PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouelle série, tome 27 (41) 1980, pp. 83—90

THÈOREMES DE POINT FIXE DANS LES CÔNES BIEN BASÉS DANS LES ESPACES DE PRÉCHET. (I)

par

Isac, G.

1. Dans l'ouvrage [10], M. A. Krasnoselskii a démontré le théorème suivant:

Théorème Soit E un espace de Banach, $K \subseteq E$ un cône convexe fermé saillant.

Soit $f: K \to K$ un opérateur complet continue tel que $f(o)=0$. On suppose qu'il existe deux nombres réels: $0<r<R$ tels que:

i) $$(\forall \varepsilon>0)\,(\underset{\varepsilon K}{\forall x})\,(0 \leq \| x \| \leq r) \Rightarrow (f(x) \ngeq (1+\varepsilon)\, x)$$

$$(\underset{\varepsilon K}{\forall x})\,(\| x \| > R) \Rightarrow (f(x) \ngeq x)$$

Alors, f a au moins un point fixe $x_0 \in K$ et $x_0 \neq 0$. Plusieurs auteurs ont démontré diverses variantes ou diverses généralisations de ce théorème [1], [2], [4], [5], [6], [7], [8], [12], [14].

Plus précisément, R. D. Nusbaum [12] G. Fournier et H. O. Peitgen [5] ont démontré des variantes asymptotiques de ce thérème dans les espaces de Banach utilisant, la compacité, le degré topologique ou le nombre de Lefschetz.

Dans l'ouvrage [8] J. D. Hamilton a démontré une variante du théorèmè de Krasnoselskii pour les opérateurs A-propres (donc, pas nécessairement compacts) dana les espaces de Banach. Quelques généralisations du théorème de Krasnoselskii dans les espaces de Fréchet ont été démontrées par: J. Bonna [2], P, M. Fitzpatrick et W. P. Petryschyn [4] untilisant aussi le degré topologique. Dans cet ouvrage on démontre quelques variantes du théorème de Krasnoselskii pour les cônes bien basés dans les espaces de Fréchet. Certaines propriétés des cônes bien basés permettent des démonstrations élémentairees sans utiliser le degré topologique ou l'index des points fixes.

Soit $E(\tau)$ un espace vectorriel réel localement convexe. On suppose que la topologie τ est définie par une famille $\{\|_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *sufisante* de semi-normes, c'est-à-dire qui vérifie les propriétés suivantes.

$$s_1)\,(\underset{\varepsilon E}{\forall x})\,(x \neq 0)\,(\underset{\varepsilon A}{\exists \alpha})\,(| x |_\alpha = 0)$$

$$s_2)\,(\underset{\varepsilon A}{\forall \alpha', \alpha''})\,(\underset{\varepsilon A}{\exists \alpha})\,(\underset{\varepsilon E}{\forall x})\,(| x |_{\alpha'}, | x |_{\alpha''} \leq | x |_\alpha)$$

Si l'espace $E(\tau)$ est un espace de Fréchet alors la topologie τ est définie par une famille sufisante dénombrable de semi-normes.

Les notions sur les espaces vectoriels loccalement convexe et sur les cônes convexes se trouvent dans [16], [9], [13].

Soit $K \subset E$ un cône convexe; on dit que l'ensemble B est une *base* pour le cône K si:

b_1) B est un ensemble covexe

b_2) $(\underset{\varepsilon K\setminus\{0\}}{\forall (x)}\ (\underset{\varepsilon R_+\setminus\{0\}}{\exists \lambda}, \text{unique})\ (\underset{\varepsilon B}{\exists b}, \text{unique})\ (x=\lambda\cdot b)$

On dit que l'ensemble convexe $A \subset E$ *engendre* le cône K si: $K = \underset{\lambda\varepsilon R_+}{U} \lambda\cdot A$.
Le cône convexe K s'appelle *bien basé* s'il est engendré par un ensembe *convexe* et *borné* A tel oue $0 \notin \bar{A}$.

