PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 26 (40), 1979, pp. 19–25

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ РАЗРЫВА В КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Рашит И. Алидема

(Сообщено 25. апреля 1979)

Введение. Рассматривается нелинейная система

$$\dot{x}_1 = a + b \operatorname{sgn} x_1 + c \operatorname{sgn} x_2, \quad \dot{x}_2 = d + e \operatorname{sgn} x_1 + f \operatorname{sgn} x_2, \tag{0.1}$$

где $a, b, \ldots, f$ непрерывные дифференцируемые функции от x_1, x_2 и при $x_1 \to 0$, $x_2 \to 0$,

$$\begin{cases} a = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + O\left(x_1^2 + x_2^2\right), \\ b = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + O\left(x_1^2 + x_2^2\right), \\ \vdots \\ f = f_0 + f_1 x_1 + f_2 x_2 + O\left(x_1^2 + x_2^2\right), \end{cases} \tag{0.2}$$

а $a_i, b_i, \ldots, f_i$ $(i = 0, 1, 2)$ — постоянные.

Система (0.1), полученная при $a = a_0$, $b = b_0, \ldots, f = f_0$, называется системой нулевого приближения, т. е.

$$\dot{x}_1 = a_0 + b_0 \operatorname{sgn} x_1 + c_0 \operatorname{sgn} x_2, \quad \dot{x}_2 = d_0 + e_0 \operatorname{sgn} x_1 + f_0 \operatorname{sgn} x_2. \tag{0.3}$$

Системы такого вида рассматривались, например, в [1].

В [2, 3] для системы (0.3) получены следующие необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости:

$$|c_0| > |a_0| + |b_0|, \quad |e_0| > |d_0| + |f_0|, \quad c_0 e_0 < 0, \tag{0.4}$$

$$f_0\left(b_0^2 + c_0^2 - a_0^2\right) < b_0 c_0 e^{-1}\left(e_0^2 + f_0^2 - d_0^2\right), \tag{0.5}$$

или, если (0.4) не выполнено,

$$b_0 < \big||a_0| - |c_0|\big|, \quad f_0 < \big||d_0| - |e_0|\big|, \tag{0.6}$$

$$|D_{01}| < D_0, \quad |D_{02}| < D_0, \tag{0.7}$$

где

$$D_0=\begin{vmatrix} b_0 & c_0 \\ e_0 & f_0 \end{vmatrix}, \quad D_{01}=\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ d_0 & f_0 \end{vmatrix}, \quad D_2=\begin{vmatrix} b_0 & a_0 \\ e_0 & d_0 \end{vmatrix}. \tag{0.8}$$

В этой работе исследуется устойчивость системы в критических случаях, когда коэффициенты системы нулевого приближения (0.3) лежат на границе области асимптотической устойчивости.

Рассмотрим три основных критических случая.

1. Назовем первым критическим случаем для системы (0.1) случай, когда для системы (0.3) точка (0.0) есть особая точка типа центр, т. е. (0.4) выполнено и в (0.5) равенство.

Исследуем вопрос об устойчивости этой точки для системы (0.1), учитыва члены первого порядка малости в (0.2).

Систему (0.1) с помощью преобразования $x_i=\lambda_i x_i^*$ $(x_i>0)$, $x_i=\mu_i x_i^*$ $(x_i<0)$, $i=1, 2$ приводим к виду

$$\begin{cases} \dot{x}_1=a_1 x_1+a_2 x_2+(b_1 x_1+b_2 x_2)\operatorname{sgn} x_1+(-1+c_1 x_1+c_2 x_2)\operatorname{sgn} x_2+O\left(x_1^2+x_2^2\right) \\ \dot{x}_2=d_1 x_1+d_2 x_2+(1+e_1 x_1+e_2 x_2)\operatorname{sgn} x_1+(f_1 x_1+f_2 x_2)\operatorname{sgn} x_2+O\left(x_1^2+x_2^2\right). \end{cases} \tag{1.1}$$

