}T_{2^{\nu_1}}\right\|_{\vec{p}}^{\theta_1}\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}dt_2\approx$$

$$\approx\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{1}{2^{\nu_2}}}^{\frac{2}{2^{\nu_2}}}\left\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\frac{\mu(\nu_1,\ t_2)}{2^{\nu_1k_1\theta_1}}\left\|\left[\sum_{m_1=0}^{\nu_1}\sum_{m_2=\nu_2}^{\infty}2^{2m_1k_1}\Delta_{m_1m_2}^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\|^{\theta_1}\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}dt_2$$

откуда, применяя неравенство Минковского, получим:

$$J_2\leqslant\left(\int\limits_0^{2\pi}\left\{\int\limits_0^{2\pi}\left[\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\Delta_{m_1m_2}^2(x,\ y)\,\beta_1^2(2^{m_1},\ 2^{m_2})\right]^{\frac{p_1}{2}}dx\right\}^{\frac{p_2}{p_1}}dy\right)^{\frac{\theta_2}{p_2}}=$$

$$=\left\|\left[\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\Delta_{m_1m_2}^2\beta_1^2(2^{m_1},\ 2^{m_2})\right]^{\frac{1}{2}}\right\|_{\vec{p}}^{\theta_2},$$

где

$$\beta_1^{\theta_2}(2^{m_1},\ 2^{m_2})=2^{m_1k_1\theta_2}\int\limits_{\frac{1}{2^{m_2}}}^{2\pi}\left\{\int\limits_0^{\frac{1}{2^{m_1}}}\alpha(t_1,\ t_2)\,t_1^{k_1\theta_1}\,dt_1\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}dt_2.$$

Аналогично доказывается, что

$$J_3=\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{1}{2^{\nu_2}}}^{\frac{2}{2^{\nu_2}}}\left\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\mu(\nu_1,\ t_2)\,\omega_{k_1k_2}^{\theta_1}\left(Q_{2^{\nu_2}},\ \frac{1}{2^{\nu_1}},\ \frac{1}{2^{\nu_2}}\right)_{\vec{p}}\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}dt_2\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\left[\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\Delta_{m_1m_2}^2\beta_2^{\theta_2}(2^{m_1},\ 2^{m_2})\right]^{\frac{1}{2}}\right\|_{\vec{p}}^{\theta_2}$$

где

$$\beta_2^{\theta_2}(2^{m_1}, 2^{m_2}) = 2^{m_2 k_2 \theta_2} \int\limits_0^{\frac{1}{2^{m_2}}} \left\{ \int\limits_{\frac{1}{2^{m_1}}}^{2\pi} \alpha(t_1, t_2)\, t_2^{k_2\theta_1} dt_1 \right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} dt_2.$$

Рассмотрим, наконец, интеграл J_4,

$$J_4 = \sum_{\nu_2=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{1}{2^{\nu_2}}}^{\frac{2}{2^{\nu_2}}} \left\{ \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \mu(\nu_1, t_2)\, \omega_{k_1 k_2}^{\theta_1}\left(s_{2^{\nu_1} 2^{\nu_2}}, \frac{1}{2^{\nu_1}}, \frac{1}{2^{\nu_2}}\right)_{\vec{p}} \right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} dt_2.$$

Применяя леммы 5 и 8, а потом неравенство Минковского, получим:

$$J_4 \leqslant \sum_{\nu_2=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{1}{2^{\nu_2}}}^{\frac{2}{2^{\nu_2}}} \left\{ \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \frac{\mu(\nu_1, t_2)}{2^{\nu_1 k_1 \theta_1} 2^{\nu_2 k_2 \theta_1}} \left\| \frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1} \partial y^{k_2}} s_{2^{\nu_1} 2^{\nu_2}} \right\|_{\vec{p}}^{\theta_1} \right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} dt_2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu_2=0}^{\infty} \int\limits_{\frac{1}{2^{\nu_2}}}^{\frac{2}{2^{\nu_2}}} \left\{ \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \frac{\mu(\nu_1, t_2)}{2^{\nu_1 k_1 \theta_1} 2^{\nu_2 k_2 \theta_1}} \left[\int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^{2\pi} \left[\sum_{m_1=\nu_1}^{\infty} \sum_{m_2=\nu_2}^{\infty} 2^{2 m_1 k_1} 2^{2 m_2 k_2} \Delta_{m_1 m_2}^2 \right]^{\frac{p_1}{2}} dx \right)^{\frac{p_2}{p_1}} dy \right]^{\frac{\theta_1}{p_2}} \right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} dt_2$$

