PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 26 (40) 1979, pp. 215—228

МОДУЛИ ГЛАДКОСТИ И КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

М. К. Потапов и М. Бериша

(Поступило 19 февраля 1979)

Вопросу об оценке модуля гладкости 2π — периодических функций одного переменного снизу или сверху через коэффициенты Фурье этой функции посвящено много работ. Достаточно отметить здесь известную оценку коэффициента Фурье через модуль непрерывности, (см. например [1], стр. 79) и оценку модуля гладкости через коэффициенты Фурье (для монотонно убывающих коэффициентов), полученную С. Алянчичем (см. [2], стр. 288—289). В нашей работе приводятся оценки снизу и сверху модуля гладкости через коэффициенты Фурье и в качестве примера на применение этих оценок находятся необходимые и достаточные условия в терминах коэффициентов Фурье для того, чтобы функция принадлежала классу Бесова.

§ 1. Будем писать, что $f(x) \in L_p$, если $f(x)$ есть 2π-периодическая функция, которая

1) при $1 \leqslant p < \infty$ измерима и

$$\|f\|_p = \Big(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx\Big)^{1/p} < \infty.$$

2) при $p = \infty$ непрерывна и

$$\|f\|_\infty = \|f\|_C = \max_x |f(x)|.$$

Через $\omega_k(f, t)_p$ обозначим модуль гладкости в метрике L_p порядка k функции $f(x)$ т.е.

$$\omega_k(f, t)_p = \sup_{|h| \leqslant t} \|\Delta_h^k f(x)\|_p,$$

где

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} C_k^\nu f(x + \nu h).$$

Рад Фурье функции $f(x)$ обычно будем записывать в комплексной форме, т.е.

$$f(x) \sim \sum_{|\nu|=0}^{\infty} c_\nu e^{i\nu x}$$

где

$$c_\nu = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-it\nu}\, dt.$$

Частную сумму ряда Фурье функции $f(x)$ будем обозначать $S_n(x, f)$ т.е.

$$S_n(x, f) = \sum_{|\nu|=0}^{n} c_\nu e^{i\nu x}.$$

Через $E_n(f)_p$ обозначим наилучшее приближение функции $f(x)$ в метрике L_p при помощи тригонометрических полиномов порядка не выше, чем $n-1$, т.е.

$$E_n(f)_p = \inf \|f(x) - T_{n-1}(x)\|_p,$$

где $T_{n-1}(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$, α_k и β_k — действительные числа.

Для доказательства основных результатов работы нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. Если $f(x) \in L_p$ для некоторого p из промежутка $1 < p \leqslant 2$, то при любом натуральном k справедливо неравенство

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leqslant \frac{A_1}{n^k} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{kp-1} E_\nu^p(f)_p \right\}^{1/p}.$$

Если же $f(x) \in L_p$ для некоторого p из промежутка $2 \leqslant p < \infty$, то при любом натуральном k справедливо неравенство

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \geqslant \frac{A_2}{n^k} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{kp-1} E_\nu^p(f)_p \right\}^{1/p}$$

где положительные константы A_1 и A_2 не зависят от $f(x)$ и n.

Доказательство первого неравенства леммы содержится в работе [3], доказательство второго неравенства содержится в работе ([4], см. также [15]).

Лемма 2. Пусть $f(x) \in L_p$ для некоторого p из промежутка $1 < p < \infty$, пусть $f(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x$, где $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_\nu \geqslant a_{\nu+1} \geqslant \cdots \geqslant 0$ тогда справедливы неравенства

$$E_n(f)_p \leqslant A_1 \left\{ a_n n^{1-\frac{1}{p}} + \left[\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu^p \nu^{p-2} \right]^{1/p} \right\}.$$

$$E_n(f)_p \geqslant A_2 \left\{ \sum_{\nu=2n}^{\infty} a_\nu^p \nu^{p-2} \right\}^{1/p},$$

где положительные константы A_1 и A_2 не зависят от $f(x)$ и n.

Доказательство первого неравенства леммы 2 содержится в работе [5], а доказательство второго неравенства содержится в работе [6].

Лемма 3. Пусть $f(x)$ непрерывная функция такая, что $f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos\nu x$, где $a_\nu \geqslant 0$ тогда справедливо неравенство

$$E_n(f)_\infty \geqslant \frac{1}{4} \sum_{\nu=2n}^{\infty} a_\nu.$$

Доказательство леммы 3 содержится в работе [7].

Лемма 4. Пусть числа α, β и a_ν таковы, что $0<\alpha<\beta<\infty$, $a_\nu \geqslant 0$, тогда спрагедливо неравенство

$$\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\beta\right)^{1/\beta} \leqslant \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\alpha\right)^{1/\alpha}.$$

Доказательство леммы 4 содержится в книге [8] (см. [8], т. 19, стр. 43.).