Теорема 1.1. *Если для системы* (1.1) *выполнено условие* $a_1+d_2<0$, *то решение* $x_1(t)\equiv 0$, $x_2(t)\equiv 0$ *асимптотически устойчиво, а при условии* $a_1+d>0$ — *неустойчиво.*

Доказательство. Методом последовательных приближений получим уравнение траектории с начальными условиями $x_1(0)=\delta>0$, $x_2(0)=0$,

$$x_1(t)=\delta+t(\alpha\delta-1)+\beta t^2+O(t^3), \quad x_2(t)=t(\gamma\delta+1)+\eta t^2+O(t^3), \tag{1.2}$$

где α, β, γ, η — постоянные, которые выражаются через a_i, b_i, ..., f_i $(i=1, 2)$.

Найдем точку пересечения траектории (1.2) с осью $0x_2$. Из второго уравнения (1.2) получаем $x_1(t_1)=0$, при $t_1=\delta+(\alpha+\beta)\delta^2+O(\delta^3)$. При этом

$$x_2(t_1)=\delta+A_1\delta^2+O(\delta^3), \quad A_1=\alpha+\beta+\gamma+\eta. \tag{1.3}$$

Рассмотрев продолжение этой траектории во второй, третьей и четвертой четвертях, получаем, что траектория снова пересечет ось $0x_1$, в точке

$$x_{m+1}=x_m+A_4 x_m^2+O\left(x_m^3\right), \quad A_4=2(a_1+d_2)=\text{const}.$$

Из этой оценки следует, что в случае $a_1+d_2<0$ при достаточно малом x_1 имеем $x_1>x_2>\cdots\to 0$.

Следовательно, решение $x_1(t)\equiv 0$, $x_2(t)\equiv 0$ асимптотически устойчиво. Если $A_4=\text{const}>0$, то решение $x_1(t)\equiv 0$, $x_2(t)\equiv 0$ — неустойчиво.

2. Назовем вторым критическим случаем для системы (0.1) случай, когда для системы (0.3) на одной из полуосей имеем положения равновесия, т. е. (0.4) не выполнено, (0.6) выполнено и в одной из формул (0.7) имеем равенство.

В тех случаях, когда решение, попавшее на ось координат. не может с нее сойти, скорость движения по этой оси определяется согласно [2,3]

$$\dot{x}_1 = \frac{1}{f}(D_1 \pm D), \ (x_2 = 0, \ x_1 \gtrless 0), \text{ если } |f| \geqslant |d \pm e|, \tag{2.1}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{b}(D_2 \pm D), \ (x_1 = 0, \ x_2 \gtrless 0), \text{ если } |b| \geqslant |b \pm c|, \tag{2.2}$$

где согласно (0.8),

$$D = \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} b & a \\ e & d \end{vmatrix}.$$

Покажем, что во втором критическом случае имеем $b_0 < 0$ или $f_0 < 0$. Если на полуоси $x_1 > 0$, $x_2 = 0$ есть положения равновссия для (0.3), то в силу (2.1) имеем $|f_0| \geqslant |d_0 \pm e_0|$. Отсюда и из (0.6) следует $f_0 < 0$.

Аналогично, если на полуоси $x_1 = 0$, $x_2 > 0$ (или $x_2 < 0$) имеем положения равновесия, то $b_0 < 0$.

Теорема 2.1. *Если для системы* (0.3) *все точки на одной из полуосей являются положениями равновесия, то нулевой решение системы* (0.1) *устойчиво, если*:

а) *на полуоси* $x_2 = 0$, $x_1 \gtrless 0$, *имеем* $\Delta_{1\pm} > 0$ (*неустойчиво, если* $\Delta_{1\pm} < 0$); (*Берутся или верхние знаки, или нижние*);

