PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 26 (40), 1979, pp. 297—305

ПРИБЛИЖЕНИЕ 2π ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ УГЛОМ ИЗ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Милош Томич

(Получено 2 февраля 1979)

В этой работе дается оценка в метрике L_p приближения углом из некоторых сингулярных интегралов 2π периодических функций через иаилучшие приближения углом. Доказаная теорема применяется к сравнению классов насыщения рассматриваемых интегралов и классов Никольского.

§ I. Ряд Фурье функции $f_{(x_1, \dots, x_n)} \in L_p(0, 2\pi)^n$, ($n$-натуральное число), будем записывать в действительной форме

$$f \sim \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_n=0}^{\infty} A_{k_1 \dots k_n} f$$

причем

$$A_{k_1 \dots k_n} f = \sum_{j=1}^{n} \left(B_{k_1 \dots k_j \dots k_n} + B_{k_1 \dots k_j^* \dots k_n} \right), \quad k_j^* = -k_j$$

$$B_{k_1 \dots k_n} = C_{k_1 \dots k_n} e^{i \sum_{j=1}^{n} k_j x_j}$$

$$C_{k_1 \dots k_n} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f(x_1, \dots, x_n) e^{-i \sum_{j=1}^{n} k_j x_j} dx_1 \cdots dx_n.$$

Будем оперировать с множеством всех наборов индексов $i_1, \dots, i_m$ таких, что $1 \leqslant i_j \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m \leqslant n$. Символом $T_{l_{i_j}}$ мы обозначим функцию принадлежащую пространству $L_p(0, 2\pi)^n$, которая есть тригонометрический полином порядка l_{i_j} по переменной x_{i_j}, (а по остальным переменным в общем то произвольная функция). Наилушее приближение m-мерным углом функции f по переменным $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$, (см. [3]) определяется так:

$$Y_{l_{i_1} \dots l_{i_m}}(f)_p = \inf_{T_{l_{i_j}} \in L_p} \left\| f - \sum_{j=1}^{m} T_{l_{i_j}} \right\|_p, \quad l_{i_j} = 0, 1, 2, \dots .$$

Пусть даны ядра $\mathcal{K}_{l_j}^j(t)$, $j=1, \ldots, n$, $l_j=1, 2, \ldots$ которые обладают свойствами $\mathcal{K}_{l_j}^j(-t)=\mathcal{K}_{l_j}^j(t)$,

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{K}_{l_j}^j(t)\,dt=2\pi, \qquad \int_0^{2\pi} \left|\mathcal{K}_{l_j}^j(t)\right| dt\leqslant M$$

причем константа M не зависит от l_j.

Ряд Фурье ядра $\mathcal{K}_{l_j}^j(t)$ запишем в форме

$$\mathcal{K}_{l_j}^j(t)\sim\frac{1}{2}+\sum_{k_j=1}^{\infty} \gamma_{l_j}^j(k_j)\cos k_j t$$

Для функции $f\in L_p(0, 2\pi)^n$ при помощи этих ядер образуем интегралы

$$I_{l_j}^j f=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j-t_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)\mathcal{K}_{l_j}^j(t_j)\,dt_j,$$

$$I_{l_j}^j I_{l_i}^i f=I_{l_j l_i} f, \ \ldots, \ I_{l_1}^1 I_{l_2}^2\cdots I_{l_n}^n f=I_{l_1\ldots l_n} f.$$

Вследствие неравенства Минковского имеем $\left\|I_{l_j}^j f\right\|_p\leqslant M\|f\|_p$.

Из этих интегралов образуем всевозможные m-мерные углы:

$$U_{l_{i_1}\ldots l_{i_m}} f=I_{l_{i_1}}^{i_1} f+\cdots+I_{l_{i_m}}^{i_m} f-I_{l_{i_1} l_{i_2}} f-\cdots-I_{l_{i_{m-1}} l_{i_m}} f+\cdots+$$
$$+\cdots+(-1)^{m-1} I_{l_{i_1}\ldots l_{i_m}} f$$
$$(1\leqslant i_j\leqslant n, \quad 1\leqslant j\leqslant m\leqslant n).$$