Лемма 5. Пусть числа a_ν, b_ν и γ_ν таковы, что $a_\nu \geqslant 0$, $b_\nu \geqslant 0$ $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = a_n \gamma_n$ тогда:

1. для p из промежутка $1 \leqslant p < \infty$ справедливо неравенство

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty} b_\mu\right)^p \leqslant p^p \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (b_\nu \gamma_\nu)^p,$$

2. а для p из промежутка $0<p\leqslant 1$ справедливо неравенство

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \left(\sum_{\mu=\nu}^{\infty} b_\mu\right)^p \geqslant p^p \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (b_\nu \gamma_\nu)^p.$$

Доказательство леммы для $1 \leqslant p < \infty$ содержится в работе [9], для $0<p\leqslant 1$ доказательство аналогично.

Лемма 6. Пусть числа a_ν, b_ν и β_ν таковы, что

$$a_\nu \geqslant 0, \quad b_\nu \geqslant 0, \quad \sum_{\nu=n}^{\infty} a_\nu = a_n \beta_n$$

тогда:

1. для p из промежутка $1 \leqslant p < \infty$ справедливо неравенство

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \left(\sum_{\mu=1}^{\nu} b_\mu\right)^p \leqslant p^p \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (b_\nu \beta_\nu)^p,$$

2. а для p из промежутка $0<p\leqslant 1$ справедливо неравенство

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \left(\sum_{\mu=1}^{\nu} b_\mu\right)^p \geqslant p^p \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu (b_\nu \beta_\nu)^p.$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 5; заметим, что для $1 \leqslant p < \infty$ она содержится в работе [10].

Обозначим

$$B(c_\nu, q, k, n)=$$

$$=\begin{cases} |c_n|, \text{ если } q=1 \\ \dfrac{1}{n^k}\left[\sum\limits_{|\nu|=1}^{n}|c_\nu|^q|\nu|^{(k+1)q-2}\right]^{1/q}+\left[\sum\limits_{|\nu|=n+1}^{\infty}|c_\nu|^q|\nu|^{q-2}\right]^{1/q}, \text{ если } 1<q<\infty \\ \dfrac{1}{n^k}\sum\limits_{|\nu|=1}^{n}|c_\nu||\nu|^k+\sum\limits_{|\nu|=n+1}^{\infty}|c_\nu|, \text{ если } q=\infty. \end{cases}$$

§ 2. Теорема 1. *Пусть $f(x)\in L_p$ для фиксированного p из промежутка $1\leqslant p\leqslant\infty$ и пусть* $\theta_1=\min(2,p)$, $\theta_2=\max(2,p)$ *тогда справедливы неравенства*

$$A_1 B(c_\nu, \theta_1, k, n)\leqslant\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p\leqslant A_2 B(c_\nu, \theta_2, k, n) \tag{1}$$

где положительные константы A_1 и A_2 не зависят от $f(x)$ и n.

Доказательство. Сначала докажем неравенство

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p\leqslant A_2 B(c_\nu, k, n) \tag{2}$$

Если $B(c_\nu, \theta_2, k, n)=\infty$ то справедливость неравенства (2) очевидна. Будем дальше считать, что $B(c_\nu, \theta_2, k, n)<\infty$. Если p из промежутка $2\leqslant p<\infty$ то, применяя теорему Пэли (см. [1], стр. 217), имеем

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p=\sup_{|h|\leqslant\frac{1}{n}}\|\Delta_h^k f(x)\|_p\leqslant A_3\sup_{|h|\leqslant\frac{1}{n}}\left\{\sum_{|\nu|=1}^{\infty}|c_\nu|^p\left|2\sin\frac{\nu h}{2}\right|^{kp}|\nu|^{p-2}\right\}^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant A_3\sup_{|h|\leqslant\frac{1}{n}}\left\{\left[\sum_{|\nu|=1}^{n}|c_\nu|^p\left|2\sin\frac{\nu h}{2}\right|^{kp}|\nu|^{p-2}\right]^{1/p}+\left[\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty}|c_\nu|^p\left|2\sin\frac{\nu h}{2}\right|^{kp}|\nu|^{p-2}\right]^{1/p}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant A_3\sup_{|h|\leqslant\frac{1}{n}}\left\{\left[\sum_{|\nu|=1}^{n}|c_\nu|^p|\nu h|^{kp}|\nu|^{p-2}\right]^{1/p}+\left[\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty}|c_\nu|^p 2^{kp}|\nu|^{p-2}\right]^{1/p}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant A_4 B(c_\nu, p, k, n),$$

где константа A_4 не зависит от $f(x)$ и n.

Если p из промежутка $1\leqslant p\leqslant 2$ то, учитывая, что $\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p\leqslant$ $\leqslant A_5\,\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_2$ и применяя только что доказанную оценку (для $p=2$), получим, что $\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p\leqslant A_6 B(c_\nu, 2, k, n)$ где A_6 не зависит от $f(x)$ и n.

Наконец, если $p=\infty$ то, применяя теорему Ф. Рисса (см. [1], стр. 211), имеем

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_\infty = \sup_{|h|\leqslant\frac{1}{n}} \|\Delta_h^k f(x)\|_\infty \leqslant A_7 \sup_{|h|\leqslant\frac{1}{n}} \sum_{|\nu|=1}^{\infty} |c_\nu| \left|2\sin\frac{\nu h}{2}\right|^k =$$

$$= A_7 \sup_{|h|\leqslant\frac{1}{n}} \left[\sum_{|\nu|=1}^{n} |c_\nu| \left|2\sin\frac{\nu h}{2}\right|^k + \sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu| \left|2\sin\frac{\nu h}{2}\right|^k\right] \leqslant$$

$$\leqslant A_8 B(c_\nu, \infty, k, n),$$

где константа A_8 не зависит от $f(x)$ и n.