б) *на полуоси* $x_1 = 0$, $x_2 \gtrless 0$, *имеем* $\Delta_{2\pm} > 0$ (*неустойчиво, если* $\Delta_{2\pm} < 0$), *где*

$$\Delta_{1\pm} = \begin{vmatrix} a_0 \pm b_0 & c_1 \\ d_0 \pm e_0 & f_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 \pm b_1 & c_0 \\ d_1 \pm e_1 & f_0 \end{vmatrix}, \quad \Delta_{2\pm} = \begin{vmatrix} b_0 & a_2 \pm c_2 \\ e_0 & d_2 \pm f_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2 & a_0 \pm c_0 \\ e_2 & d_0 \pm f_0 \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Пусть на полуоси $x_1 = 0$, $x_2 > 0$ для системы (0.3) имеем $\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$. Тогда, согласно (2.2) $D_{02} + D_0 = 0$. Поэтому для системы (0.1) на полуоси $x_1 = 0$, $x_2 > 0$ с (0.2), имеем

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{b}(D_2 + D) = \frac{D_{02} + D_0 + x_2 \Delta_{2+}}{b_0 + b_2 x_2 + O(x_2^2)} + O(x_2^2). \tag{2.3}$$

так как $D_{02} + D_0 = 0$, $x_2 > 0$, $b_0 < 0$, то при достаточно малом $x_2 > 0$ имеем $b_0 + b_2 x_2 + O(x_2^2) < 0$. Из (2.3) следует: при $\Delta_{2+} > 0$ ($\Delta_{2+} < 0$) имеем $\dot{x}_2 = \varphi(x_2) < 0$ ($\dot{x}_2 = \varphi(x_2) > 0$), и решение $x_1 \equiv x_2 \equiv 0$ асимптотически устойчиво (неустойчиво).

Аналогично рассматриваются остальные три случая. Теорема доказана.

3. Назовем третьим критическим случаем для системы (0.1) случай, когда для системы (0.3) в одной из формул (0.6) имеем равенство, (0.4) не выполнено, (0.7) выполнено и только в одной четверти вектор скорости $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ параллелен оси.

В лемме 3.2 будет доказано, что в этом случае этот вектор направлен от другой оси.

Лемма 3.1. *Если хотя бы в одной из четвертей для системы* (0.3),

$$\dot{x}_1 \operatorname{sgn} x_1 > 0, \quad \dot{x}_2 \operatorname{sgn} x_2 > 0, \tag{3.1}$$

то нулевое решение неустойчиво и этот случай не является критическим.

Доказательство. В критических скучаях коэффициенты системы (0.3) лежат на границе области асимптотической устойчивости, т. е. можно их изменить сколь угодно мало так, что система будет асимптотически устойчивой.

В случае (3.1) при достаточно малых изменениях коэффициентов неравенства (3.1) сохраняются, значит, в рассматриваемой четверти $|x_1|$ и $|x_2|$ возрастают, и асимптотической устойчивости не может быть. Таким образом, случай (3.1) не может быть критическим.

Лемма 3.2. *Пусть* (0.4) *не выполнено,* (0.7) *выполнено и в одной из формул* (0.6) *имеем равенство, а в другой знак* $<$. *Тогда в одной из четвертей вектор скорости для системы* (0.3), *параллелен одной оси и направлен от другой оси.*

Доказательство. Пусть

$$b_0 = \big| |a_0| - |c_0| \big|. \tag{3.2}$$

Покажем, что тогда в одной из четвертей $\dot{x}_1 = 0$.

Если $a_0 c_0 < 0$, то $\big| |a_0| - |c_0| \big| = |a_0 + c_0|$, значит $b_0 = |a_0 + c_0|$. Тогда или $a_0 + c_0 \geqslant 0$, $b_0 = a_0 + c_0$ и во второй четверти $\dot{x}_1 = a_0 - b_0 + c_0 = 0$, или $a_0 + c_0 < 0$, $b_0 = -(a_0 + c_0)$ и в первой четверти $\dot{x}_1 = 0$.

Если $a_0 c_0 > 0$, то аналогично доказывается, что в третьей или четвертой четверти $\dot{x}_1 = 0$. Если одно из чисел a_0 или c_0 равно 0, то $b_0 = |a_0 \pm c_0|$ и в двух четвертях $\dot{x}_1 = 0$. В этом случае, если $c_0 = 0$, то $D_{01} \pm D_0 = \begin{vmatrix} a_0 \pm b_0 & c_0 \\ d_0 \pm e_0 & f_0 \end{vmatrix} = 0$, что противречит (0.7).