$$\leqslant \left(\int\limits_0^{2\pi} \left\{ \int\limits_0^{2\pi} \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \beta_3^2(2^{m_1}, 2^{m_2})\, \Delta_{m_1 m_2}^2(x, y) \right]^{\frac{p_1}{2}} dx \right\}^{\frac{p_2}{p_1}} dy \right)^{\frac{\theta_2}{p_2}} =$$

$$= \left\| \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \Delta_{m_1 m_2}^2 \beta_3^2(2^{m_1}, 2^{m_2}) \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_{\vec{p}}^{\theta_2},$$

где

$$\beta_3^{\theta_2}(2^{m_1}, 2^{m_2}) = 2^{m_1 k_1 \theta_2} 2^{m_2 k_2 \theta_2} \int\limits_0^{\frac{1}{2^{m_2}}} \left\{ \int\limits_0^{\frac{1}{2^{m_1}}} \alpha(t_1, t_2)\, t_1^{k_1\theta_1} t_2^{k_2\theta_1} dt_1 \right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} dt_2.$$

Суммируя оценки для J_1, J_2, J_3, J_4, получим:

$$I_4^{\theta_2} \leqslant \left(\int\limits_0^{2\pi} \left\{ \int\limits_0^{2\pi} \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} \Delta_{m_1 m_2}^2(x, y)\, \beta^2(2^{2m_1}, 2^{m_2}) \right]^{\frac{p_1}{2}} dx \right\}^{\frac{p_2}{p_1}} dy \right)^{\frac{\theta_2}{p_2}} =$$

$$= \left\| \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \Delta_{m_1 m_2}^2 \beta^2(2^{m_1}, 2^{m_2}) \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_{\vec{p}}^{\theta_2},$$

где

$$\beta^{\theta_2}(2^{m_1},\ 2^{m_2})=\beta_0^{\theta_2}(2^{m_1},\ 2^{m_2})+\beta_1^{\theta_2}(2^{m_1},\ 2^{m_2})+\beta_2^{\theta_2}(2^{m_1},\ 2^{m_2})+\beta_3^{\theta_2}(2^{m_1},\ 2^{m_2})$$

Применяя лемму 6 (Литтлвуда-Пэли), утверждаем, что

$$I_4^{\theta_2}\ll\|\psi\|_{\vec{p}}^{\theta_2}\ \text{ где }\ \psi(x,\ y)\sim\sum_{\nu_1=1}^{\infty}\sum_{\nu_2=1}^{\infty}\beta(2^{m_1},\ 2^{m_2})A_{\nu_1\nu_2}(x,\ y).$$

Последовательность чисел $\lambda_{\nu_1\nu_2}=\beta(2^{m_1},\ 2^{m_2})[\beta(\nu_1,\ \nu_2)]^{-1}$ ограничена и монотонна и, поэтому, удовлетворяет условиям леммы 7 (Марцинкевича). Значит, если

$$G\sim\sum_{\nu_1=1}\sum_{\nu_2=1}\beta(\nu_1,\nu_2)A_{\nu_1\nu_2}(x,\ y),\qquad\text{то}\qquad\|\psi\|_{\vec{p}}\ll\|G\|_{\vec{p}},$$

и, значит,

$$I_4\ll\|G\|_{\vec{p}}<\infty,\quad\text{т.е.}\quad I_4<\infty.$$

Тем же способом доказывается, что

$$I_5\ll\|G_1\|_{\vec{p}}<\infty\quad\text{и}\quad I_6\ll\|G_2\|_{\vec{p}}<\infty.$$

Утверждение а) Теоремы 1 доказано.

