PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 26 (40), 1979, pp. 161—166

ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ МНОЖЕСТВАХ В ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Небойша Лажетич

(Сообщено 16. сентября 1977.)

В этой работе рассматриваются так называемые ограниченные множества в произвольном (в общем случае-неотделимом) топологическом пространстве, определенные П. Ламбриносом в [2]. Используя удобную характеризацию этих множеств, в пункте 1. мы определяем и исследуем так называемые ограниченные фильтры. В терминах ограниченных фильтров характеризуются квазикомпактные топологические пространства и обобщается теорема 1, § 9, гл. I, [1]. В пункте 2. мы рассматриваем локально ограниченные топологические пространства, введенные тоже П. Ламбриносом в работе [3].

Всеми понятиями, не определенными в самой работе, мы будем пользоватся в смысле определений из книги [1].

1. Напомним определение ограниченного множества.

Определение 1.1 ([2]). — Множество B в топологическом пространстве E называется ограниченным, если всякое открытое покрытие пространства E содержит конечное открытое покрытие этого множества.

Легко видеть, что всякое относительно квазикомпактное множество ограниченно. Обратно верно в регулярном топологическом пространстве. Всякое подмножество ограниченного множества ограниченно. Объединение конечного числа ограниченных множеств ограниченное множество.

Теорема 1.1. — *Пусть B — произвольное множество в топологическом пространстве E. Следующие предложения эквивалентны:*

а) *Множество B ограниченно.*

б) *Если каждое конечное подсемейство $\{F_{i_k} : k=1, 2, \ldots, n\}$ произвольного семейства $\{F_i : i \in I\}$ замкнутых в пространстве E множеств удовлетворяет условию $\left(\bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k}\right) \cap B \neq \varnothing$, то $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \varnothing$.*

в) *Всякий фильтр $\mathscr{H}$ в пространстве E, содержащий мнжество B имеет по крайней мере одну точку прикосновения.*

г) *Всякий ультрафильтр $\mathscr{U}$ в пространстве E, содержащий множество B, сходится.*

Доказательство. — а) $\Rightarrow$ б). Пусть $\{F_i : i \in I\}$ — семейство замкнутых в пространстве E, множеств удовлетворяющее условию $\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} F_{i_k}\right) \cap B \neq \varnothing$ для каждого конечного подсемейства $\{F_{i_k} : k = 1, 2, \ldots, n\}$, и такое, что $\bigcap\limits_{i \in I} F_i = \varnothing$. Тогда семейство $\{\complement F_i : i \in I\}$ является открытым покрытием пространства E. Здесь через $\complement F_i$ обозначенно дополнение множества F_i. Существует конечное подсемейство $\{\complement F_{i_k} : k = 1, 2, \ldots, m\}$ такое, что $B \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} \complement F_{i_k}$, так как множество B ограниченно. Отсюда вытекает, что $B \cap \left(\bigcap\limits_{k=1}^{m} F_{i_k}\right) = \varnothing$. Полученное противоречие доказывает предложение.

б $\Rightarrow$ в) Пусть существует фильтр $\mathscr{H}$, содержащий множество B и не имеющий точек прикосновения. Это означает, что $\bigcap\limits_{H \in \mathscr{H}} \overline{H} = \varnothing$. Здесь через $\overline{H}$ обозначенно замыкание множества H. С другой стороны, семейство $\{\overline{H} : H \in \mathscr{H}\}$ замкнутых в пространстве E множеств такое, что каждое его конечное подсемейство имеет непустое пересечение со множеством B.

в) $\Rightarrow$ г). Всякая точка прикосновения ультрафильтра является его пределом.

г) $\Rightarrow$ в. Пусть $\mathscr{H}$-фильтр в пространстве E, содержащий множество B. Существует ультрафильтр $\mathscr{U}$, мажорируюущий фильтр $\mathscr{H}$. По предположению, ультрафильтр $\mathscr{U}$ сходится к некоторой точке x, и эта точка является точкой прикосновения фильтра $\mathscr{H}$.

в) $\Rightarrow$ б). Пусть $\{F_i : i \in I\}$ — семейство замкнутых в пространстве E множеств, обладающее свойством непустого конечного пересечения со множеством B. Это семейство порождает некоторый фильтр $\mathscr{H}$ ($H \in \mathscr{H}$ тогда и только тогда, когда H содержит пересечение конечного числа элементов упомянутого семейства), причем $B \in \mathscr{H}$ и $F_i \in \mathscr{H}$, $i \in I$. По предположению, фильтр $\mathscr{H}$ имеет точку прикосновения x в пространстве E. Отсюда вытекает, что $x \in F_i$ для каждого $i \in I$, т.е. $\bigcap\limits_{i \in I} F_i \neq \varnothing$.