Докажем, что при этом в одной из четвертей вектор $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ направлен от оси $0x_2$. Пусть это неверно, например, в первой четверти $\dot{x}_1 = 0$, $\dot{x}_2 < 0$. Так как $b_0 > 0$, в силу (3.2), то во второй четверти $\dot{x}_1 < 0$, и в третьей или четвертой четверти $x_1 \dot{x}_1 > 0$. Если в четвертой четверти $\dot{x}_1 > 0$, то если там $\dot{x}_2 < 0$, то этот случай не критический по лемме 3.1; если же там $\dot{x}_2 > 0$, то $f_0 < 0$, и при $x_2 = 0$, $x_1 > 0$ имеем $\dot{x}_1 > 0$; тогда из (2.1) следует $D_{01} + D_0 < 0$, что противоречит (0.7); если же в третьей четверти $x \dot{x}_1 > 0$, то проводим аналогично рассуждения, пользуясь тем, что $\dot{x}_1 < 0$ во второй и третьей четверти.

Лемма 3.3. *Если выполнено условие*

$$a_0 + b_0 + c_0 = 0, \quad d_0 + e_0 + f_0 = \beta_0 > 0, \tag{3.3}$$

$$\alpha_2 = a_2 + b_2 + c_2 < 0, \tag{3.4}$$

то в первой четверти траектория системы (0.1), *выходящая из точки* $x_1 = \delta > 0$, $x_2 = 0$, *где* $0 < x_1 < \delta_1$, δ_1 — *достаточно мало, попадает на ось* $x_2 > 0$, $x_1 = 0$ *в точку*

$$x_{02} = \sqrt{-\frac{2\delta\beta_0}{\alpha_2}} + O(\delta). \tag{3.5}$$

Если выполнено (3.3) *и* $\alpha_2>0$, *то нулевое решение неустойчиво.*

Доказательство. Из системы (0.1), с начальными условиями $x_1(0)=\delta$, $x_2(0)=0$ имеем

$$\begin{cases} x_1(t)=\delta+\alpha_1\delta t+\left[\alpha_1^2\delta+\alpha_2(\beta_0+\beta_1\delta)\right]\dfrac{t^2}{2}+O(t^3+t\delta^2), \\ x_2(t)=(\beta_0+\beta_1\delta)t+[\beta_1\delta(\alpha_1+\beta_2)+\beta_0\beta_2]\dfrac{t^2}{2}+O(t^3+t\delta^2). \end{cases}$$

Потребуем, чтобы это решение вышло на ось $x_2>0$, $x_1=0$.

Из уравнения $x_1(t_1)=0$ имеем при $\alpha_2\beta_0<0$,

$$t_1=\pm\sqrt{-\frac{2\delta}{\alpha_2\beta_0}+O(\delta^{3/2})}=+\sqrt{-\frac{2\delta}{\alpha_2\beta_0}}+O(\delta). \tag{3.6}$$

Подставляем это в выражение $x_2(t)$, получаем (3.5).

Если же выполнено (3.3) и $\alpha_2>0$, то вблизи точки (0, 0) на оси $0x_2$ ($x_2>0$) имеем $\dot{x}_1>0$, а при $0<x_1<\varepsilon$, (ε-мало), $0<x_2<\varepsilon$ имеем $\dot{x}_2\geqslant\mathrm{const}>0$. Поэтому нулевое решение неустойчиво.

Лемма 3.4. *Если в системе* (0.3) *выполнены условия* (3.3), (3.4) *и*

$$a_0-b_0+c_0>0, \tag{3.7}$$

нулевое решение неустойчиво, то (0.7) *не выполнено и этот случай — не критический.*

Доказатеьство. Из (3.3) и (3.7), $b_0<0$; на ось $0x_2(x_2>0)$, $\dot{x}_2=\frac{1}{b_0}(D_{02}+D_0)=d_0+e_0+f_0>0$. Значит $D_{02}+D_0<0$, и (0.7) не выполнено, т.е. это не критический случай. Лемма доказана.