Мы будем оценивать норму $\|f-U_{l_{i_1}\ldots l_{i_m}} f\|_p$ через наилучшие приближения углом $Y_{k_{i_1}\ldots k_{i_m}}(f)_p$, $k_{i_j}\leqslant l_{i_j}$. В доказательстве ниже приведенной теоремы мы воспользуемся частными суммами ряда Фурье функции f. Для краткости эти суммы мы напишем для функций $f(x_1, x_2)$ двух переменных. Будем обозначать

$$S_{l_1} f=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_1+t_1, \quad x_2)\,D_{l_1}(t_1)\,dt_1$$

где $D_l(t)$ ядро Дирихле, т. е.

$$D_l(t)=\frac{\sin\left(l+\frac{1}{2}\,t\right)}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Так же

$$S_{l_2}f=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x_1,\, x_2+t_2)\,D_{l_2}(t_2)\,dt_2, \quad S_{l_1 l_2}f=S_{l_1}S_{l_2}f.$$

Введем и функции

$$S^*_{l_1 l_2}f=S_{l_1}f+S_{l_2}f-S_{l_1 l_2}f.$$

В работе [3], (лемма 2), доказано: если $f(x_1, x_2)\in L_p(0,\, 2\pi)^2$, $1<p<\infty$, то

$$\|f-S^*_{l_1 l_2}f\|_p\leqslant C\,Y_{l_1 l_2}(f)_p, \quad \|f-S_{l_i}f\|_p\leqslant C\,Y_{l_i}(f)_p, \quad (i=1,\, 2),$$

причем константа C зависит только от p.

Кроме того мы будем пользоваться теоремой Литтливуда-Пэли ([2], I. 5. 2): если функция $f\in L_p(0,\, 2\pi)$, $1<p<\infty$, имеет ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty}A_k(f)$, то

$$C'_p\left\|\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\delta_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p\leqslant\|f\|_p\leqslant C''_p\left\|\left(\sum_{\nu=1}^{\infty}\delta_\nu^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_p$$

где

$$\delta_\nu=\sum_{k=2^{\nu-1}}^{2^\nu-1}A_k(f)$$

и константны C'_p, C''_p зависят только от p.

§ 2. Теорема I. *Пусть для коэффициентов $\gamma^j_{l_j}(k_j)$ справедливы равенства $1-\gamma^j_{l_j}(k_j)=\varphi_j(l_j)\,\psi^j_{l_j}(k_j)$, $k_j=1,\, 2,\, \ldots,\, l_j$, $(j=1,\, \ldots,\, n)$, причем $\varphi_j(l_j)>0$. Для фиксированного l_j подберем s_j так, что $2^{s_j}\leqslant l_j<2^{s_j+1}$ и предположим, что величина $\psi^j_{l_j}(k_j)$ удовлетворяет условиям*

$$(\alpha) \qquad \left|\psi^j_{l_j}(k'_j)\right|\leqslant C_1\left|\psi^j_{l_j}(k''_j)\right|, \quad 0\leqslant k'_j\leqslant k''_j\leqslant 2^{s_j}, \quad \left(\psi^j_l(0)=1\right),$$

$$(\beta) \qquad \left|\psi^j_{l_j}(2k_j)\right|\leqslant C_2\left|\psi^j_{l_j}(k_j)\right|, \quad 2k_j\leqslant 2^{s_j}$$

$$(\gamma) \qquad \left|\Delta\psi^j_{l_j}(k_j)\right|=\left|\psi^j_{l_j}(k_j)-\psi^j_{l_j}(k_j+1)\right|\leqslant C_3\frac{\left|\psi^j_{l_j}(k_j)\right|}{k_j+1}, \quad 0\leqslant k_j\leqslant 2^{s_j}-1$$

$$(\delta) \qquad 0<C_4\leqslant\varphi_j(l_j)\left|\psi^j_{l_j}(2^{s_j})\right|$$

где константы $C_1,\, \ldots,\, C_4$, не зависят от k_j и l_j.