б) $\Rightarrow$ а). Пусть $\{G_i : i \in I\}$ — открытое покрытие пространства E. Тогда $\bigcap\limits_{i \in I} \complement G_i = \varnothing$. Из предположения б) вытекает, что существует конечное подсемейство $\{\complement G_{i_k} : k = 1, 2, \ldots, n\}$ такое, что $\bigcap\limits_{k=1}^{n} \complement G_{i_k} \subset \complement B$. Отсюда получаем, что $B \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} G_{i_k}$, а это означает, что множество B ограниченно. Теорема доказана.

Определение 1.2. — Фильтр $\mathscr{H}$ в топологическом пространстве E называется ограниченным, если существует ограниченно: множество B принадлежащее фильтру $\mathscr{H}$.

Теорема 1.2. — *Пусть E — топологическое пространство. Тогда:*

а) *Всякий ограниченный фильтр в E имеет по крайней мере одну точку прикосновения.*

б) *Всякий ограниченный ультрафильтр в E сходится.*

в) *Для того чтобы пространство E было квазикомпактным, необходимо и достаточно, чтобы каждый фильтр в E был ограниченным.*

Доказательство. — Предложения а) и б) непосредственно вытекают из теоремы 1.1. Что касается предложения в), то необходимость вытекает из факта, что понятия ограниченности и квазикомпактности самого пространства E эквивалентны. Докажем достаточность. Предположим, что пространство E не квазикомпактно. Тогда существует семейство $\{F_i : i \in I\}$ замкнутых в пространстве E множеств, обладающее свойством непустого конечного пересечения, но такое, что $\bigcap_{i \in I} F_i = \varnothing$. Семейство всех конечных пересечений элементов семейства $\{F_i : i \in I\}$ порождает некоторый филчтр $\mathscr{H}$ в пространстве E. Фильтр $\mathscr{H}$ не ограниченный. Действительно, в противном случае существовало бы ограниченное множество B принадлежащее фильтру $\mathscr{H}$. Тогда $\left(\bigcap_{k=1}^{n} F_{i_k}\right) \cap B \neq \varnothing$ для любой конечной колекции индексов $\{i_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$. Поскольку множества F_i, $i \in I$, замкнуты, то в силу утверждения б) теоремы 1.1. получается, что $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \varnothing$, а это невозможно. Теорема доказана.

Теорема 1.3. — *Пусть $\mathscr{H}$ — ограниченный фильтр в топологическом пространстве E и P — множество всех точек прикосновения фильтра $\mathscr{H}$. Тогда каждая окрестность множества P принадлежит фильтру $\mathscr{H}$.*

Доказательство. — Предположим, что существует окрестность U множества P, не принадлежащая фильтру $\mathscr{H}$. Это означает, что $H \cap \complement U \neq \varnothing$ для каждого $H \in \mathscr{H}$. Пусть B — ограниченное множество принадлежащее фильтру $\mathscr{H}$. Семейство множеств $\{H \cap \complement U : H \in \mathscr{H}\}$ порождает некоторый фильтр $\mathscr{J}$. Фильтр $\mathscr{J}$ ограниченный, ибо ему принадлежит множество B. В силу утверждения а) теоремы 1.2., фильтр $\mathscr{J}$ имеет точку прикосновения x в пространстве E. Точка x не принадлежит множеству P. Действительно, если бы точка x принадлежала множеству P, то множество U было бы окрестностью точки x, а это невозможно.

С другой стороны, так как фильтр $\mathscr{J}$ мажорирует фильтр $\mathscr{H}$, то x — точка прикосновения и фильтра $\mathscr{H}$, т.е. принадлежит множеству P. Полученное противоречие доказывает теорему.

Следствие 1. — Пусть $\mathscr{H}$ — ограниченный фильтр в отделимом топологическом пространстве E. Для того чтобы фильтр $\mathscr{H}$ был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы он имел единственную точку прикосновения.

Следствие 2 ([1]). — Пусть P — множество всех точек прикосновения фильтра $\mathscr{H}$ в квазикомпактном топологическом пространстве E. Тогда каждая окрестность множества P принадлежит фильтру $\mathscr{H}$.

В конце этого пункте приведем без доказательства предложение, характеризующее ограниченные множества в факторпространстве.

Определение 1.3. — Пусть R — отношение эквивалентности в топологическом пространстве E. Множество $B \subset E$ называется R — ограниченным, если каждое покрытие пространства E, элементы которого открытые множества, насищенные по R, содержит конечное покрытие множества B.

Теорема 1.4. — *Пусть E — топологическое пространство, R — отношение эквивалентности в E и q — каноническое отображение пространства E на факторпространство E/R. Для того чтобы множество $B \subset E/R$ было ограниченным в факторпространстве E/R, необходимо и достаточно, чтобы множество $q^{-1}(B)$ было R — ограниченным в пространстве E.*

2. Рассмотрим теперь локально ограниченные топологические пространства.

Определение 2.1 ([3]). — Отделимое топологическое пространство E называется локально ограниченным, если каждая его точка имеет ограниченную окрестность.