б) Пусть $f\in SB(\vec{p},\ \vec{\theta},\ \alpha)$. Учитывая лемму 12 надо доказать существование функций G, G_1, G_2 из леммы 3, имеющих ряды Фурье:

$$G\sim\sum_{\nu_1=1}^{\infty}\sum_{\nu_2=1}^{\infty}\beta(\nu_1,\ \nu_2)A_{\nu_1\nu_2}(x,y),\quad G_1\sim\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta(\nu,\ 0)A_{\nu 0}(x,y),$$

$$G_2\sim\sum_{\nu=1}^{\infty}\beta(0,\nu)A_{0\nu}(x,\ y).$$

Мы докажем, сначала, что существует функция $\psi(x,y)\in L_{\vec{p}}([0,\ 2\pi]^2)$,

$$\psi\sim\sum_{\nu_1=1}^{\infty}\sum_{\nu_2=1}^{\infty}\beta(2^{m_1},\ 2^{m_2})A_{\nu_1\nu_2}(x,\ y).$$

Рассмотрим интеграл J:

$$J=\left\|\left[\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\beta^2(2^{m_1},\ 2^{m_2})\,\Delta_{m_1m_2}^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\|_{\vec{p}}=$$

$$=\left\|\left[\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\Delta_{m_1m_2}^2\left\{\beta^{\theta_2}(2^{m_1},\ 2^{m_2})\right\}^{\frac{2}{\theta_2}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\|_{\vec{p}}=$$

$$=\left\|\left[\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_1=0}^{\infty}\Delta_{m_1m_2}^2\left(\beta_0^{\theta_2}+\beta_1^{\theta_2}+\beta_2^{\theta_2}+\beta_3^{\theta_2}\right)^{\frac{2}{\theta_2}}\right]^{\frac{1}{2}}\right\|_{\vec{p}}\approx$$

$$\approx\left\|\left[\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}\Delta_{m_1m_2}^2\left(\beta_0^2+\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\|_{\vec{p}}\leqslant$$

$$\leqslant \left\| \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \Delta^2_{m_1 m_2} \beta_0^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_{\vec{p}} + \left\| \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \Delta^2_{m_1 m_2} \beta_1^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_{\vec{p}} +$$

$$+ \left\| \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \Delta^2_{m_1 m_2} \beta_2^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_{\vec{p}} + \left\| \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \Delta^2_{m_1 m_2} \beta_3^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_{\vec{p}} = J_7 + J_8 + J_9 + J_{10}.$$

Теперь оценим интеграл J_{10}

$$J_{10} = \left\| \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \beta_3^2 (2^{m_1}, 2^{m_2}) \Delta^2_{m_1 m_2} \right]^{\frac{1}{2}} \right\|_{\vec{p}} =$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} S^{\frac{1}{2}}_{m_1 m_2} (x, y)\, dx \right\}^{\frac{p_2}{p_1}} dy \right)^{\frac{1}{p_2}},$$

где

$$S_{m_1 m_2}(x, y) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \beta_3^2 (2^{m_1}, 2^{m_2}) \Delta^2_{m_1 m_2}(x, y) =$$

$$= \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} 2^{2 m_1 k_1} 2^{2 m_2 k_2} \Delta^2_{m_1 m_2} \left[\int_0^{\frac{1}{2^{m_2}}} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2^{m_1}}} \alpha(t_1, t_2)\, t_1^{k_1 \theta_1} t_2^{k_2 \theta_1} dt_1 \right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} dt_2 \right]^{\frac{2}{\theta_2}} =$$

$$= \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} 2^{2 m_1 k_1} 2^{2 m_2 k_2} \Delta^2_{m_1 m_2} \left\{ \sum_{\nu_2=m_2}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^{\nu_2}}}^{\frac{2}{2^{\nu_2}}} \left[\sum_{\nu_1=m_1}^{\infty} \frac{\mu(\nu_1, t_2)}{2^{\nu_1 k_1 \theta_1} 2^{\nu_2 k_2 \theta_1}} \right]^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} dt_2 \right\}^{\frac{2}{\theta_2}}.$$