Proposition 1 Le cône convexe fermé $K \subset E$ est bien basé, si et seulement s'il existe une fonctionnelle linéaire et continue f tel que:

$$(*) \qquad (\underset{\varepsilon A}{\forall \alpha})\ (\underset{\varepsilon}{\exists \gamma_\alpha}>0)\ (\underset{\varepsilon K}{\forall x})\ (\gamma_\alpha |x|_\alpha \leq f(x))$$

Démonstration Soit K bien basé, alors il existe A convexe, borné tel que:

$$0 \notin \bar{A}, \quad K = \underset{\lambda\varepsilon R_+}{u} \lambda A$$

Un théorème connu de séparation [16] implique qu'il existe une fonctionnelle linéaire et continue f telle que:

1°) $\forall a \varepsilon \bar{A})\ (f(a) > 1)$

2°) $f(0) < 1$

L'ensemble: $B = \{x \varepsilon K | f(x) = 1\}$ est une base pour le cône K. On a: $B \subset M$ co $(\{0\} \cup A)$ parce que: $\forall b \varepsilon B$, $b = (1-\lambda 0 + \lambda a_1$ où $a_1 \varepsilon A$ et $\lambda \varepsilon]0, 1[$ (si $\lambda \geq 1$, on obtient que $f(b) = \lambda f(a_1) > 1$ ce qui est absurd). Comme M est borné il résulte alors que B est aussi borné. Soit $\alpha \varepsilon A$; B étant borné il existe un nombre $\beta_\alpha > 0$ tel que: $(\forall z \varepsilon B)(|z|_\alpha \leq \beta_\alpha)$. Si $x \varepsilon K\setminus\{0\}$ et $|x|_\alpha \neq 0$ il existe $\lambda_x > 0$ tel que $\frac{1}{\lambda_x}\left(\frac{x}{|x|_\alpha}\right) \in B$. Dans ce cas on a: $\left|\frac{1}{\lambda_x}\left(\frac{x}{|\lambda|_\alpha}\right)\right|_\alpha = \frac{1}{\lambda_x} \leq \beta_\alpha$; d'où il résulte: $f\left(\frac{x}{|x|_\alpha}\right) = \lambda_x \geq \frac{1}{\beta_\alpha}$.

Si on met: $\gamma_\alpha = \frac{1}{\beta_\alpha}$ on obtient la relation (*).

La relation (*) est aussi vériffée même si $|x|_\alpha = 0$ parce que par construction f est positive sur le cône K.

On suppose maintenat qu'il existe f, linéaire et continue qui vérifie (*). La relation s_1) implique que f est strictement positive sur le cône K, donc l'ensemble $B=\{x \varepsilon K | f(x)=1\}$ est une base pour le cône K[13].

Come f est continue et le cône K fermé, la base B est fermé et $0 \notin B$. Les relations (*) et s_2) impliquent que B est borné et la proposition est démontrée.

R e m a r q u e Une fonctionnelle $f \varepsilon E'$ qui vérifie la relation (*) s'appelle *uniformément positive sur le cône K.*

Donc, la proposition 1 affirme que le cône convexe K est bien basé si et seulement s'il existe $f \varepsilon E'$ uniformément positive sur K.

P r o p o s i t i o n 2 Soit $E(\tau)$ un espace vectoriel localement-convexe quasi-complet et $K \subset E$ un cône convexe.

i) $K \cap (-K)=\{0\}$

ii) Pour tout ensemble compact $A \subset K$ pour lequel $0 \notin A$ on a: $0 \notin \overline{\text{conv}}\,(A)$.

D é m o n s t r a t i o n $\underline{\text{i}) \Rightarrow \text{ii})}$ Comme $E(\tau)$ est un espace régulier on peut choisir pour tout $x \varepsilon A$ un voisinage ouvert, convexe et équilibré U_x de x tel que: $0 \notin \bar{U}_x$. Comme l'ensemble: $A_x=\overline{\text{conv}}\,(U_x \cap A)$ est compact, un théorème connu de séparation [16] appliqué aux ensembles $(-K)$ et A_x implique qu'il existent une application linéaire et continue f_x et deux nombres réels α et c_x tels que:

$$(\forall\, u \varepsilon (-K))\,(\forall\, v \varepsilon A_x)\,(f_x(u) \leq \alpha < c_x \leq f_x(v))$$

Si on met: $\varepsilon=c_x-\alpha>0$ on obtient: (**) $(\exists\, c_x)\,(\exists\, \varepsilon_x>0)$ $(\exists f_x$, linéaire et et continue) $(f_x(u) \leq c_x-\varepsilon_x<c_x \leq f_x(v))$, pour tout $u \varepsilon (-K)$ et tout $v \varepsilon A_x$.