Таким образом, неравенство (2), доказано для всех p из промежутка $1\leqslant p\leqslant\infty$.

Теперь докажем неравенство

(3) $$B(c_\nu, \theta_1, k, n)\leqslant A_9\,\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p.$$

Если $p=1$, то это известный факт (см. [1], стр. 79).

Если p из промежутка $1<p\leqslant 2$ то применяя теорему Пэли, имеем

$$J_1 = \left(\sum_{|\nu|=n+1}^{\infty} |c_\nu|^p |\nu|^{p-2}\right)^{1/p} \leqslant A_{10} \|f(x)-s_n(x,f)\|_p.$$

Поскольку для p из промежутка $1<p<\infty$ справедливо (см. [10], стр. 77) неравенство

(4) $$\|f(x)-s_n(x,f)\|_p \leqslant A_{11} E_{n+1}(f)_p$$

то, применяя это неравенство и теорему Джексона, получим, что

(5) $$J_1 \leqslant A_{12}\,\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p,$$

где константа A_{12} не зависит от $f(x)$ и n.

Далее легко видеть, что

$$J_2 = \frac{1}{n^k}\left[\sum_{|\nu|=1}^{n} |c_\nu|^p |\nu|^{(k+1)p-2}\right]^{1/p} \leqslant A_{13}\left[\sum_{|\nu|=1}^{n} |c_\nu|^p \left|2\sin\frac{\nu}{2n}\right|^{kp} |\nu|^{p-2}\right]^{1/p}.$$

Опять применяя теорему Пэли, получим, что

$$J_2 \leqslant A_{14} \|S_n(x, \Delta_{1/n}^k f)\|_p$$

Поскольку для p из промежутка $1<p<\infty$ справедливо (см. [12] стр. 155) неравенство

(6) $$\|S_n(x, F)\|_p \leqslant A_{15} \|F(x)\|_p,$$

то

(7) $$J_2 \leqslant A_{16} \|\Delta_{1/n}^k(f)\|_p \leqslant A_{16}\,\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p,$$

где константа A_{16} не зависит от $f(x)$ и n. Из справедливости неравенства (5) и (7) вытекает справедливость неравенства (3) для p из промежутка $1<p\leqslant 2$.

Наконец, если p из промежутка $2\leqslant p<\infty$ то, учитывая, что

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \geqslant A_{17}\,\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_2$$

и применяя только что доказанную оценку (для $p=2$), получим, что

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \geqslant A_{18}\, B(c_\nu, 2, k, n)$$

где константа A_{18} не зависит от $f(x)$ и n.

Таким образом, неравенство (3) доказано для всех p из промежутка $1\leqslant p\leqslant\infty$.

Из справедливости неравенств (2) и (3) вытекает справедливость теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $f(x)\in L_p$ для фиксированного p из промежутка $1<p<\infty$ и пусть $f(x)\sim\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\cos\nu x$, где $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_\nu\geqslant a_{\nu+1}\geqslant\cdots\geqslant 0$, тогда справедливы неравенства*

$$A_1\, B(a_\nu, p, k, n)\leqslant\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leqslant A_2\, B(a_\nu, p, k, n)\Bigg) \tag{8}$$

где положительные константы A_1 и A_2 не зависят от $f(x)$ и n.

Доказательство. Сначала докажем неравенство

$$B(a_\nu, p, k, n)\leqslant A_2\,\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p. \tag{9}$$

Для p из промежутка $1<p\leqslant 2$ справедливость этого неравенства доказана выше (см. теорему 1).

Пусть теперь p из промежутка $2\leqslant p<\infty$, тогда применяя лемму 2, затем теорему Джексона и свойства модуля гладкости, имеем

$$\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu^p \nu^{p-2}\right)^{1/p} \leqslant A_4 E_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}(f)_p \leqslant A_5\,\omega_k\left(f, \frac{1}{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\right)_p \leqslant A_6\,\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p. \tag{10}$$

Заметим далее, что поскольку $a_\nu\downarrow$, то

$$a_\nu^p \nu^{p-1}\leqslant A_7 \sum_{\mu=\left[\frac{\nu}{2}\right]}^{\nu} a_\mu^p \mu^{p-2} \leqslant A_8 \sum_{\mu=2\left[\frac{\nu}{4}\right]}^{\infty} a_\mu^p \mu^{p-2}.$$

Применяя затем лемму 2, получим, что

$$a_\nu^p \nu^{p-1}\leqslant A_9 E^p_{\left[\frac{\nu}{4}\right]}(f)_p.$$

Теперь, применяя эту оценку и лемму 1, имеем

$$\frac{1}{n^k}\left\{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^p\, \nu^{(k+1)p-2}\right\}^{1/p} \leqslant \frac{A_{10}}{n^k}\left\{\sum_{\nu=1}^{n} E^p_{\left[\frac{\nu}{4}\right]}(f)_p\, \nu^{kp-1}\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_{11}}{n^k}\left\{\sum_{\mu=0}^{\left[\frac{n}{4}\right]} E^p_\mu (f)_p (\mu+1)^{kp+1}\right\}^{1/p} \leqslant A_{12}\,\omega_k\left(f, \frac{1}{\left[\frac{n}{4}\right]+1}\right)_p \leqslant A_{13}\,\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p.$$