Применяя неравенство Минковского для $\frac{2}{\theta_2}$ и $\frac{2}{\theta_1}$, получим:

$$S_{m_1 m_2}(x, y) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{\nu_2=0}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^{\nu_2}}}^{\frac{2}{2^{\nu_2}}} \left\{ \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \frac{\mu(\nu_1, t_2)}{2^{\nu_1 k_1 \theta_1} 2^{\nu_2 k_2 \theta_1}} \left[\sum_{m_1=0}^{\nu_1} \sum_{m_2=0}^{\nu_2} 2^{2 m_1 k_1} 2^{2 m_2 k_2} \Delta^2_{m_1 m_2}(x, y) \right]^{\frac{\theta_1}{2}} \right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} dt_2 \right)^{\frac{2}{\theta_2}}.$$

Применяя полученную оценку и неравенство Минковского для $\frac{p_1}{\theta_2}$, $\frac{p_1}{\theta_1}$, $\frac{p_2}{\theta_2}$, $\frac{p_1}{\theta_1}$, последовательно, будем иметь:

$$J_{10} \leqslant \left(\sum_{\nu_2=0}^{\infty} \int_{\frac{1}{2^{\nu_2}}}^{\frac{2}{2^{\nu_2}}} \left\{ \sum_{\nu_1=0}^{\infty} \frac{\mu(\nu_1, t_2)}{2^{\nu_1 k_1 \theta_1} 2^{\nu_2 k_2 \theta_1}} \left\| P_{\nu_1 \nu_2}(x, y) \right\|_{\vec{p}}^{\theta_1} \right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}} dt_2 \right)^{\frac{1}{\theta_2}},$$

где

$$P_{\nu_1\nu_2}(x, y)=\left[\sum_{m_1=0}^{\nu_1}\sum_{m_2=0}^{\nu_2} 2^{2m_1k_1}2^{2m_2k_2}\Delta^2_{m_1m_2}(x, y)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Применяя лемму 8, а потом лемму 5, получим:

$$J_{10}\leqslant\left(\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{1}{2^{\nu_2}}}^{\frac{2}{2^{\nu_2}}}\left\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\frac{\mu(\nu_1, t_2)}{2^{\nu_1k_1\theta_1}2^{\nu_2k_2\theta_1}}\left\|\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial y^{k_2}}s_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}\right\|^{\theta_1}_{\vec{p}}\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}dt_2\right)^{\frac{1}{\theta_2}}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{1}{2^{\nu_2}}}^{\frac{2}{2^{\nu_2}}}\left\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\mu(\nu_1, t_2)\,\omega^{\theta_1}_{k_1k_2}\left(s_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}, \frac{1}{2^{\nu_1}}, \frac{1}{2^{\nu_2}}\right)_{\vec{p}}\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}dt_2\right)^{\frac{1}{\theta_2}}.$$

Так как

$$\omega_{k_1k_2}\left(s_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}, \frac{1}{2^{\nu_1}}, \frac{1}{2^{\nu_2}}\right)_{\vec{p}}\leqslant\omega_{k_1k_2}\left(F, \frac{1}{2^{\nu_1}}, \frac{1}{2^{\nu_2}}\right)_{\vec{p}}+$$

$$+\omega_{k_1k_2}\left(F-s_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}, \frac{1}{2^{\nu_1}}, \frac{1}{2^{\nu_1}}\right)_{\vec{p}}\leqslant\omega_{k_1k_2}\left(F, \frac{1}{2^{\nu_1}}, \frac{1}{2^{\nu_2}}\right)_{\vec{p}}+$$

$$+Y_{2^{\nu_1}2^{\nu_2}}(f)_{\vec{p}}\leqslant\omega_{k_1k_2}\left(F, \frac{1}{2^{\nu_1}}, \frac{1}{2^{\nu_2}}\right)_{\vec{p}},$$

то,

$$J_{10}\leqslant\left(\sum_{\nu_2=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{1}{2^{\nu_2}}}^{\frac{2}{2^{\nu_2}}}\left\{\sum_{\nu_1=0}^{\infty}\int\limits_{\frac{1}{2^{\nu_1}}}^{\frac{2}{2^{\nu_1}}}\alpha(t_1, t_2)\,\omega^{\theta_1}_{k_1k_2}\left(F, \frac{1}{2^{\nu_1}}, \frac{1}{2^{\nu_2}}\right)_{\vec{p}}\right\}^{\frac{\theta_2}{\theta_1}}dt_2\right)^{\frac{1}{\theta_2}}\approx I_4<\infty.$$

Учитывая леммы 2 и 4 можно доказать, что $J_7\leqslant I_4<\infty$, $J_8\leqslant I_4<\infty$, $J_9\leqslant I_4<\infty$. Из полученных оценок следует, что $J<\infty$, а отсюда, применяя теорему Литтлвуда-Пэли, получим, что $\|\psi\|_{\vec{p}}<\infty$ и $\psi\in L_{\vec{p}}([0, 2\pi]^2)$.

