PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 26 (40), 1979, pp. 307–311

$\mathrm{md}\, H = \mathrm{md}\, \overline{H}$

Раде Живалевич

(Получено 29 августа 1979)

Та задача, которая рассматривается в настоящей работе, появилась при исследовании размерности Хелли семейства V_H, всех H-выпуклых множеств n-мерного евклидова пространства R^n. Прежде чем ее сформулировать, приведем два определения и одну теорему.

Определение 1. ([2]). Пусть H — непустое подмножество единичной сферы S^{n-1} n-мерного евклидова пространства R^n. Определим H-выпуклые полупространства как полупространства, нормальные векторы которых принадлежат множеству H. Иными словами, полупространство $P = \{x \mid \langle e, x\rangle \leqslant \lambda\}$, $e \in S^{n-1}$, $\lambda \in R$ является H-выпуклым только в случае, если $e \in H$. Пусть $K \subset R^n$. К является H-выпуклым множеством, если оно является результатом пересечения некоторого семейства H-выпуклых полупространств. Через V_H обозначим семейство всех H-выпуклых множеств пространства R^n.

Определение 2. ([11]). Пусть $\mathcal{F}$ — некоторое семейство множеств. Под размерностью Хелли, множества $\mathcal{F}$, обозначенную через $\mathrm{him}\, \mathcal{F}$, будем понимать самое большое натуральное число n, где существует такое семейство $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$, что $|\mathcal{F}'| = n+1$ и $\cap \mathcal{F}' = \varnothing$, в то время как любые n множеств из $\mathcal{F}'$ имеют непустое пересечение. В случае если самого большого натурального числа с приведенным свойством нет, $\mathrm{him}\, \mathcal{F} = +\infty$. Наконец, если таких натуральных чисел нет, для каждого конечного семейства $\mathcal{F}'' \subset \mathcal{F}$ справедливо $\cap \mathcal{F}'' \neq \varnothing$ и тогда определяем, что $\mathrm{him}\, \mathcal{F} = 0$.

Теорема 1. ([3, 5, 6]). *Пусть H — замкнутое, не являющееся односторонним, подмножество сферы $S^{n-1} \subset R^n$, что обозначает его непринадлежность ни одной из замкнутой полусферы. При этом* $\mathrm{him}\, V_H = \mathrm{md}\, H$.

Обращаем внимание читателям, что определение числа $\mathrm{md}\, H$, а также и все остальные необходимые термины имеются в некоторой из цитированных работ В. Г. Болтянского и П. С. Солтана, напр. в. [6]. Теорема 1 является не только и не столько обобщением известной теоремы Е. Хелли о пересечениях выпуклых множеств, но и дает новое направление для исследования в данной области. Естественно возник вопрос нельзя ли условия теоремы 1 ослабить. В работе [3] (см. также [5, 6]) В. Г. Болтянский при помощи примера показывает, что в случае если множество H принадлежит замкнутой полусфере, утверждение теоремы 1 не должно быть справедливым. Остался вопрос существенности замкнутости множества H. На странице 131, [6], авторы в эквивалентной форме задают вопрос есть ли $\mathrm{md}\, H = \mathrm{md}\, \overline{H}$ для каждого, не являющегося односторонним, множества $H \subset S^{n-1}$.

Задача нашей небольшой работы — на заданный вопрос ответить утвердительно (теорема 3). Необходимо подчеркнуть, что на этот вопрос неявно уже дан ответ в работе [8], а в настоящей работе доказательство будет иное и более короткое.

Основной теоремой является H-выпуклый вариант результатов работ [10, 1, 7].

Теорема 2. *Пусть μ мера, определенная на Лебеговом кольце измеримых множеств из R^n при помощи интегрируемой неотрицательной функции $f: R^n \to R$ равенством $\mu A = \int f \varphi_A\, dm$ где m — мера Лебега, A — множество, измеримое в смысле Лебега. Предположим, что f — функция с ограниченным носителем, что обозначает ограниченность множества $C = \{x \mid 0 < f(x)\}$. Пусть H не является односторонним подмножеством сферы. При этом справедливо*

$$(\mathrm{md}\, H + 1)^{-1} \mu R^n \leqslant \sup_{x \in R^n} \inf_{e \in H} \mu (x + \{y \mid \langle e, y \rangle \leqslant 0\})$$