Из справедливости неравенств (10) и (11) вытекает справедливость неравенства (9) для p из промежутка $2\leqslant p<\infty$. Значит, неравенство (9) справедливо для всех p из промежутка $1<p<\infty$. Теперь докажем неравенство

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leqslant A_2\, B(a_\nu, p, k, n). \tag{12}$$

Дль p из промежутка $2\leqslant p<\infty$ справедливость этого неравенства доказана выше (см. теорему 1).

Пусть теперь p из промежутка $1<p\leqslant 2$ тогда применяя лемму 1, затем лемму 2 и делая простые выкладки, получим:

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leqslant \frac{A_{14}}{n^k}\left\{\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{kp-1} E_\nu^p (f)_p\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_{15}}{n^k}\left\{\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{kp-1} a_\nu^p\, \nu^{p-1} + \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{kp-1} \sum_{\mu=\nu+1}^{n-1} a_\mu^p\, \mu^{p-2} + \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{kp-1} \sum_{\mu=n}^{\infty} a_\mu^p\, \mu^{p-2}\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_{16}}{n^k}\left\{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^p \nu^{(k+1)p-2} + \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu^{kp-1} \sum_{\mu=\nu}^{n-1} a_\mu^p\, \mu^{p-2} + \sum_{\mu=n}^{\infty} a_\mu^p\, \mu^{p-2} n^{kp}\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_{16}}{n^k}\left\{n^{kp} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu^p \nu^{p-2} + n^{(k+1)p-2} a_n^p + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^p\, \nu^{(k+1)p-2} + \sum_{\mu=1}^{n-1} a_\mu^p \mu^{p-2} \sum_{\nu=1}^{\mu} \nu^{kp-1}\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{A_{17}}{n^k}\left\{n^{kp} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu^p\, \nu^{p-2} + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^p\, \nu^{(k+1)p-2}\right\}^{1/p} \leqslant A_{18}\, B(a_\nu, p, k, n).$$

Таким образом, справедливость неравенства (12) доказана для всех p из промежутка $1<p<\infty$.

Из справедливости неравенств (9) и (12) вытекает справедливость теоремы 2.

Заметим, что неравенство (12) ранее другим способом доказал С. Алянчич (см. [2] стр. 288—289).

Теорема 3. *Пусть* $f(x)\in L_p$ *для фиксированного* p *из промежутка* $1\leqslant p<\infty$ *и пусть* $f(x)\sim\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \cos\nu x$ *где* $c_\nu=a_\mu\geqslant 0$ *для* $\nu=2^\mu$ *и* $c_\nu=0$ *для* $\nu\neq 2^\mu$, *тогда справедливы неравенства*

$$A_1 B(c_\nu, 2, k, n) \leqslant \omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leqslant A_2 B(c_\nu, 2, k, n) \tag{13}$$

где положителные константы A_1 *и* A_2 *не зависят от* $f(x)$ *и* n.

Доказательство. Сначала докажем неравенство

(14) $$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leqslant A_2 B(c_\nu, 2, k, n).$$

Применяя к функции $\Delta_h^k f$ первую лемму Зигмунда о функциях с лакунарными рядами Фурье (см. [12] стр. 216), имеем

$$\|\Delta_h^k f\|_p \leqslant A_3\left[\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2\left(2\sin\frac{\nu h}{2}\right)^{2k}\right]^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant A_3\left\{\left[\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2\left(2\sin\frac{\nu h}{2}\right)^{2k}\right]^{1/2} + \left[\sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_\nu^2\left(2\sin\frac{\nu h}{2}\right)^{2k}\right]^{1/2}\right\} \leqslant$$

(15) $$\leqslant A_4\left\{\left[h^{2k}\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2 \nu^{2k}\right]^{1/2} + \left[\sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_\nu^2\right]^{1/2}\right\}.$$

Поскольку $\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p = \sup\limits_{|h|\leqslant\frac{1}{h}} \|\Delta_h^k f\|_p$ то, применяя неравенство (15), получим, что $\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p \leqslant A_4 B(c_\nu, 2, k, n)$, т.е. получим справедливость неравенства (14).