Тогда для каждого набора индексов $i_1,\, \ldots,\, i_m$, $(1\leqslant i_j\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m\leqslant n)$, имеет место неравенство

$$\left\|f-U_{l_{i_1}\ldots l_{i_m}}f\right\|_p\leqslant C\prod_{j=1}^{m}\varphi_{i_j}(l_{i_j})\left\{\sum_{k_{i_1}=0}^{l_{i_1}}\cdots\sum_{k_{i_m}=0}^{l_{i_m}}\prod_{j=1}^{m}\frac{\left\|\psi^{i_j}_{l_{i_j}}(k_{i_j})\right\|^\theta}{k_{i_j}+1}\,Y^\theta_{k_{i_1}\ldots k_{i_m}}(f)_p\right\}^{\frac{1}{\theta}}$$

где $\theta=\min\{p,\, 2\}$, $1<p<\infty$, и константа C не зависит от f и $l_j=1,\, 2,\, \ldots$.

Доказательство для простоты дадим для случая $n=2$. Сначала рассмотрим одномерный угол. Имеем

$$\text{(1)}\qquad \|f-I^1_{l_1}f\|^\theta\leqslant C'_1\{\|f-S_{2^{s_1}}f\|^\theta+\|I^1_{l_1}S_{2^{s_1}}f-I^1_{l_1}f\|^\theta+\|S_{2^{s_1}}f-I^1_{l_1}S_{2^{s_1}}f\|^\theta\}\leqslant$$
$$\leqslant C'_2\{Y^\theta_{2^{s_1}}(f)_p+\|S_{2^{s_1}}f-I^1_{l_1}S_{2^{s_1}}f\|^\theta\}.$$

Если на функцию $f(x_1, x_2)$ смотрим как на функцию одной переменной x_1, тогда (теорема о свертке) для почти всех x_2 имеет место равенство

$$\text{(2)}\qquad S_{2^{s_1}}f-I^1_{l_1}S_{2^{s_1}}f=\varphi_1(l_1)\sum_{\nu_1=0}^{s_1}\{S_{2^{\nu_1}}(p^1_{l_1}f)-S_{[2^{\nu_1-1}]}(p^1_{l_1}f)\}$$

где

$$p^1_{l_1}f=\frac{A_0(x_2)(f)}{2}+\sum_{k_1=1}^{2^{s_1}}\psi^1_{l_1}(k_1)A_{k_1}(x_2)(f)$$

и $[2^{\nu-1}]=2^{\nu-1}$ для $\nu\geqslant 1$, $[2^{0-1}]=0$.

Функция $p^1_{l_1}f$ как функция от x_1 для почти всех x_2 принадлежит пространству $L_p(0, 2\pi)$, и применяя теорему Литлливуда-Пэли, из (2) получаем

$$\int_0^{2\pi}|S_{2^{s_1}}f-I^1_{l_1}S_{2^{s_1}}f|^p\,dx_1\langle\langle\,\varphi_1^p(l_1)\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{\nu_1=0}^{s_1}[S_{2^{\nu_1}}(p^1_{l_1}f)-S_{[2^{\nu_1-1}]}(p^1_{l_1}f)]^2\right\}^{\frac{p}{2}}dx_1$$

откуда интегрируя по x_2 получаем

$$\text{(3)}\qquad \|S_{2^{s_1}}f-I^1_{l_1}S_{2^{s_1}}f\|^p_p\langle\langle\,\varphi_1^p(l_1)\left\|\left(\sum_{\nu_1=0}^{s_1}[S_{2^{\nu_1}}(p^1_{l_1}f)-S_{[2^{\nu_1-1}]}(p^1_{l_1}f)]^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|^p_p$$

(мы будем писать $A\langle\langle B$ вместо $A\leqslant CB$, где C - константа).

Из (3) для $1<p\leqslant 2$ применением неравенства $|\Sigma a_i|^\xi\leqslant\Sigma|a_i|^\xi$, $0\leqslant\xi\leqslant 1$ и для $2<p<\infty$ применением обобщенного неравенства Минковского получаем

$$\text{(4)}\qquad \|S_{2^{s_1}}f-I^1_{l_1}S_{2^{s_1}}f\|^\theta\langle\langle\,\varphi_1^\theta(l_1)\sum_{\nu_1=0}^{s_1}\|S_{2^{\nu_1}}(p^1_{l_1}f)-S_{[2^{\nu_1-1}]}(p^1_{l_1}f)\|^\theta$$

Будем пользоваться равенством (которое обосновано на преобразовании Абеля)

$$\text{(5)}\qquad \sum_{k=0}^{n}a_k b_k-L b_0=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{\nu=0}^{k}a_\nu-L\right)(b_k-b_{k+1})+\left(\sum_{k=0}^{n}a_k-L\right)b_n,\quad n=1, 2, \ldots$$