причем приведенный sup *достигается в некоторой точке $x^* \in R^n$. Иными словами, существует такая точка $x^* \in R^n$, что каждое замкнутое полупространство P, содержащее точку x^*, имеет свойство $(\mathrm{md}\, H + 1)^{-1} \mu R^n \leqslant \mu P$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно предположить, что $\mu R^n = 1$. $g: R^n \times S^{n-1} \to R$, $g(x, e) = \mu (x + \{y \mid \langle e, y \rangle \leqslant 0\})$. Функция g непрерывна, благодаря непрерывности интеграла. Множество H не является односторонним, что обозначает существование конечного, не являющегося также односторонним, множества $H_0 \subset H$. Действительно, если $A = \{x_n \mid n \in N\} \subset H$ всюду плотно в H, то хотя бы одно из множеств $A_n = \{x_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ не является односторонним. В противном случае в S^{n-1} существовала бы последовательность $\langle b_m, m \in N \rangle$, сходящаяся к $b \in S^{n-1}$, такая, чтобы $\langle b_m, A_m \rangle \leqslant 0$, при этом было бы $\langle b, A \rangle \leqslant 0$ и $\langle b, H \rangle \leqslant 0$, что является противоречием.

Рассмотрим последовательность таких конечных множеств $H_0 \subset H_1 \subset \subset \cdots \subset H_m \subset \ldots$, что ни одно среди них не является односторонним и что $\bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$ всюду плотное подмножество из H. Видно, что нашу теорему достаточно доказать для множеств H_ν, $\nu \in N$. Действительно, если для каждого $\nu \in N$ имеется точка $x_\nu \in R^n$, при которой

$$(\mathrm{md}\, H + 1)^{-1} \leqslant \mu (x_\nu + \{y \mid \langle e, y \rangle \leqslant 0\}) = g (x_\nu, e)$$

для всех $e \in H_\nu$, то точка x^*, к которой последовательность (x_ν) сходится (в случае необходимости выделяем сходящуюся подпоследовательность), имеет требуемые свойства. Чтобы в этом убедиться, предположим, что $e \in \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i$. В этом случае существует такое натуральное число m_0, что $(\mathrm{md}\, H+1)^{-1} \leqslant g(x_m, e)$ для всех $m \geqslant m_0$. На основе непрерывности g имеем $(\mathrm{md}\, H+1)^{-1} \leqslant g(x^*, e)$, а так как множество $\{e \mid (\mathrm{md}\, H+1)^{-1} \leqslant g(x^*, e\}$ замкнуто, видно что неравенство $(\mathrm{md}\, H+1)^{-1} \leqslant g(x^*, e)$ справедливо для всех $e \in H$ и x^* — действительно искомая точка.

Поэтому докажем нашу теорему с дополнительным предположеним, что H конечное множество.

Пусть $\vee(0, \rho)$ такой замкнутый шар с центром в 0 и радиусом ρ, что $C = \{x \mid 0 < f(x)\} \subset \vee(0, \rho)$ и $K = \vee(0, R)$, $\rho < R$, концентрический к нему шар. Предположим, что точки x^* с требуемым свойством нет, это значит что для всех $x \in R^n$ множество $\{e \in H \mid g(x, e) = \mu(x + \{y \mid \langle y, e\rangle \leqslant 0\}) < (\mathrm{md}\, H+1)^{-1}\}$ непустое. Имея в виду, что множество H не является однсстороннним, то $0 < \max\langle b, H\rangle$ для всех $b \in S^{n-1}$. Так как $\alpha(b) = \max\langle b, H\rangle$ в качестве максимума конечного множества непрерывных функций и сама является непрерывной функцией, своего инфимума достигает на компакте S^{n-1}. Значит, что множество H не только не является односторнним, но существует и такое $\varepsilon > 0$, что $\varepsilon < \alpha(b)$ для всех $b \in S^{n-1}$ (1).