Теперь докажем неравенство

(16) $$B(c_\nu, 2, k, n) \leqslant A_5\, \omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p.$$

Прежде всего отметим, что для любой периодической функции $F(x)\in L_p$, где p из промежутка $1\leqslant p<\infty$ справедливо неравенство

(17) $$\|F(x) - \sigma_{NM}(x, F)\|_p \leqslant A_6 \frac{N+M+1}{M+1} E_N(F)_p,$$

где

$$\sigma_{NM}(x, F) = \frac{1}{M+1}\sum_{\nu=0}^{M} S_{N+\nu}(x, F).$$

Возьмем для функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы 3, $N=2^\mu$, $M=2^\mu-1$; тогда для этих N и M получим, что $\sigma_{NM}(x,f)\equiv S_{2^\mu}(x.\ f)$. Применяя теперь неравенство (17), получим, что

(18) $$\|f(x) - S_{2^\mu}(f)\|_p \leqslant 2A_6 E_{2^\mu}(f)_p.$$

Теперь для любого натурального числа n найдем неотрицательное целое число μ из условия $2^\mu \leqslant n < 2^{\mu+1}$ тогда для функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы 3, $S_n(x, f)\equiv S_{2^\mu}(x, f)$ и поэтому, учитывая неравенство (18), получим справедливость неравенства

)19) $$\|f(x) - S_n(x, f)\|_p \leqslant A_7 E_{\left[\frac{n}{2}\right]}(f)_p.$$

Теперь, применяя вторую лемму Зигмунда о функциях с лакунарными рядами Фурье (см. [12] стр. 217), неравенство (19), теорему Джексона и свойства модуля гладкости, имеем

$$\left(\sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_\nu^2\right)^{1/2} \leqslant A_8 \|f(x)-S_n(x,f)\|_p \leqslant A_9 E_{\left[\frac{n}{2}\right]}(f)_p \leqslant A_{10}\,\omega_k\left(f, \frac{1}{\left[\frac{n}{2}\right]}\right)_p \leqslant$$

$$\leqslant A_{11}\,\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p. \tag{20}$$

Применяя еще раз вторую лемму Зигмунда, имеем

$$\frac{1}{n^k}\left(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2 \nu^{2k}\right)^{1/2} \leqslant A_{12}\left[\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2\left(2\sin\frac{\nu}{2n}\right)^{2k}\right]^{1/2} \leqslant A_{12}\left[\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2\left(2\sin\frac{\nu}{2n}\right)^{2k}\right]^{1/2} \leqslant \tag{21}$$

$$\leqslant A_{13}\|\Delta_{1/n}^k(f)\|_p \leqslant A_{13}\,\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_p$$

Из справедливости неравенств (20) и (21) вытекает справедливость неравенства (16).

А из справедливости неравенств (14) и (16) вытекает справедливость теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть* $f(x)\in L_1$ *и пусть* $f(x)\sim\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos\nu x$ *где*

$$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_\nu\geqslant a_{\nu+1}\geqslant\cdots\geqslant 0,\quad a_{\nu+2}-2a_{\nu+1}+a_\nu\geqslant 0,$$

$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = 0(na_n)$, *тогда справедливы неравенства*

$$A_1 B(a_\nu, 1, k, n) \leqslant \omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_1 \leqslant A_2 B(a_\nu, 1, k, n),$$

где положительные константы A_1 *и* A_2 *не зависят от* $f(x)$ *и* n.

Доказательство. Неравенство $A_1 B(a_\nu, 1, k, n) \leqslant \omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_1$ известно (см. [I] стр. 79).

Неравенство

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right) \leqslant A_2 B(a_\nu, 1, k, n)$$

доказали С. Алянчич и М. Томич (см. [13] стр. 275).

Теорема 5. *Пусть* $f(x)\in C$ *и пусть* $f(x)\sim\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu\cos\nu x$ *где* $c_\nu = a_\mu \geqslant 0$ *для* $\nu=2^\mu$ *и* $c_\nu=0$ *для* $\nu\neq 2^\mu$, *тогда справедливы неравенства*

$$A_1 B(c_\nu, \infty, k, n) \leqslant \omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_C \leqslant A_2 B(c_\nu, \infty, k, n),$$

где положительные константы A_1 *и* A_2 *не зависят от* $f(x)$ *и* n.

Доказательство. Справедливость неравенства

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_C \leqslant A_2 B(c_\nu, \infty, k, n) \tag{22}$$

доказана выше (см. теорему 1).

Теперь докажем неравенство

$$B(c_\nu, \infty, k, n) \leqslant A_3 \omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_C. \tag{23}$$

Как показано в работе [14] (см. стр. 34), справедливо неравенство

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_\nu \leqslant A_4 E_n(f)_c. \tag{24}$$

Применяя теперь теорему Джексона, получим, что

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_\nu \leqslant A_5 \omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_C. \tag{25}$$

Далее легко видеть, что

$$\frac{1}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \nu^k \leqslant A_6 \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \left(2\sin\frac{\nu}{2n}\right)^k.$$

Применяя теорему Сидона (см. [14], стр. 33), и проводя простые выкладки, получим, что

$$\frac{1}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \nu^k \leqslant A_7 \|\Delta_{1/n}^k S_n\|_C \leqslant A_7 \omega_k\left(S_n, \frac{1}{n}\right)_C \leqslant A_7\left[\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_C + \omega_k\left(f-S_n, \frac{1}{n}\right)_C\right] \leqslant$$

$$\leqslant A_8\left[\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_C + \|f-S_n\|_C\right] \leqslant A_8\left[\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_C + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} c_\nu\right]$$

Применяя неравенство (25), приходим к справедливости неравенства

$$\frac{1}{n^k}\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \nu^k \leqslant A_9 \omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_C. \tag{26}$$

Из справедливости неравенств (25) и (26) вытекает справедливость неравенства (23). А из справедливости неравенств (22) и (23) вытекает справедливость теоремы 5.