Comme $0 \varepsilon (-K)$ il résulte que: $\varepsilon_x \leq c_x$, d'où $c_x>0$.

Parce que $(-K)$ est un cône convexe, il résulte que $(-K) \subset \{u | f_x(u) \leq 0\}$. En effet, s'il existe $u \varepsilon (-K)$ tel que $f_x(u)>0$, alors, il existe $n \varepsilon N$ tel que: $n \cdot f_x(u)>c_x-\varepsilon_x$ et $n \cdot u \varepsilon (-K)$ ce qui contredit la relation (**). On obtient donc:

$$(\forall\, u \varepsilon (-K))\,(\forall\, v \varepsilon A_x)\,(f_x(u) \leq 0<c_x \leq f_x(v)).$$

Comme la famille $\{\{U_x\}_{x \in A}$ est une recouvrement ouvert de l'ensemble A, a compacité implique l'existence des: $x_1, x_2, \ldots x_n \varepsilon A$, tels que: $A \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_{x_i}$. Soit: $f=f_{x_1}+f_{x_2}+\cdots+f_{x_n}$. Si on met: $c=\min\{c_{x_1}, c_{x_2}, \ldots, c_{x_n}\}$ on obtient que pour la fonctionnelle f on a la relation: $(\forall\, x \varepsilon A)\,(0<c \leq f(x))$ d'où: $(\forall\, x \varepsilon \overline{\text{conv}}\,(A))\,(c \leq f(x))$ et comme $0=f(0)$ il résulte que $0 \notin \overline{\text{conv}}\,(A)$. $\underline{\text{ii}) \Rightarrow \text{i})}$ On suppose que: $K \cap (-K) \neq \{0\}$, alors il existe $a \varepsilon K \cap (-K)$ tel que $a \neq 0$, L'ensemble $A=\{-a, -a\} \subset K$, est compact et $0 \notin A$. comme $0 \varepsilon [-a, a]= \overline{\text{conv}}\,(A)$ il résulte que l'affirmation ii) n'est pas vraie et la proposition est démontré. 3. Dans cette section on suppose que $E(\tau)$ est un espace de Fréchet et que la topologie τ est définie par une famille suffisante $\{\|_n\}_{n \in N}$ dénombrable de semi-normes.

Théorème 1 Soit $K \subset E$ un cône convexe, fermé, bien basé et $F \in E'$ une fonctionnelle uniformént positive sur K.

Soit $0<r<R$ deux nombres réels et $D=\{x \in K \mid r \leq F(x) \leq R\}$.

Si: $f: D \to K$ est un opérateur compact continu tel que:

i) $(x \in D)$ & $(F(x)=R$ & $(f(x)=\lambda x) \Rightarrow \lambda \leq 1$

ii) $(x \in D$ & $(F(x)=r)$ & $(f(x)=\lambda x) \Rightarrow \lambda \geq 1$

iii) $0 \notin \overline{f(K_r)}$ où: $K_r=\{x \in K \mid F(x)=r$

alors, f a au mo ns un point fixe dans l'ensemble D,

Démonstration De la prosit'on 1 ii résulte que l'ensemble D est borné et donc $\overline{f(K_r)}$ est compact. Par hypothèse $0 \notin \overline{f(K_r)}$ et d'après la proposition 2 on obtient que: $0 \in \overline{\text{conv}}(f(K_r))$. On suppose que $fn'a$ aucun point fixe dans l'ensemble D. Soit pour chaque $n \in N$: $D_n=\left\{x \in K \mid \left(\frac{1}{n}\right) r \leq F(x) \leq R\right\}$ et soit l'application: $f_{n_1}: D_n \to K$ définie par:

$$f_{n_1}(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in D \\ f\left(\left(\frac{r}{F(x)}\right) \cdot x\right) & \text{si} \quad \left(\frac{1}{n}\right) r \leq F(x) \leq r \end{cases}$$

On considére l'ensemble: $S_n=\left\{x \in K \mid \left(\frac{1}{n}\right) r \leq F(x) \leq r\right\}$ et utilisant le théorème de Dugundji [3] on obtient un prolongement continu $f_{n_2}: B_r \to K$ de l'application $f_{n_1} \mid S_n$, où: $B_r=\{x \in E \mid F(x) \leq r\}$