Так как мы рассматриваем случаи, когда только в одной четверти вектор $(\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ для (0.3) параллелен оси, то остается рассмотреть только случай, когда во второй четверти

$$\dot{x}_1=a_0-b_0+c_0=u_2<0,\quad \dot{x}_2=d_0-e_0+f_0=v_2<0. \tag{3.8}$$

Лемма 3.5. а) *Пусть для системы* (0.3) *выполнено*

$$\dot{x}_1=a_0-b_0+c_0=u_2<0,\quad \dot{x}_2=d_0-e_0+f_0=v_2<0. \tag{3.9}$$

Тогда траектория системы (0.1), *выходящая из точки* $(0, x_{02})$, *где* $0<x_{02}<\eta$, η — *достаточно мало, и проходящая во второй четверти, достигает оси* $0x_1$ *в точке*

$$x_{-01}=-\frac{u_2}{v_2}x_{02}+O(x_{02}^2). \tag{3.10}$$

Аналогичные утвержгения справедливы и для других четвертей.

б) *Если*

$$a_0-b_0-c_0=u_3>0,\quad d_0-e_0-f_0=v_3<0,$$

то траектория выходящая из точки $(x_{-01}, 0)$ *придет в точку* $(0, x_{-02})$, *где*

$$x_{-02} = -\frac{v_3}{u_3} x_{-01} + 0\left(x_{-01}^2\right). \tag{3.10'}$$

в) *Если*

$$u_4 = a_0 + b_0 - c_0 > 0, \quad v_4 = d_0 + e_0 - f_0 > 0,$$

то траектория выходящая из точки ординат $(0, x_{-02})$, *пападает на ось абцисс* $x_1 > 0$, $x_2 = 0$ *в точку*

$$x_{01} = -\frac{u_4}{v_4} x_{-02} + 0\left(x_{-02}^2\right). \tag{3.10''}$$

Доказательство. Покажем только утверждение а). Из условия леммы следует, что для системы (0.1) во второй четверти вблизи точки (0, 0) имеем

$$\dot{x}_1 = u_2 + O(|x_1| + |x_2|) < 0, \quad \dot{x}_2 = v_2 + O(|x_1| + |x_2|) < 0. \tag{3.11}$$

Интегрируя систему (3.11) с начальными условиями: $x_1(t_1) = 0$, $x_2(t_1) = x_{02} > 0$, при $t = t_1 + \tau$, где $\tau > 0$, получаем

$$\begin{cases} x_1(t_1 + \tau) = u_2 \tau + O(\tau^2 + \tau x_{02}), \\ x_2(t_1 + \tau) = x_{02} + v_2 \tau + O(\tau^2 + \tau x_{02}). \end{cases} \tag{3.12}$$

Так как $u_2 < 0$, $v_2 < 0$, то x_1 и x_2 убывают. Как при доказательстве леммы 3.3, получаем, что решение (3.12), достигает оси $0x_1$ $(x_1 < 0)$ при

$$\tau = -\frac{x_{02}}{v_2} + O\left(x_{02}^2\right) = \tau_2,$$

в точке

$$x_1(t_1 + \tau_2) = -\frac{u_2}{v_2} x_{02} + O\left(x_{02}^2\right) = x_{-01}. \tag{3.13}$$

Лемма 3.6. *Пусть выполнены условия* (3.9), (0.7) *и*

$$a_0 - b_0 - c_0 > 0, \quad d_0 - e_0 - f_0 > 0, \tag{3.14}$$

тогда на оси $x_2 = 0$, $x_1 < 0$ *имеем* $\dot{x}_1 > \text{const} > 0$.

Доказательство. Из (3.9), (3.14) имеем $f_0 < 0$. Тогда при $x_2 = 0$, $-\delta_1 < x_1 < 0$, δ_1 — достаточно мало, получаем $\dot{x}_1 = \frac{1}{f_0}(D_{01} - D_0) + O(x_1) > \text{const} > 0$, так как $D_0 > D_{01}$ в силу (0.7). Лемма доказана.