Числа $\lambda_{\nu_1\nu_2}=\beta(\nu_1, \nu_2)[\beta(2^{m_1}, 2^{m_i})]^{-1}$, $2^{m_i}\leqslant\nu_i<2^{m_i+1}$, $i=1, 2$ удовлетворяют условиям леммы Марцинкевича и, значит, существует функция

$$G\in L_{\vec{p}}([0, 2\pi]^2),\quad \|G\|_{\vec{p}}\leqslant\|\psi\|_{\vec{p}},\quad G\sim\sum_{\nu_1=1}^{\infty}\sum_{\nu_2=1}^{\infty}\beta(\nu_1, \nu_2)A_{\nu_1\nu_2}(x, y).$$

Тем же способом можно доказать существование функций G_1 и G_2. Утверждение б) теоремы 1 этим доказано.

Доказательство теоремы 2.

а) Обозначим:

$$\eta(0, 0)=\int_1^{2\pi}\int_1^{2\pi}\alpha(t_1, t_2)\,dt_1\,dt_2, \quad \eta(\nu, 0)=\int_{\frac{1}{\nu+1}}^{\frac{1}{\nu}}\int_1^{2\pi}\alpha(t_1, t_2)\,dt_1\,dt_2, \quad \nu\geqslant 1,$$

$$\eta(\nu_1, \nu_2)=\int_{\frac{1}{\nu_1+1}}^{\frac{1}{\nu_1}}\int_{\frac{1}{\nu_2+1}}^{\frac{1}{\nu_2}}\alpha(t_1, t_2)\,dt_1\,dt_2, \quad \nu_1\geqslant 1, \quad \nu_2\geqslant 1.$$

Рассмотрим интеграл J_1:

$$J_1=\int_0^1\int_0^1\alpha(t_1\ t_2)\,\omega_{k_1 k_2}^p(F, t_1, t_2)_p\,dt_1\,dt_2\approx\sum_{\nu_1=1}^{\infty}\sum_{\nu_2=1}^{\infty}\eta(\nu_1, \nu_2)\,\omega_{k_1 k_2}^p\left(F, \frac{1}{\nu_1}, \frac{1}{\nu_2}\right)_p.$$

Если $f(x, y)\in\mathcal{M}$, то $f(x, y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$, и, тогда

$$\omega_{k_1 k_2}(f, t_1, t_2)_p=\omega_{k_1}(f_1, t_1)_p\cdot\omega_{k_2}(f, t_2)_p.$$

Аналогичное замечание справедливо и для функции F из леммы 3. Применяя лемму 9, простыми вычислениями получим, что

$$J_1\approx\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}a_{n_2}^p b_{n_2}^p n_1^{p-2} n_2^{p-2}\left\{n_1^{k_1 p} n_2^{k_2 p}\int_0^{\frac{1}{n_1}}\int_0^{\frac{1}{n_2}}\alpha(t_1, t_2)\,t_1^{k_1 p} t_1^{k_2 p}\,dt_1\,dt_2+\right.$$

(1)

$$+n_1^{k_1 p}\int_0^{\frac{1}{n_1}}\int_{\frac{1}{n_2}}^1\alpha(t_1, t_2)\,t_1^{k_1 p}\,dt_1\,dt_2+n_2^{k_2 p}\int_{\frac{1}{n_1}}^1\int_0^{\frac{1}{n_2}}\alpha(t_1, t_2)\,t_2^{k_2 p}\,dt_1\,dt_2+$$

$$+\int_{\frac{1}{n_1}}^1\int_{\frac{1}{n_2}}^1\alpha(t_1\ t_2)\,dt_1\,dt_2.$$

Оценим, теперь, интеграл

$$J_2=\int_0^1\int_1^{2\pi}\alpha(t_1, t_2)\,\omega_{k_1 k_2}^p(F, t_1, t_2)_p\,dt_1\,dt_2$$