Далее, если рассмотреть функцию $\beta(x) = \min\{g(x, e) \mid e \in H\}$, которая имеет свойство $\beta(x) < (\mathrm{md}\, H+1)^{-1}$ для всех $x \in K$, а поскольку в качестве минимума конечного множества непрерывных функций и она непрерывна, β супремума достигает на компакте K. Согласно этому, имеется такое $\delta > 0$, что для всех $x \in K$ множество $\varphi(x) = \{e \in H \mid g(x, e) \leqslant (\mathrm{md}\, H+1)^{-1} - \delta\}$ непустое. $\varphi: K \to R^n$ является многозначным отображением, имеющее замкнутый граф, Γ_φ. Имея в виду, что $\Gamma_\varphi \subset K \times S^{n-1}$ дcстаточно показать замкнутсcть Γ_φ в этом множестве. Однако это следует из того факта, что

$$\Gamma_\varphi = \{(x, e) \in K \times S^{n-1} \mid g(x, e) \leqslant (\mathrm{md}\, H+1)^{-1} - \delta\} =$$
$$= g^{-1}]-\infty,\ (\mathrm{md}\, H+1)^{-1} - \delta] \cap (K \times S^{n-1})$$

и этим мы доказали, что отображение φ является полунепрерывным сверху. Теперь покажем, что если R достаточно большое, можно достичь $(x + \varphi(x)) \cap K \neq \varnothing$. Последнее утверждение докажем, предполагая, что $R - 1 \leqslant \|x\| \leqslant R$. В самом деле мы докажем, что для каждого $x \in K$ с приведенным свойством можно найти такой $e \in H$, что $x + e \in K$ и $x + \{y \mid \langle y, e\rangle \leqslant 0\} \cap \vee(0, \rho) = \varnothing$. Последнее равенство можно записать в эквивалентном виде $\vee(0, \rho) - x \subset \{y \mid 0 < \langle y, e\rangle\}$ или иначе $\langle e, x\rangle < \min\langle e, \vee(0, \rho)\rangle = -\rho$. Рассмотрим множество $D = \{f \in S^{n-1} \mid \langle \|x\|^{-1} x, f\rangle < -\|x\|^{-1}\rho\}$. Если $\|x\|^{-1}\rho < \varepsilon$, то $\{f \in S^{n-1} \mid \varepsilon < \langle -\|x\|^{-1} x, f\rangle\} \subset D$ и так как на основе (1) $\varepsilon < \alpha(-\|x\|^{-1} x)$, делаем вывод, что $H \cap D \neq \varnothing$. Этим доказано существование такого вектора $e \in H$, что $x + \{y \mid \langle y, e\rangle \leqslant 0\} \cap \vee(0, \rho) = \varnothing$ и если R достаточно большое, основываясь также на (1) можно убедиться, что $x + e \in K$. Действительно, опираясь на $\varepsilon < \langle -\|x\|^{-1} x, e\rangle$ имеем, что $\|x + e\|^2 = \|x\|^2 + \|e\|^2 + 2\langle x, e\rangle \leqslant R^2 + 1 - 2\|x\|\langle -\|x\|^{-1} x, e\rangle \leqslant R^2 + 1 - 2(R-1)\varepsilon \leqslant R^2$ для $(2\varepsilon)^{-1} + 1 \leqslant R$.

Согласно этому можно предположить, что $(x + \varphi(x)) \cap K \neq \varnothing$ для всех $x \in K$. Рассмотрим многозначное отображение $f: K \to K$, $x \mapsto (x + \mathrm{conv}\, \varphi(x)) \cap K$. Оно также является полунепрерывным сверху. Согласно теореме Какутани, [9], о неподвижной точке существует такая точка $x_0 \in K$, $x_0 \in (x_0 + \operatorname{conv} \varphi(x_0)) \cap K$. Значит, $0 \in \operatorname{conv} \varphi(x_0)$ и на основании известных свойств инварианта $\operatorname{md} H$ имеем $0 \in \operatorname{conv}\{e_1 \ldots, e_l\}$, где $\{e_1, \ldots, e_l\} \subset \varphi(x_0)$ и $l \leqslant \operatorname{md} H + 1$. Отсюда следует $K \subset \bigcup \{x_0 + \{y \mid \langle y, e_i \rangle \leqslant 0\} \mid i = 1, \ldots, l\}$ и таким образом $1 = \mu K \leqslant \leqslant \sum \{\mu(x_0 + \{y \mid \langle y, e_i \rangle \leqslant 0\}) \mid i = 1, \ldots, l\} < l(\operatorname{md} H + 1)^{-1} \leqslant 1$ что является противоречием.