Теорема 6. *Пусть $f(x) \in C$, пусть $f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x$, где $a_\nu \geqslant 0$ и пусть $k = 2l$, тогда справедливы неравенства*

$$A_1 B(a_\nu, \infty, k, n) \leqslant \omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_C \leqslant A_2 B(a_\nu, \infty, k, n)$$

где положительные константы A_1 и A_2 не зависят от $f(x)$ и n.

Доказательство. Справедливость неравенства

$$\omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_C \leqslant A_2 B(a_\nu, \infty, k, n) \tag{26}$$

доказана выше (см. теорему 1).

Теперь докажем неравенство

$$B(a_\nu, \infty, k, n) \leqslant A_3 \omega_k\left(f, \frac{1}{n}\right)_C \tag{27}$$

Если $k=2l$ то $\Delta_h^{2l} S_n(f) = (-1)^l \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \left(2\sin\frac{\nu h}{2}\right)^{2l} \cos\nu(x+lh)$. Поэтому

$$\| \Delta_{1/n}^{2l} S_n(x, f) \|_C \geqslant \Delta_{1/n}^{2l} S_n\left(-\frac{l}{n}, f\right) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \left(2\sin\frac{\nu}{2n}\right)^{2l} \geqslant \frac{A_4}{n^{2l}} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \nu^{2l}.$$

отсюда получаем после очевидных выкладок, что

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^{2l}} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \nu^{2l} &\leqslant A_5 \omega_{2l}\left(S_n, \frac{1}{n}\right)_C \leqslant A_5\left[\omega_{2l}\left(f, \frac{1}{n}\right)_C + \omega_{2l}\left(f-S_n, \frac{1}{n}\right)_C\right] \leqslant \\ &\leqslant A_6\left[\omega_{2l}\left(f, \frac{1}{n}\right)_C + \|f-S_n\|_C\right] \leqslant A_6\left[\omega_{2l}\left(f, \frac{1}{n}\right)_C + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu\right]\end{aligned} \tag{28}$$

Применяя лемму 3, теорему Джексона и свойства модуля гладкости, получим, что

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} a_\nu \leqslant A_7 E_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}(f)_C \leqslant A_8 \omega_{2l}\left(f, \frac{1}{\left[\frac{n+1}{2}\right]}\right)_C \leqslant A_9 \omega_{2l}\left(f, \frac{1}{n}\right)_C. \tag{29}$$

Из справедливости неравенств (28) и (29) следует справедливость неравенства (27). А из справедливости неравенств (26) и (27) следует справедливость теоремы 6.

§ 3. Будем, как обычно, писать, что $f(x) \in B(p, \theta, r)$ если:

1. $f(x) \in L_p$ для фиксированного p из промежутка $1 \leqslant p \leqslant \infty$,
2. θ — фиксированное число из промежутка $0 < \theta < \infty$,
3. r — фиксированное положительное число,
4. $J = \int_0^1 t^{-r\theta-1} \omega_k^\theta (f, t)_p \, dt < \infty$,

где $k > r$.

Легко видеть, что существуют положительные константы A_1, A_2, $A_{3\mu}$, A_4, не зависящие от $f(x)$ такие, что

$$\begin{aligned}A_1 \sum_{\mu=0}^{\infty} 2^{\mu r\theta} \omega_k^\theta\left(f, \frac{1}{2^\mu}\right)_p &\leqslant A_2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{r\theta-1} \omega_k^\theta\left(f, \frac{1}{\nu}\right)_p \leqslant J \leqslant \\ &\leqslant A_3 \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{r\theta-1} \omega_k^\theta\left(f, \frac{1}{\nu}\right)_p \leqslant A_4 \sum_{\mu=0}^{\infty} 2^{\mu r\theta} \omega_k^\theta\left(f, \frac{1}{2^\mu}\right)_p.\end{aligned} \tag{1}$$

Теорема 7. *Пусть* $f(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos \nu x$, *где числа* a_ν *таковы, что* $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_\nu \geqslant a_{\nu+1} \geqslant \cdots \geqslant 0$ (*при* $p=1$ *пусть дополнительно выполнены условия*: $a_{\nu+2}-2a_{\nu+1}+a_\nu \geqslant 0$, $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu = 0\,(na_n)$.) *Для того, чтобы* $f(x)\in B(p,\theta,r)$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$J_1=\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta \nu^{r\theta+\theta-\frac{\theta}{p}-1}<\infty .$$

Доказательство. Если $p=1$ то теорема 7 есть тривиальное следствие неравенства (1) и теоремы 4.