Так как для $t_2 \in (1, 2\pi)$, $\omega_{k_1 k_2}(F, t_1, t_2)_p \approx \omega_{k_1}(F, t_1)_p$, то применяя лемму 9, получим:

$$J_2 \approx \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \eta(\nu_1, 0)\, \omega_{k_1}^p \left(F, \frac{1}{\nu_1}\right)_p \approx \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \eta(\nu_1, 0) \left\{ \frac{1}{\nu_1^{k_1 p}} \sum_{n_1=1}^{\infty} a_{n_1}^p\, n_1^{(k_1+1)p-2} + \right.$$

$$\left. + \sum_{n_1=\nu_1+1}^{\infty} a_{n_1}^p\, n_1^{p-2} \right\} = \sum_{n_1=1}^{\infty} a_{n_1}^p\, n_1^{p-2}\, n_1^{k_1 p} \sum_{\nu_1=n_1}^{\infty} \frac{\eta(\nu_1, 0)}{\nu_1^{k_1 p}} +$$

$$+ \sum_{n_1=1}^{\infty} a_{n_1}^p\, n_1^{p-2} \sum_{\nu_1=1}^{n_1-1} \eta(\nu_1, 0).$$

Заменяя $\eta(\nu_1, 0)$ и учитывая сходимость ряда $\sum\limits_{n_2=1}^{\infty} b_{n_2}^p\, n_2^{p-2}$, получим:

$$I_2 \approx \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} a_{n_1}^p\, b_{n_2}^p\, n_1^{p-2}\, n_2^{p-2} \left\{ n_1^{k_1 p} \int_0^{\frac{1}{n_1}} \int_1^{2\pi} \alpha(t_1, t_2)\, t_1^{k_1 p}\, dt_1\, dt_2 + \right.$$

(2)

$$\left. + \int_{\frac{1}{n_1}}^{1} \int_1^{2\pi} \alpha(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2 \right\}.$$

Аналогичым способом получим, что

$$J_3 = \int_1^{2\pi} \int_0^1 \alpha(t_1, t_2)\, \omega_{k_1 k_2}^p(F, t_1, t_2)_p\, dt_1\, dt_2 \approx$$

$$\approx \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} a_{n_1}^p\, b_{n_2}^p\, n_1^{p-2}\, n_2^{p-2} \left\{ n_2^{k_2 p} \int_1^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{n_2}} \alpha(t_1, t_2)\, t_2^{k_2 p}\, dt_1\, dt_2 + \right.$$

(3)

$$\left. + \int_1^{2\pi} \int_{\frac{1}{n_2}}^{1} \alpha(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2 \right\}.$$

и

$$J_4 = \int_1^{2\pi} \int_1^{2\pi} \alpha(t_1, t_2)\, \omega_{k_1 k_2}^p(F, t_1, t_2)_p\, dt_1\, dt_2 \approx$$

(4)

$$\approx \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} a_{n_1}^p\, b_{n_2}^p\, n_1^{p-2}\, n_2^{p-2} \int_1^{2\pi} \int_1^{2\pi} \alpha(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2.$$

Из (1), (2), (3) и (4), следует, что

$$I_4^p=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha(t_1,\ t_2)\,\omega_{k_1k_2}^p(F,\ t_1,\ t_2)_p\,dt_1\,dt_2\approx$$

$$\approx\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}a_{n_1}^p\,b_{n_2}^p\,n_1^{p-2}\,n_2^{p-2}\,\beta^p(n_1\,n_2)\equiv S.$$

Пусть $p\geqslant 2$ и $f\in SB(p,\ p,\ \alpha)$. Тогда $I_4^p<\infty$, и, значит $S<\infty$. Применяя теорему Пэги [10] заключаем, что существует функция

$$G\in L_p([0,\ 2\pi]^2),\ G\sim\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}a_{n_1}\,b_{n_2}\,\beta(n_1,\ n_2)\cos n_1 x\cos n_2 y$$

и

$$\|G\|_p\leqslant I_4<\infty,\quad \text{т.е,}\quad F\in SW(p,\ p,\ \alpha).$$

Аналогичным образом можно доказать, что для $p\geqslant 2$, F_1 и F_2 также принадлежат классу $SW(p,\ p,\ \alpha)$, Этим доказано, что если

$$f\in\mathcal{M}\cap SB(p,\ p,\ \alpha)\ \text{ и }\ p\geqslant 2,\ \text{ то }\ f\in\mathcal{M}\cap SW(p,\ p,\ \alpha),$$

т.е.