Этим теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть P — конечное подмножество из R^n. При этом теорема 2 справедлива и в случае замены меры μ мерой μ_P, определенной при помощи $\mu_P(X) = |X \cap P|$.*

Чтобы убедиться в верности следствия 1 достаточно сконструировать удобную последовательность непрерывных мер $\langle \mu_n \mid n \in N \rangle$ имеющей свойство $\mu_n A \to \mu_P A$ для каждого открытого полупространства $A \subset R^n$.

Теорема 3. *Пусть H — подмножество, которое не является односторонним. При этом* $\operatorname{him} V_H = \operatorname{md} H$.

Доказателсьтво. Докажем только неравенство $\operatorname{him} V_H \leqslant \operatorname{md} H$, в то время как противоположное неравенство можно доказать таким же способом, как это сделано в одной из работ [3, 5, 6]. Предположим, что $\operatorname{md} H + 1 \leqslant r$ и пусть H-выпуклые множества $K_1, K_2, \ldots, K_{r+1}$ имеют свойство $\bigcap \{K_j \mid j \neq i\} \neq \varnothing$, $p_i \in \bigcap \{K_j \mid j \neq i\}$ для $i = 1, \ldots, r+1$. Покажем, что $\bigcap \{K_i \mid i = 1, \ldots, r+1\} \neq \varnothing$. Действительно, на основании следствия 1, примененного к множествам $P = \{p_i \mid i = 1, \ldots, r+1\}$, $-H \subset S^{n-1}$ приходим к точке $x_0 \in R^n$, характеризующейся тем, что каждому полупространству $x_0 + \{y \mid 0 \leqslant \langle y, e \rangle\}$ свойственно содержать в себе хотя бы две точки из множества P, что означает что его пересечние со всеми множествами K_i, $i = 1, \ldots, r+1$ непусто. Отсюда следует, что точка x_0 принадлежит всем множествам K_i, ввиду того, что ее нельзя отделить ни от одного из них H-выпуклым полупространством. Следовательно $\bigcap \{K_i \mid i = 1, \ldots, r+1\} \neq \varnothing$, что и должны были показать.

Следствие 2. *Если множество $H \subset S^{n-1}$ не является односторонним, то $\operatorname{md} H = \operatorname{md} \overline{H}$. Действительно, достаточно опереться на теорему 16. 10 из работы [6], утверждающую, что в приведенных условиях $\operatorname{him} V_H = \operatorname{md} \overline{H}$ и на теорему 3.*

ЛИТЕРАТУРА

[1] Birch B. J., *On 3N points in a plane*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 55, 1959, 289—293.

[2] Болтянский В. Г., *О некоторых классах выпуклых множеств*, ДАН СССР, 226, № 1, 1976, 19—22.

[3] Болтянский В. Г., *Теорема Хелли для H-выпуклых множеств*, ДАН СССР, 226, № 2, 1976, 249—252.

[4] Болтянский В. Г., *Несколько теорем комбинаторной геометрии*, Мат. заметки, 21, 1, 1977, 117—124.

[5] Болтянский В. Г., Солтан П. С. *Комбинаторная геометрия и классы выпуклости*, УМН, 32, 5, 1977, 3—44.

[6] Болтянский В. Г., Солтан П. С., *Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств*, Изд. „Штиинца", Кишинев, 1978.

[7] Grünbaum B., *Partitions of mass distributions and of convex bodies by hiperplanes* Pacific J. Math. 10, 1960, 1257—1261.

[8] Živaljević R., *Note on H-convex functions*, Publ. Inst. Math., Tom 26 (40), Beograd 1979.

[9] Kakutani S., *A generalization of Brouwer's fixed point theorem*, Duke Math., J., 8, 1941, 457—459.

[10] Rado R., *A theorem on general measure*, J. London Math. Soc. 22 1947, 219—226.

[11] Солтан П. С., *Теорема Хелли для d-выпуклых множествах*, ДАН СССР, 205, № 3, 1972, 537—539.

Rađe Živaljević
Matematički institut, Knez Mihailova 35
11000 Beograd, Jugoslavija