Pour l'application f_{n_2} on a la relation:

$$f_{n_2}(B_r) \subset \text{conv}(f_{n_1}(S_n))=\text{conv}(f(K_r)).$$

Donc f_{n_2} est un opérateur continu et compact. Soit l'ensemble $B_r \cup D$ et $f_{n_3}: B_r \cup D \to K$ l'application définie par:

$$f_{n_3}(x)=\begin{cases} f_{n_2}(x) & \text{si} \quad x \in B_r \\ f(x) & \text{si} \quad x \in D \end{cases}$$

L'opérateur f_{n_3} est aussi continu et compact. Soit $M \geq R$ tel que: $F(f(x)) \leq M$ pour tout $x \in D$. Le nombre M existe parce que D est borné, F continue et f compact. On considère l'ensemble: $D_M=B_r \cup D \cup \{x \in K \mid F(x) \leq M\}$ et l'application:

$$f_{n_4}(x)=\begin{cases} f_{n_3}(x) & \text{si} \quad x \in B_r \cup D \\ f\left(\left(\frac{R}{F(x)}\right) \cdot x\right) & \text{si} \quad R \leq F(x) \leq M. \end{cases}$$

L'application f_{n_4} es continue et si on applique encore fois le théorème de Dugundji [3] on obtient le prolongement continu $f_n : B_M \to K \cap B_M$ de l'application f_{n_4} où: $B_M = \{x \in E(x) \leq M\}$. Par construction, B_M est convexe et fermé f_n continue et $\overline{f_n(B_M)}$ compact, donc on peut appliquer le théorème de point fixe Techonoff--Singbal [15].

Si on considère la construction précédente pour chaque $n \in N$ il résulte que pour tout $n \in N, f_n$ a un point fixe $x_n \in B_M$. Comme $f_n(B_M) \subset K$ il faut avoir que pour $n \in N$, $x_n \in K \cap B_n$. On démontre que:

$$(***) \qquad \left(\forall n \in N\right) \left(F(x_n) \leq \left(\frac{1}{n}\right) \cdot r\right)$$

On démontre la relation (***) par plusieur pas.

a) On suppose que $x_n \in D$; alors $f_n(x_n) = f_n(x_n)$, donc x est un point fixe pour f dans l'ensemble D contraire à l'hypothèse sur f. Donc $x_n \notin D$

b) On suppose que: $R < F(x_n) \leq M$, alors, $x_n = f_n(x_n) = f_{n_4}(x_n) = f\left(\left(\frac{R}{F(x_n)}\right) \cdot x_n\right.$

Si on met: $z_n = \left(\frac{R}{F(x_n)}\right) \cdot x_n$, on obtient: $f(z_n) = \left(\frac{F(x_n)}{R}\right) \cdot z_n$ et alors le nombre $\lambda = \frac{F(x_n)}{R} > 1$ contredit l'hypothèse i). Donc la relation: $R < F(x_n) \leq M$ n'est pas vraie pour x_n.

c) On suppose maintenant que x_n vérifie la relation: $\left(\frac{1}{n}\right) \cdot r \leq F(x_n) > r$.

Dans ce cas on a: $x_n = f_n(x_n) = f_{n_1}(x_n) = f\left(\left(\frac{r}{F(x_n)}\right) \cdot x_n\right)$. Si on met: $y_n = \left(\frac{r}{F(x_n)}\right) \cdot x_n$ on obtient: $f(y_n) = \left(\frac{F(x_n)}{r}\right) \cdot y_n$ et $\lambda = \frac{F(x_n)}{r} < 1$ ce qui contredit l'hypothèse ii). Donc la relation: $\left(\frac{1}{n}\right) \cdot r \leq F(x_n) < r$ n'est pas vraie. Il résulte alors que la reldtion (***) est vraie. Comme pour tout $m \in N$ il existe $\gamma_m > 0$ tel que: $\gamma_m \| x_n \|_m \leq F(x_n) \leq \left(\frac{1}{n}\right) r$, on obtient que la suite $\{x_n\}_{n \in N}$ est convergente vers zéro par rapport à la topologie τ. Mais on a: $f_n(x_n) = f_{n_2}(x_n) \in \operatorname{conv}(f(K_r))$ pour tout $n \in N$ d'où on obtient que $0 \in \overline{\operatorname{conv}}(f(K_r))$ ce qui est absurde, donc f a au moins un poit fixe dans l'ensemble D et le théorème est démontré.