(5) $$\mathcal{M}\cap SB(p,\ p,\ \alpha)\subset\mathcal{M}\cap SW(p,\ p,\ \alpha).$$

Из теоремы 1 а) вытекает обратное включение:

(6) $$\mathcal{M}\cap SW(p,\ p,\ \alpha)\subset\mathcal{M}\cap SB(p,\ p,\ \alpha)$$

Из (5) и (6) следует утверждение а) T_2 для $p\geqslant 2$.

Пусть $p\leqslant 2$ и $f\in\mathcal{M}\cap SW(p,\ p,\ \alpha)$.

Тогда, из определения класса $SW(p,\ p,\ \alpha)$ следует, что существует функция $g\in L_p([0,\ 2\pi]^2)$, $g\sim\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}a_{n_1}\,b_{n_2}\,\beta(n_1,\ n_2)\cos n_1 x\,\cos n_2 y$. Применяя теорему Пэли, получим, что $S<\infty$, и, значит, $I_4^p<\infty$. Аналогично, $I_5^p<\infty$ и $I_6^p<\infty$, т.е. $f\in\Sigma SB^{\circ}(p,\ p,\ \alpha)$. Учитывая лемму 10, заключаем, что для $p\leqslant 2$

(7) $$\mathcal{M}\cap SW(p,\ p,\ \alpha)\subset\mathcal{M}\cap SB(p,\ p,\ \alpha)$$

Из теоремы 1 б) следует, что для $p\leqslant 2$

(8) $$\mathcal{M}\cap SB(p,\ p,\ \alpha)\subset\mathcal{M}\cap SW(p,\ p,\ \alpha).$$

Из (7) и (8) следует утверждение а) T_2 и для $p\leqslant 2$.

б) Рассмотрим интеграл

$$J_5=\int_0^1\int_0^1\alpha(t_1,\ t_2)\,\omega_{k_1k_2}^2(F,\ t_1,\ t_2)_p\,dt_1\,dt_2\approx\sum_{\nu_1=1}^{\infty}\sum_{\nu_2=1}^{\infty}\eta(\nu_1,\ \nu_2)\,\omega_{k_1k_2}^2\left(F,\ \frac{1}{\nu_1},\ \frac{1}{\nu_2}\right)_p$$

Применяя лемму 8, простыми вычислениями получим, что

$$J_5 \approx \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \sum_{\nu_2=1}^{\infty} a_{n_1}^2 b_{n_2}^2 \left\{ n_1^{2k_1} n_2^{2k_2} \int_0^{\frac{1}{n_1}} \int_0^{\frac{1}{n_2}} \alpha(t_1, t_2) t_1^{2k_1} t_2^{2k_2} dt_1 dt_2 + \right.$$

$$+ n_1^{2k_1} \int_0^{\frac{1}{n_1}} \int_{\frac{1}{n_2}}^{1} \alpha(t_1, t_2) t_1^{2k_1} dt_1 dt_2 +$$

$$+ n_2^{2k_2} \int_{\frac{1}{n_1}}^{1} \int_0^{\frac{1}{n_1}} \alpha(t_1, t_2) t_2^{2k_2} dt_1 dt_2 + \int_{\frac{1}{n_1}}^{1} \int_{\frac{1}{n_2}}^{1} \alpha(t_1, t_2) dt_1 dt_2 .$$