где L любое число. Это равенство для $n=0$ принимает вид

$$a_0 b_0-L b_0=(a_0-L)b_0.$$

На основании этого равенства имеем

$$S_{2^{\nu_1}}(p_{l_1}^1 f)-S_{[2^{\nu_1-1}]}(p_{l_1}^1 f)=$$

$$=\sum_{\mu_1=[2^{\nu_1-1}]}^{2^{\nu_1}-1}(S_{\mu_1}f-f)\,\Delta\,\psi_{l_1}^1(\mu_1)+(S_{2^{\nu_1}}f-f)\,\psi_{l_1}^1(2^{\nu_1})-(S_{[2^{\nu_1-1}]}f-f)\,\psi_{l_1}^1([2^{\nu_1-1}])$$

откуда пользуясь условиями (8), (α) и (β) следует

(6) $$\left\|S_{2^{\nu_1}}(p_{l_1}^1 f)-S_{[2^{\nu_1-1}]}(p_{l_1}^1 f)\right\| \ll \left|\psi_{l_1}^1([2^{\nu_1-1}])\right| Y_{[2^{\nu_1-1}]}(f)_p$$

На основании условия (δ) имеем

(7) $$Y_{2^{s_1}}(f)_p \ll \varphi_1(l_1)\left|\psi_{l_1}^1(2^{s_1})\right| Y_{2^{s_1}}(f)_p$$

Теперь из (I) на основании (4), (6), (7) получаем

(8) $$\left\|f-I_{l_1}^1 f\right\|^\theta \ll \varphi_1^\theta(l_1)\sum_{\nu_1=0}^{s_1+1}\left|\psi_{l_1}^1([2^{\nu_1-1}])\right|^\theta Y_{[2^{\nu_1-1}]}^\theta(f)_p$$

Так как в силу условий (α) и (β)

$$\sum_{\nu=1}^{s}\left|\psi(2^\nu)\right|^\theta Y_{2^\nu}^\theta \leqslant 2\sum_{\nu=1}^{s}\left(\sum_{k=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu}\frac{1}{k}\right)\left|\psi(2^\nu)\right|^\theta Y_{2^\nu}^\theta \ll$$

$$\ll \sum_{\nu=1}^{s}\sum_{k=2^{\nu-1}+1}^{2^\nu}\frac{|\psi(k)|^\theta}{k}Y_k^\theta=\sum_{k=2}^{2^s}\frac{|\psi(k)|^\theta}{k}Y_k^\theta$$

то из (8) следует утверждение для приближения одномерным углом.

Докажем теорему для приближения двухмерным углом. Исходим из разложения

(9) $$f-U_{l_1 l_2}f=\sum_{i=1}^{9}A_i$$

причем

$$A_1=f-S_{2^{s_1}2^{s_2}}^{*}f,\quad A_2=-I_{l_1}^1 A_1,\quad A_3=-I_{l_2}^2 A_1,\quad A_4=I_{l_1 l_2}A_1$$

$$A_5=S_{2^{s_1}}\left[f-I_{l_1}^1 f-S_{2^{s_2}}f+I_{l_1}^1 S_{2^{s_2}}f\right],\quad A_6=-I_{l_2}^2 A_5$$

$$A_7=S_{2^{s_2}}\left[f-S_{2^{s_1}}f-I_{l_2}^2 f+S_{2^{s_1}}I_{l_2}^2 f\right],\quad A_8=-I_{l_1}^1 A_7$$

$$A_9=S_{2^{s_1}2^{s_2}}(f-U_{l_1 l_2}f)$$

Очевидно, что

(10) $$\sum_{i=1}^{4}\|A_i\|_p^\theta \ll Y_{2^{s_1}2^{s_2}}^\theta(f)_p$$

Обозначим $A_5 = S_{2^{s_1}} F - S_{2^{s_1}} I^1_{l_1} F$, $F = f - S_{2^{s_2}} f$. Для оценки $\| A_5 \|$ применим метод одномерного случая, (см. (2), вместо f пишем F). Так как $S_{\mu_1} F - F = -(f - S^*_{\mu_1 2^{s_2}} f)$, то приходим к неравенству

$$\| A_5 \|^\theta \langle\langle \varphi^\theta_1 (l_1) \sum_{\nu_1=0}^{s_1} | \psi^1_{l_1} ([2^{\nu_1-1}]) |^\theta Y^\theta_{[2^{\nu_1-1}]2^{s_2}} (f)_p$$