Théorèmes 2. Soit $K \subset E$ un cône convexe, fermé, bien basé et $F \in E'$ une fonctionnelle uniformément positive sur K.

Soit $0 < r < R$ deux nobres réels et $D = \{x \in K \mid r \leq F(x) \leq R\}$. Si $f: D \to K$ est un opérateur compact continu tel que:

i) $(x \in D)$ & $(F(x) = R($ & $(f(x) = \lambda x) \Rightarrow \lambda \geq 1$

ii) $(x \in D)$ & $(F(x) = r)$ & $(f(x) = \lambda x) \Rightarrow \lambda \leq 1$

iii) $0 \notin \overline{f(K_R)}$ où $K_R = \{x \in K \mid F(x) = R\}$

alors, f a au moins un point fixe dans l'ensemble D.

Démonstration a) Premièrement, on suppose que: $0<r<1$ et $R=\frac{1}{r}$. Dans ce cas on considère l'application $g: D \to K$ définie par:

$$g(x)=[F(x)]\cdot f\left(\frac{x}{[F(x)]^2}\right); \quad \forall x \varepsilon D.$$

L'opérateur g est compact et continu, et il vérifie les hypothèse du théorème 1. En effet:

i) Soit $x \varepsilon D$, $F(x)=\frac{1}{r}$ et $g(x)=\lambda x$. Alors on a:

$$f\left(\frac{x}{[F(x)]^2}\right)=\lambda\cdot\frac{x}{[F(x)]^2}, \text{ Comme, } F\left(\frac{x}{[F(x)]^2}\right)=r$$

les hypothèses du théorème 2 impliquent: $\lambda\leq 1$, donc l'hypothèse i) du théorème 1 est vérifiée.

ii) On suppose maintenant que $x \varepsilon D$, $F(x)=r$ et $g(x)=\lambda x$. Comme dans le cas précédent, mais utilisant l'hypothèse i) du théorème 2 on obtient que $\lambda\geq 1$, donc g vérifie aussi l'hypothèse ii) du théorème 1.

iii) Pour démontrer que $0\notin\overline{g(K_r)}$ où: $K_r=\{x \varepsilon K \mid F(x)=r\}$ on suppose le contraire, donc on suppose que: $0 \varepsilon \overline{g(K_r)}$.

Alors, il existe $y_n \varepsilon g(K_r)$ pour tout $n \varepsilon N$ tel que $\{y_n\}_{n\in N}\to 0$. Mais, $y_n=g(x)$ où $x_n \varepsilon K_r$ et donc $F(x_n)=r$. Par suite: $y_n=r^2\cdot f\frac{x_n}{([F(x_n)]^2)}$ d'où: $\left\{f\left(\frac{x_n}{[F(x_n)]^2}\right)\right\}\to 0$. Comme $\frac{x_n}{[F(x_n)]^2} \varepsilon K_R$ on obtient une contradiction de l'hypothèse iii) d'où il résulte que $0\notin\overline{g(K)}$. Si on applique maintenant le théorème 1, on obtient que g a un point fixe dans l'ensemble D d'où il résulte que f a un point fixe dans l'ensemble D.

b) On supppose maintenant $0<r<R$ arbitraires.

Soit: $D^*=\left\{x \varepsilon K \mid \frac{1}{2}\leq F(x)\leq 1\right\}$.

On considère l'opérateur $f_1: D^*\to K$ donné par:

$$f(x)=\frac{3\,F(x)}{2\,F(x)(R-r)+4\,r-R}\cdot f\left(\frac{2\cdot F(x)(R-r)+4\,r-R}{3\,F(x)}\cdot x\right)$$

pour tout $x \varepsilon D^*$. L'opérateur f_1 est compact et continu, et il vérifie les hypothèsee du théorème 2. En effet, si $x \varepsilon D^*$ et $F(x)=2$ alors, $f_1(x)=\frac{2}{R}f\left(\frac{R}{2}\cdot x\right)$ et si on suppose que $f_1(x)=\lambda x$, on obtient: $f\left(\frac{R}{2}\cdot x\right)=\lambda\left(\frac{R}{2}x\right)$ et come $F\left(\frac{R}{2}x\right)=R$ les hypothèse impliquent: $\lambda\geq 1$.