Тем же способом можно доказать, что, для $t_2 \in (1, 2\pi)$:

$$J_6 = \int_0^1 \int_1^{2\pi} \alpha(t_1, t_2) \omega_{k_1 k_2}^2 (F, t_1, t_2)_p dt_1 dt_2 \approx$$

$$\approx \int_0^1 \int_1^{2\pi} \alpha(t_1, t_2) \omega_{k_1}^2 (F, t_1)_p dt_1 dt_2 \approx$$

$$\approx \sum_{n_1=1}^{\infty} a_{n_1}^2 \left\{ n_1^{2k_1} \int_0^{\frac{1}{n_1}} \int_1^{2\pi} \alpha(t_1, t_2) t_1^{2k_1} dt_1 dt_2 + \int_{\frac{1}{n_1}}^{1} \int_1^{2\pi} \alpha(t_1, t_2) dt_1 dt_2 . \right.$$

Учитываь сходимость ряда $\Sigma b_{n_2}^2$, получим:

$$J_6 \approx \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} a_{n_1}^2 b_{n_2}^2 \left\{ n_1^{2k_1} \int_0^{\frac{1}{n_1}} \int_1^{2\pi} \alpha(t_1, t_2) t_1^{2k_1} dt_1 dt_2 + \int_{\frac{1}{n_1}}^{1} \int_1^{2\pi} \alpha(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right\} .$$

Аналогично

$$J_7 = \int_1^{2\pi} \int_0^1 \alpha(t_1, t_2) \omega_{k_1 k_2}^2 (F, t_1 \ t_2)_p dt_1 dt_2 \approx$$

$$\approx \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} a_{n_1}^2 b_{n_2}^2 \left\{ n_2^{2k_2} \int_1^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{n_2}} \alpha(t_1, t_2) t_2^{2k_2} dt_1 dt_2 + \int_1^{2\pi} \int_{\frac{1}{n_2}}^{1} \alpha(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right\}$$

и

$$J_8 = \int_1^{2\pi} \int_1^{2\pi} \alpha(t_1, t_2) \omega_{k_1 k_2}^2 (F, t_1, t_2)_p \approx$$

$$\approx \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} a_{n_1}^2 b_{n_2}^2 \int_1^{2\pi} \int_1^{2\pi} \alpha(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Суммируя J_5, J_6, J_7, J_8, получим:

(*) $$I_4^2 = J_5 + J_6 + J_7 + J_8 \approx \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} a_{n_1}^2 b_{n_2}^2 \beta^2 (n_1, n_2) \approx \|G\|^2$$

где

$$G \in L_p([0, \pi]^2), \quad G \sim \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} a_{n_1} b_{n_2} \beta(n_1, n_2) \cos n_1 x \cos n_2 y.$$

Из полученного утверждения (*) следует, что если $F \in \mathcal{A} \cap SB(p, 2, \alpha)$, то $F \in \mathcal{A} \cap SW(p, p\,\alpha)$ и наоборот. Аналогичным образом можно доказать, что если $F_i \in \mathcal{A} \cap SB(p, 2, \alpha)$, то $F_i \in \mathcal{A} \cap SW(p, 2, \alpha)$ и наоборот, $i=1, 2$. Учитывая, еще лемму 3, получаем утверждение б) T_2.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Лакович, *О взаимосвязи некоторых классов функций.* Тезисы конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ.

[2] М. К. Потапов, *Изучение некоторых классов функций при помощи приближения „углом“.* Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова 117, (1972).

[3] М. К. Потапов *О вложении и совпадении некоторых классов функций.* Известия АН СССР, серия матем. 33 (1969).

[4] Б. Лакович и М. К. Потапов, *К вопросу о взаимосвязи некоторых классов функций* (в печати).

[5] П. Л. Ульянов, *О некоторых эквивалентных условиях сходимости рядов и интегралов.* Успехи матем. наук, УШ. № 6 (1953).

[6] М. К. Потапов, *Приближение „углом“ и теоремы вложения.* Mathematica balcanica, Belgrad, 1972.

[7] П. И. Лизаркин и С. М. Никольский, *Классификация дифференцируемых функций на основе пространств с доминирующей смешанной производной.* Труды МИАН СССР, 1965, 77, 143.

[8] О. В. Бесов В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Москва, 1975.

[9] М. Бериша и М. К. Потапов, *Модули гладкости и коэффициенты Фурье периодических функций одного переменного* (в печати).

[10] Зигмунд А. В. *Тригонометрические ряды*, Москва 1965.