и потом, учитывая условие (δ),

$$\| A_5 \|^\theta \langle\langle \varphi^\theta_1 (l_1) \varphi^\theta_2 (l_2) | \psi^2_{l_2} (2^{s_2}) |^\theta \sum_{\nu_1=0}^{s_1} | \psi^1_{l_1} ([2^{\nu_1-1}]) |^\theta Y^\theta_{[2^{\nu_1-1}]2^{s_2}} (f)_p. \tag{11}$$

Тем же способом получаем

$$\| A_7 \|^\theta \langle\langle \varphi^\theta_1 (l_1) \varphi^\theta_2 (l_2) | \psi^1_{l_1} (2^{s_1}) |^\theta \sum_{\nu_2=0}^{s_2} | \psi^2_{l_2} ([2^{\nu_2-1}]) |^\theta Y^\theta_{2^{s_1}[2^{\nu_2-1}]} (f)_p \tag{12}$$

Ясно, что

$$\| A_6 \| \langle\langle \| A_5 \|, \quad \| A_8 \| \langle\langle \| A_7 \|. \tag{13}$$

Для оценки $\| A_9 \|$ обозначим

$$A_9 = S_{2^{s_1}} \Phi - S_{2^{s_1}} I^1_{l_1} \Phi, \qquad \Phi = S_{2^{s_2}} f - I^2_{l_2} S_{2^{s_2}} f$$

Тогда

$$\| A_9 \|^\theta \langle\langle \varphi^\theta_1 (l_1) \sum_{\nu_1=0}^{s_1} \| S_{2^{\nu_1}} (p^1_{l_1} \Phi) - S_{[2^{\nu_1-1}]} (p^1_{l_1} \Phi) \|^\theta. \tag{14}$$

Так как

$$\Phi = \varphi_2 (l_2) \sum_{\nu_2=0}^{s_2} [S_{2^{\nu_2}} (p^2_{l_2} f) - S_{[2^{\nu_2-1}]} (p^2_{l_2} f)],$$

где

$$p^2_{l_2} f = \frac{A_0 (x_1) (f)}{2} + \sum_{k_2=1}^{2^{s_2}} \psi^2_{l_2} (k_2) A_{k_2} (x_1) (f)$$

то

$$\begin{aligned} \| A_9 \|^\theta \langle\langle \varphi^\theta_1 (l_1) \varphi^\theta_2 (l_2) \sum_{\nu_1=0}^{s_1} \Big\| \sum_{\nu_2=0}^{s_2} \{ S_{2^{\nu_2}} [S_{2^{\nu_1}} (p^1_{l_1} (p^2_{l_2} f)) - S_{[2^{\nu_1-1}]} (p^2_{l_2} f))] - \\ - S_{[2^{\nu_2-1}]} [S_{2^{\nu_1}} (p^1_{l_1} (p^2_{l_2} f)) - S_{[2^{\nu_1-1}]} (p^1_{l_1} (p^2_{l_2} f))] \} \Big\|^\theta. \end{aligned} \tag{15}$$

Применением теоремы Литлливуд-Пэли, (см. получение (4)) из (15) следует

$$\| A_9 \|^\theta \langle\langle \varphi^\theta_1 (l_1) \varphi^\theta_2 (l_2) \sum_{\nu_1=0}^{s_1} \sum_{\nu_2=0}^{s_1} \| Q \|^\theta \tag{16}$$

где

$$Q = S_{2^{\nu_1}} (p^1_{l_1} T) - S_{[2^{\nu_1-1}]} (p^1_{l_1} T), \quad T = S_{2^{\nu_2}} (p^2_{l_2} f) - S_{[2^{\nu_2-1}]} (p^2_{l_2} f)$$