On suppose maintenant que $x \varepsilon D^*$ et $F(x) = \frac{1}{1}$. Dans ce cas, $f_1(x) = = \frac{1}{2r} \cdot f(2r \cdot x)$ et si $f_1(x) = \lambda \cdot x$ on a: $f(2rx) = \lambda(2rx)$ et comme $F(2rx) = r$ les hypothèses impliquent: $\lambda \leqslant 1$. Donc l'opérateur f_1 vérifie les hypothèses i), ii) du théorème 2 sur l'ensemble D^*. Comme dans la première partie on peut prouver que $0 \in \overline{f_1(K_2)}$ où: $K_2 = x \varepsilon K \mid F(x) = 2\}$.

Donc, pour l'opérateur f_1 les hypothèse de la première partie de la démonstration sont vérifiés sur l'ensemble D^*, d'où il résulte que f_1 a un point fixe dans l'ensemble D^* et d'après un calcul élémentaire on obtient que f a un point fixe dans l'ensemble D et le théorème est démontré.

Remarque L'hypothèse que $0 \notin \overline{f(K_r)}$ est remplie si:

$$\inf \{F(f(x)) \mid x \varepsilon K \ \& \ F(x) = r\} > 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Benjamin, T.: *A unified Theory of Conjugate Flows*, Phil. Trans Roy. Soc. 269 (1971) p. 587—643.

[2] Bona, J.: *Fixed-Point Theorems for Fréchet Spaces*, Lecture Notes in Mathematics Nr. 280-Springer-Verlag (1972).

[3] Dugundji, J.: *An Extension of Tietze's Theorem*, Pacific Jurn. Math. 1 (1951) p. 353—367.

[4] Fitzpatric, P. M. and Petryshyn, W. V.: *Fixed Point Theorems and the fixed Point Index for multivalued mappings in Cones*, Journ. of the London Math. Soc. Vol. 12 F—1 (1975) p. 75—85.

[5] Fournier, G. and Peitgen, H. O.: *On Some Fixed Point Principles for Cones in linear normed Spaces*, Preprint №. 86 Universitat Bonn (1976).

[6] Gatica, J. A. and Smith, H. L.: *Fixed Point Techniques in a Cone with Applicatioons*, Journ. of Mathem. Anal. and Appl. Nr. 61 (1977) p. 58—71.

[7] Goncharov, G. M.: *On some Existence Theorems for the Solution of a Class of Non-linear Operator Equations*, Math. Zametki 7 (1970) p. 229—238.

[8] Hamilton, J. D.: *Noncompact Mappings and Cones in Banach Spaces*, Arch. Rat. mech. Anal. 48 (1972) p. 153—162.

[9] Jameson, J. O.: *Ordered Linear Spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Springer--Verlag (1970).

[10] Krasnoselskii, M. A.: a) *Positive Solntions of Operator Equations*, Nordhoff, Groningen, Netherlands, (1964).

b) *Topological Methods in the Theory of non-linear integral Equations*, Pergamon Press, Oxford (1964).

]11] Marcemko, N. V.: *On the continuation of an operator and the existence o fixed Points*, Dokl. Akad. Nauk. 145 (1962) p. 1767—1770

[12] Nusbaum, R. D.: *Periodic Solutions of Some Non-linear Autonomus functional differential Equations II*, Journ. Diff. Eq. Nr. 14 (1973) p. 360—394.

[13] Peressini, A. L.: *Ordered topological Vector Spaces*, Harper & Row, (1967) New York.

[14] Schmit, K.: *Fixed Point and Coincidence Theorems with Applications to Non--linear differeutial and integral Equations*, Rapport Nr. 97 Institut de Mathém. Pure et Appl. Université Catholique de Louvain.

[15] Singbal, B. V.: *Generalized form of Schauder-Tychonoff's fixed point principle*, (In: F. E. Bonsall: Lectures on some fixed point theorems of functional analysis — Tata Institut of Fundamental Research — Bombay — (1967)

[16] Schaefer, H. H.: *Topological Vector Spaces*, MacMilan, New York (1966).

[17] Yamamuro, S.: *Some fixed Point Theorems in locally convex linear Spaces*, Proc. Japan Acad. 40 (1964) p. 1—12.

Département de mathématiques
Collège militaire royal
Saint-Jean, Québec, Joj 1 Ro
Canada