Если система (0.3) удовлетворяет условиям (3.9),

$$u_3 = u_0 - b_0 - c_0 \leqslant 0, \quad v_3 = d_0 - e_0 - f_0 \geqslant 0, \tag{3.15}$$

то $f_0 < 0$, и (0.7) не выполняется.

Это не третьий критический случай.

Случай $u_3 < 0$, $v_3 < 0$ не является критическим по лемме 3.1.

В третьей четверти остается рассмотреть случай (3.14) и

$$u_3 = a_0 - b_0 - c_0 > 0, \quad v_3 = d_0 - e_0 - f_0 < 0.$$

При условиях (3.3), (3.8) и $a_0-b_0-c_0\geqslant 0$ и в четвертой четверти случай $a_0+b_0-c_0\leqslant 0$ невозможен. В самом деле, из (3.3) и (3.8) следует $b_0>0$, и в третьей четверти $a_0-b_0-c_0\geqslant 0$, а в четвертой четверти всегда имеем $a_0+b_0-c_0\leqslant 0$, откуда вытекает $b_0\leqslant 0$. Противоречие.

Случай $a_0+b_0-c_0>0$, $d_0+e_0-f_0<0$, не является критическим по лемме 3.1.

Теорема 3.1. *При условиях* $D_{01}<D_0$,

$$a_2+b_2+c_2<0,\ 0<-a_0-c_0=b_0<a_0-c_0,\ |d_0+f_0|<e_0<d_0-f_0, \tag{3.16}$$

положение равновесия системы (0.1) *устойчиво.*

Доказательство. Из (3.16) имеем $f_0<0$, при малых $x_1<0$ имеем $f_0<0$, $D_1<D$. Согласно формуле (2.1) на оси $0x_1$ ($x_1<0$, x_1 — мало), имеем $\dot{x}_1>\mathrm{const}>0$. Из (3.16) следует, что в окрестности начала координат во второй четверти $\dot{x}_1<0$, $\dot{x}_2<0$, в третьей и четвертой $\dot{x}_1>0$, $\dot{x}_2>0$. Поэтому в окрестности начала координат все решения из третьей четверти попадают или на ось $0x_1$ ($x_1<0$), или на ось $0x_2$ ($x_2<0$), затем или входит в точку 0 по этой оси, или переходят в четвертую четверть, затем в первую, откуда во вторую по лемме 3.3, затем на ось $0x_1$ ($x_1<0$) и входят в точку 0.

Следовательно, все решения из δ — окрестности точки 0 входят в точку 0, не выходя при этом из некоторой ε — окрестности точки 0 (и $\varepsilon\to 0$, при $\delta\to 0$). Таким образом, решение $x_1\equiv 0$, $x_2\equiv 0$ асимптотически устойчиво.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия*

$$0<-a_0-c_0=b_0<a_0-c_0,\ a_2+b_2+c_2<0,\ -e_0<d_0-f_0<e_0,\ e_0>|d_0+f_0|,$$

тогда положение равновесия (0, 0) *системы* (0.1) *неустойчиво.*

Доказательство. В силу лемм 3.3, 3.5 и аналогичных оценок для третьей и четвертой четвертей траектория, выходящая, из точки (δ, 0) пересекает координатные полуоси в точках $(0, x_{02})$, $(x_{-01}, 0)$, $(0, x_{-02})$, $(x_{01}, 0)$, где (считаем сокращенно)

$$x_{02}=O(\delta^{\frac{1}{2}}),\quad x_{-01}=O(\delta^{\frac{1}{2}}),\quad x_{-02}=O(\delta^{\frac{1}{2}}),\quad x_{01}=C\delta^{\frac{1}{2}}+O(\delta).$$

Откуда при достаточно малых δ:

$$x_{01}>2\delta,$$

и решение уходит от начала координат, т.е. решение системы неустойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Худов В. Ф. *Механика твердого тела*, 1969, № 4, стр. 23—29.

[2] Филиппов А. Ф., *Математический сборник* т. 51, № 1, 1960, стр. 99—128.

[3] Филиппов А. Ф., *Исследование системы дифференциальных уравнений с двумя пересекающимися линиями разрыва*, Вестник МГУ, серия математика и механика, 1979, № 6.