Напишем $Q=S_{2^{\nu_1}}(p^1_{l_1}T)-T-[S_{[2^{\nu_1-1}]}(p^1_{l_1}T)-T]$ и применим равенство (5). В полученном выражении фигурируют величины $S_{\mu_1}T-T$. Когда T выразим с помощью равенства (5) (положить $L=f$), то получим

$$S_{\mu_1}T-T=\sum_{\mu_2=[2^{\nu_2-1}]}^{2^{\nu_2}-1}(f-S^*_{\mu_1\mu_2})\,\Delta\,\psi^2_{l_2}(\mu^2)+ \tag{17}$$
$$+(f-S^*_{\mu_2 2^{\nu_2}}f)\,\psi^2_{l_2}(2^{\nu_2})-(f-S^*_{\mu_1[2^{\nu_2-1}]}f)\,\psi^2_{l_2}([2^{\nu_2-1}]).$$

Подставляя (17) в выражение для Q получаем суммы (пять сумм и четыре члена вне сумм), из которых на основании условий (α), (β), (γ) следует

$$\|Q\|\langle\langle\,|\psi^1_{l_1}([2^{\nu_1-1}])\,\psi^2_{l_2}([2^{\nu_2-1}])|\,Y_{[2^{\nu_1-1}][2^{\nu_2-1}]}(f)_p \tag{18}$$

Теперь из (9) на основании (10), δ-условия, (11), (12), (13), (16), (18) получаем

$$\|f-U_{l_1 l_2}f\|\langle\langle$$
$$\langle\langle\,\varphi_1(l_1)\,\varphi_2(l_2)\left\{\sum_{\nu_1=0}^{s_1+1}\sum_{\nu_2=0}^{s_2+1}|\psi^1_{l_1}([2^{\nu_1-1}])\,\psi^2_{l_2}([2^{\nu_2-1}])|^{\theta}\,Y^{\theta}_{[2^{\nu_1-1}][2^{\nu_2-1}]}(f)_p\right\}^{\frac{1}{\theta}}$$

и этим заканчиваем доказательство теоремы.

Следствие 1. *Пусть в условиях теоремы* $\varphi_j(l_j)\downarrow 0$, $\psi^j_{l_j}(k_j)\to\psi^j(k_j)$, $(l_j\to\infty)$, $|\psi^j_{l_j}(k_j)|\leqslant C|\psi^j(k_j)|$ *для всех* l_j, *причем константа* C *не зависит от* l_j *и* k_j. *Обозначим*

$$V_pI=\left\{f\in L_p:\|f-U_{l_{i_1}\ldots l_{i_m}}f\|_p=O\left[\prod_{j=1}^{m}\varphi_{i_j}(l_{i_j})\right],\quad l_{i_j}=1,2,\ldots\right\},$$

$$Y(I,p,\psi,\varepsilon)=\left\{f\in L_p:Y_{k_{i_1}\ldots k_{i_m}}(f)_p=O\left[\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{(k_{i_j}+1)^{\varepsilon}\,|\psi^{i_j}(k_{i_j})|}\right],\quad \varepsilon>0,\right.$$
$$\left.k_{i_j}=0,1,2,\ldots\right\},$$

$$Y(I,p,\varphi)=\left\{f\in L_p:Y_{l_{i_1}\ldots l_{i_m}}(f)_p=O\left[\prod_{j=1}^{m}\varphi_{i_j}(l_{i_j})\right],\quad l_{i_j}=1,2,\ldots\right\},$$

причем предполагаем, что соотношения справедливы для всех наборов индексов $i_1,\ldots,i_m$, $(1\leqslant i_j\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m\leqslant n)$. *Тогда имеет место вложение*

$$Y(I,p,\psi,\varepsilon)\subset V_pI\subset Y(I,p,\varphi),\quad 1<p<\infty.$$

Классы V_pI являются классами насыщения для приближения углом указанными сингулярными интегралами.