Теорема 2.1. — *Пуст $\mathscr{H}$ — сходящийся фильтр в локально ограниченном пространстве E. Тогда $\mathscr{H}$ ограниченный фильтр.*

Следствие 1. — Пусть E — локально ограниченное пространство. Для того чтобы ультрафильтр $\mathcal{U}$ сходился в этом пространстве, необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{U}$ был ограниченным ультрафильтром.

Следствие 2. — Пусть E — отделимое топологическое пространство. Для того чтобы пространство E было локально ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы каждый сходящийся в этом пространстве фильтр был ограниченным.

Следующая теорема обобщает предложение 6, [3].

Теорема 2.2. — *Пусть E — локально ограниченное топологическое пространство. Тогда любое ограниченное множество в этом пространстве обладает фундаментальной системой ограниченных окрестностей.*

Доказательство. — Пусть B — ограниченное множество в пространстве E и U — произвольная окрестность множества B. Существует открытое множество G такое, что $B \subset G \subset U$. Обозначим через V_x ограниченную окрестность произвольной точки x, $x \in E$. Тогда будет $E = \bigcup_{x \in E} \mathring{V}_x$, где через $\mathring{V}_x$ обозначенна внутренность множества V_x. В силу ограниченности множества B, существует конечное семейство $\{V_{x_i} : i = 1, 2, \ldots, n\}$ такое, что $B \subset \bigcup_{i=1}^{n} \mathring{V}_{x_i}$. Рассмотрим следующие возможности:

1. — Пусть $V_{x_i} \subset U$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда будет

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{n} \overset{\circ}{V}_{x_i} \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i} \subset U,$$

откуда следует, что множество $\bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$ является желаемой ограниченной окрестностью множества B.

2. — Некоторое из множеств V_{x_i}, например V_{x_n}, удовлетворяет условию $V_{x_n} \cap \complement U \neq \varnothing$. Рассмотрим множество $V' = V_{x_n} \cap U$. Это множество ограниченно и содержит открытое множество $G \cap \overset{\circ}{V}_{x_n}$. Поскольку $(B \cap \overset{\circ}{V}_{x_n}) \subset (G \cap \overset{\circ}{V}_{x_n})$, то получаем

$$B \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} V_{x_i} \right) \cup (G \cap \overset{\circ}{V}_{x_n}) \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} V_{x_i} \right) \cup V' \subset U,$$

так что множество $\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} V_{x_i} \right) \cup V'$ — ограниченная окрестность множества B, которая содержится в окрестности U. Теорема доказана.

Определение 2.2. — Топологическое пространство E обладает фундаментальной последовательностью ограниченных множеств, если существует последовательность $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограниченных множеств такая, что любое ограниченное множество B в пространстве E содержится в некотором множестве B_{n_0}.

Определение 2.3. — Локально ограниченное пространство E называется счетным в бесконачности, если оно является счетным объединением ограниченных множеств.

Ясно, что каждое локально компактное пространство счетно в бесконечности является локально ограниченным пространством, счетным в бесконечности. Каждое локально ограниченное пространство, обладающее фундаментальной последовательностью ограниченных множеств является счетным в бесконечности. Докажем, что верно и обратное утверждение.

Теорема 2.3. — *Пуст E — локально ограниченное пространство счетно в бесконечности. Тогда в пространстве E существует возрастающая фундаментентальная последовательность ограниченных множеств, элементы которой открытые множества.*

Доказательство. — Представим пространство E в виде счетного объединения ограниченных монжеств: $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. В силу теоремы 2.2., каждое множество B_n имеет ограниченную окрестность U_n, причем $B_n \subset \overset{\circ}{U}_n \subset U_n$. Введем обозначение $V_n = \bigcup_{i=1}^{n} \overset{\circ}{U}_i$, $n \geqslant 1$. Тогда каждое из множеств V_n ограниченно и открыто, $V_{n-1} \subset V_n$, $n > 1$, и $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$. Пусть B — произвольное ограниченное множество в пространстве E. Тогда $B \subset \bigcup_{i=1}^{k} V_{n_i}$, где k — некоторое натуральное число. Если $n_0 = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$, то будет $B \subset V_{n_0}$, откуда вытекает, что $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальная последовательность ограниченных множеств в пространстве E.

Заметим наконец, что можно доказать и следующие предложения:

1. — Замкнутое подпространство локально ограниченного пространства, счетного в бесконечности, есть локально ограниченное пространство, счетное в бесконечности.

2. — Произведение конечного числа локально ограниченных пространств, счетных в бесконечности, есть локально ограниченное пространство, счетное в бесконечности.

Доказательства опираются на соответствующие свойства локально ограниченных пространств (см. [3]).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Бурбаки, Н., *Общая топология*, Наука, Москва, 1968.

[2] Lambrinos, P., *A Topological Notion of Boundedness*, Manuscripta Math., 10 (1973), 289—296.

[3] Lambrinos, P., *Locally bounded spaces*, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, Vol. 19, Part 4 (1975), 321—325.