Если p из промежутка $1<p<\infty$, то из неравенства (1) и теоремы 2, вытекает, что

$$J\leqslant A_5 \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{r\theta-1}\left\{\nu^{-k\theta}\left[\sum_{\mu=1}^{\nu} a_\mu^p \mu^{(k+1)p-2}\right]^{\theta/p}+\left[\sum_{\mu=\nu}^{\infty} a_\mu^p \mu^{p-2}\right]^{\theta/p}\right\}.$$

Если $\theta/p\geqslant 1$, то применяя к сумме в первых фигурных скобках лемму 5, а к сумме во вторых лемму 7, получим, что

$$J\leqslant A_6 J_1 .$$

Если же $\theta/p\leqslant 1$ то, применяя неравенство (1), затем лемму 4 и, наконец, меняя порядок суммирования, получим

$$J\leqslant A_5\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{(r-k)\theta\nu}\left[\sum_{\mu=1}^{2^\nu} a_\mu^p \mu^{(k+1)p-2}\right]^{\theta/p}+\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{r\theta\nu}\left[\sum_{\mu=2^\nu}^{\infty} a_\mu^p \mu^{p-2}\right]^{\theta/p}\right\}=$$

$$=A_5\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{(r-k)\theta\nu}\left[\sum_{l=0}^{\nu-1}\sum_{\mu=2^l}^{2^{l+1}} a_\mu^p \mu^{(k+1)p-2}\right]^{\theta/p}+\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{r\theta\nu}\left[\sum_{l=\nu}^{\infty}\sum_{\mu=2^l}^{2^{l+1}} a_\mu^p \mu^{p-2}\right]^{\theta/p}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant A_6\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{(r-k)\theta\nu}\left[\sum_{l=0}^{\nu-1} a_{2^l}^p 2^{l(k+1)p-l}\right]^{\theta/p}+\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{r\theta\nu}\left[\sum_{l=\nu}^{\infty} a_{2^l}^p 2^{lp-l}\right]^{\theta/p}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant A_6\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{(r-k)\theta\nu}\sum_{l=0}^{\nu-1} a_{2^l}^\theta 2^{l(k+1)\theta-\frac{l\theta}{p}}+\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{r\theta l}\sum_{l=\nu}^{\infty} a_{2^l}^\theta 2^{l\theta-\frac{l\theta}{p}}\right\}=$$

$$=A_6\left\{\sum_{l=0}^{\infty} a_{2^l}^\theta 2^{l(k+1)\theta-\frac{l\theta}{p}}\sum_{\nu=l}^{\infty}\frac{1}{2^{\theta\nu(k-r)}}+\sum_{l=0}^{\infty} a_{2^l}^\theta 2^{l\theta-\frac{l\theta}{p}}\sum_{\nu=0}^{l} 2^{r\theta\nu}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant A_7\left\{\sum_{l=0}^{\infty} a_{2^l}^\theta 2^{l\left(r\theta+\theta-\frac{\theta}{p}\right)}\right\}\leqslant A_8\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^\theta \nu^{r\theta+\theta-\frac{\theta}{p}-1}=A_8 J_1 .$$

С другой стороны из неравенства (1) и теоремы 2 вытекает, что

$$J\geqslant A_9\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{(r-k)\theta\nu}\left[\sum_{\mu=1}^{2^\nu} a_\mu^p \mu^{(k+1)p-2}\right]^{\theta/p}+\sum_{\nu=1}^{\infty} 2^{r\theta\nu}\left[\sum_{\mu=2^\nu}^{\infty} a_\mu^p \mu^{p-2}\right]^{\theta/p}\right\}.$$

Если $\dfrac{\theta}{p} \geqslant 1$, то рассуждая как выше, получим, что

$$J \geqslant A_{10} J_1.$$

Наконец, из неравенства (1) и теоремы 2 вытекает, что

$$J \geqslant A_{11} \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{r\theta-1} \left[\sum_{\mu=1}^{\nu} a_{\mu}^{p} \mu^{(k+1)p-2} \right]^{\theta/p} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{r\theta-1} \left[\sum_{\mu=\nu}^{\infty} a_{\mu}^{p} \mu^{p-2} \right]^{\theta/p} \right\}.$$

Если же $\theta/p \leqslant 1$, то применяя к сумме в первых фигурных скобках лемму 5, а к сумме во вторых лемму 8, получим, что $J \geqslant A_{12} J_1$. Итак, доказано, что существуют положительные константы A_{13} и A_{14} такие, что $A_{13} J_1 \leqslant J \leqslant A_{14} J_1$, откуда и вытекает справедливость теоремы 7 в случае $1 < p < \infty$.

Аналогично доказывается теорема 7 и в случае $p = \infty$ только вместо теоремы 2 надо применить теорему 6 и при этом взять k—чётным числом.

Теорема 8. *Пусть* $f(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \cos 2^{\nu} x$ *где* $a_{\nu} \geqslant 0$. *Для того, чтобы* $f(x) \in B(p, \theta, r)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$J_2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}^{\theta} 2^{\nu r \theta} < \infty.$$

Доказательство. Если p из промежутка $1 \leqslant p < \infty$, то из неравенства (1) и теоремы 3 вытекает, что

$$J \leqslant A_5 \left\{ \sum_{\mu=1}^{\infty} 2^{\mu\theta(r-k)} \left[\sum_{\nu=1}^{\mu} a_{\nu}^{2} 2^{2\nu k} \right]^{\theta/2} \right\} + A_5 \left\{ \sum_{\mu=1}^{\infty} 2^{\mu\theta r} \left[\sum_{\nu=\mu}^{\infty} a_{\nu}^{2} \right]^{\theta/2} \right\}.$$