Пример 1. Пусть ядро Рисса $\mathcal{K}_{l_j}^j(t)$ дано равенством

$$\mathcal{K}_{i_j}^j(t)=\frac{1}{2}+\sum_{\nu=1}^{l_j}\left(1-\frac{\nu^{r_j}}{(l_j+1)^{r_j}}\right)\cos\nu t,\quad r_j>0,\quad l_j=1,2,\ldots,\quad (j=1,\ldots,n).$$

Обозначим

$$V_pR^{r_1\cdots r_n}=\left\{f\in L_p:\left\|f-U_{l_{i_1}\cdots l_{i_m}}f\right\|=O\left[\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{(l_{i_j}+1)^{r_{i_j}}}\right],\right.$$

$$\left. l_j=0,1,2,\ldots,\quad (1\leqslant i_j\leqslant n,\quad 1\leqslant j\leqslant m\leqslant n)\right\}$$

и пусть $S_p^{r_1\cdots r_n}H(0,2\pi)^n=S^{r_1\cdots r_n}H$ „смешанные" классы Никольского. На основании теоремы 1 и теоремы о конструктивной характеристике классов $S^{r_1\cdots r_n}H$, (которая доказана М. К. Потаповым, [3], т. 7), получаем вложение

$$S_{\substack{r_1^{(1)}\cdots r_n^{(1)}\\ p}}H\subset V_pR^{r_1\cdots r_n}\subset S_p^{r_1\cdots r_n}H,\quad 1<p<\infty,$$

если только $0<r_j<r_j^{(1)}$, $(j=1,\ldots,n)$.

Следствие 2. *Пусть*

$$E_{l_1\cdots l_n}(f)_p=\inf_{T_{l_1}\cdots l_n}\|f-T_{l_1\cdots l_n}f\|_p$$

где $T_{l_1\cdots l_n}$ *тригонометрический пiличом порядка* l_j *по переменной* x_j, $(j=1,\ldots,n)$. *Обозначим*

$$F(I,p)=\left\{f\in L_p:\left\|f-I_{l_1\cdots l_n}f\right\|_p=O\left[\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(l_j)\right],\quad l_j=1,2,\ldots\right\}$$

и пусть, для иллюстрации, интеграл $I_{l_1\cdots l_n}f$ *определен с помощью ядер Рисса,* $F(I,p)=F\left(R^{r_1\cdots r_n},p\right)$. *Тогда справедливо вложение*

$$H_{\substack{r_1^{(1)}\cdots r_n^{(1)}\\ p}}\subset F\left(R^{r_1\cdots r_n},p\right)\subset H_p^{r_1\cdots r_n},\quad 0<r_j<r_j^{(1)},\quad (1<p<\infty),$$

где H *классы Никольского* ([2], 5.5.7). Для получения этого вложения пользуются: теорема 1; конструктивная характеристика классов H выражена через неравенства ([2])

$$E_{l_1\cdots l_n}(f)_p\leqslant C\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{(l_j+1)^{r_j}},\quad (l_j=0,1,2,\ldots)$$

и соотношение (дано в доказательстве т. 10 в [1])

$$\left\|f-I_{l_1\cdots l_n}f\right\|=O\left[\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(l_j)\right]\Leftrightarrow$$

$$\left\|f-I_{l_j}^jf\right\|=O\left[\varphi_j(l_j)\right],\quad (l_j\to\infty),\quad j=1,\ldots,n.$$

Кстати отметим, что неравенство теоремы 1 можно дать в форме

$$\|f-U_{l_{i_1}\ldots l_{i_m}}f\| \leqslant C\left\{\sum_{k_{i_1}=0}^{l_{i_1}}\cdots\sum_{k_{i_m}=0}^{l_{i_m}}\prod_{j=1}^{m}\frac{\left|1-\gamma_{l_{i_j}}^{i_j}(k_{i_j})\right|^{\theta}}{k_{i_j}+1}\,Y_{k_{i_1}\ldots k_{i_m}}^{\theta}(f)_p\right\}^{\frac{1}{\theta}}.$$

Для этого надо условия соответствующие условиям $(\alpha-\delta)$ наложить на выражения $1-\gamma_{l_j}^{j}(k_j)$; например условие (δ') есть $0<C_4\leqslant\left|1-\gamma_{2^{s_j}}^{j}(l_j)\right|$.

Форма теоремы 1 более удобна для применения.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Berns H, Nessel R. J., *Contributions to the theory of saturation for singular integrals in several variables* IV. Neder. Akad. Wetensch. Proc. ser. A. 71, math. 30, (1968), 325—335.

[2] Никольский, С. М., *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*, Москва (1969), 1—480).

[3] Потапов М. К., *О приближении углом*, Труды конференции по конструктивной теории функций, Будапешт, (1972), 371—399.

Милош Томић