Если $\theta/2 \geqslant 1$, то, применяя к сумме в первых фигурных скобках лемму 5, а к сумме во вторых — лемму 7, получим, что $J \leqslant A_6 J_2$. Если же $\theta/2 \leqslant 1$, то применяя лемму 4, а затем меняя порядок суммирования получим:

$$J \leqslant A_5 \left\{ \sum_{\mu=1}^{\infty} {}^{\mu\theta(r-k)} \sum_{\nu=1}^{\mu} a_{\nu}^{\theta} 2^{\theta\nu k} + \sum_{\mu=1}^{\infty} 2^{\mu\theta r} \sum_{\nu=\mu}^{\infty} a_{\nu}^{\theta} \right\} =$$

$$= A_5 \left\{ \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}^{\theta} 2^{\theta\nu k} \sum_{\mu=\nu}^{\infty} 2^{\mu\theta(r-k)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}^{\theta} \sum_{\mu=1}^{\nu} 2^{\mu\theta r} \right\} \leqslant A_7 J_2.$$

С другой стороны, из неравенства (1) и теоремы 3 вытекает, что

$$J \geqslant A_8 \left\{ \sum_{\mu=1}^{\infty} 2^{\mu\theta(r-k)} \left[\sum_{\nu=1}^{\mu} a_{\nu}^{2} 2^{2\nu k} \right]^{\theta/2} \right\} + A_8 \left\{ \sum_{\mu=1}^{\infty} 2^{\mu\theta r} \left[\sum_{\nu=\mu}^{\infty} a_{\nu}^{2} \right]^{\theta/2} \right\}.$$

Если $\theta/2 \geqslant 1$ то, применяя лемму 4, получим, что

$$J \leqslant A_8 \left\{ \sum_{\mu=1}^{\infty} 2^{\mu\theta(r-k)} \sum_{\nu=1}^{\mu} a_{\nu}^{\theta} 2^{\theta\nu k} + \sum_{\mu=1}^{\infty} 2^{\mu\theta r} \sum_{\nu=\mu}^{\infty} a_{\nu}^{\theta} \right\} \geqslant A_9 J_2.$$

Если же $\theta/2 \leqslant 1$, то применяя к сумме в первых фигурных скобках лемму 5, а к сумме во вторых — лемму 7, получим, что $J \geqslant A_{10} J_2$.

Итак, доказано, что $A_{11} J_2 \leqslant J \leqslant A_{12} J_2$ откуда и вытекает справедливость теоремы 8 для p из промежутка $1 \leqslant p < \infty$.

Аналогично доказывается теорема 8 и в случае $p = \infty$, только вместо теоремы 3 надо применить теорему 5.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бари, Н. К., *Тригонометрические ряды*, Москва 1961.

[2] Aljančić S., *On the integral moduli of continuity in L_p ($1 < p < \infty$) of Fourier series with monotone coefficients* Proc. Amer. Math. Soc. 1966, 17, № 2, 287—294

[3] Тиман, М. Ф. *Обратные теоремы конструктивной теории функций в пространствах L_p*, Матем. сборник, 46 (88): I (1958), 125—132.

[4] Потапов М. К., *Теоремы Харди-Литтлвуда, Марцинкевича Литтлвуда-Пэли, приближение „углом" и вложение некоторых классов функций.* Mathematica, Vol. 14 (37), 2, 1972, 339—362.

[5] Конюшков А. А. *Наилучшие приближения тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье*, Матем. сборник т. 44 (86), № I (1958), 53—84.

[6] Конюшков А. А. *Наилучшие приближения при преобразовании коэффициентов Фурье методом средних арифметических и о рядах Фурье с неотрицательными коэффициентами*, Сибирский матем. журнал Ш. I, 56—78 (1962).

[7] Бари Н. К. *О наилучшем приближении тригонометрическими полиномами двух сопряженных фунций*, Изв. АН СССР, сер. матем. 19, 285—302 (1955).

[8] Харди Г. Б., Литтлвуд Д. Е. и Полиа Г., *Неравенства*, Г. И. И. Л. Москва, 1948, 1—456.

[9] Потапов М. К. *Об одной теореме вложения*, Mathematica, vol. 14 (37), 1, 1972, 123—146.

[10] Leindler L., *Über verschiedene Konvergenzarten trigonometricher Reihen. III (Bedingungen in der Metrik von L_p)*, Acta Scient. Math., v. 27, № 3—4 (1966), 205—215.

[11] Потапов М. К. *О наилучшем приближении аналитических функций многих переменных*, Учёные записки, Иваново, Гос. пед. институт т. 18, (1958).

[12] Зигмунд А. В. *Тригонометрические ряды*, ГОИТИ ИКТП СССР, 1939, 1—323.

[13] Aljančić S. and Tomić M., *Über den Stetigkeitsmodul von Fourier-Reihen mit monotonen koeffizienten*, Math. Z. 88 (1965), 274—284.

[14] Стечкин С. Б. *Наилучшие приближения функций, представимых лакунарными тригонометрическими рядами*, Доклады АН СССР, том 76, № 1 (1951), 33—36.

[15] Тиман М. Ф. *Особенности основных теорем конструктивной теории функций в пространствах L_p*. АН Аз. ССР, Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций, Баку, 1965.