PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 25 (39), 1979, pp. 51–54

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ И ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Юлка Кнежевич

(Сообщено 5 октобря 1978)

В работе рассматриваются достаточные условия для существования периодических и почти периодических решений некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений, представляющих собой вид уравнений изучаемых М. Петровичем и М. Бертолином.

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = (y - \varphi_1(x))(y - \varphi_2(x)) \cdots (y - \varphi_n(x)) \tag{1}$$

Предположим что все функции $\varphi_j(x)$ непрерывные, ограниченные для $x_0 \leqslant \leqslant x < +\infty$ не имеют совместных точек и что ω-периодические. Пусть

$$\inf \varphi_k(x) > \sup \varphi_e(x) \quad k > l \quad x \geqslant x_0 \tag{2}$$

Не уменьшая общность рассматривания предположим что

$$\varphi_1(x) < \varphi_2(x) < \cdots < \varphi_n(x) \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть данно дифференциальное уравнение* (1) *и пусть функции* $\varphi_j(x)\,(j=1, \ldots, n)$ *выполняют условия* (2) *и* (3). *Тогда уравнение имеет периодические решения.*

Доказательство. Сначела покажем что данное уравнение имеет ограниченных решений. Знак правой части дифференциального уравнения (1) в областях между соседными функциями $\varphi_j(x)\,(j=1, \ldots, n)$ переменно меняется. Условие (2) даёт возможность существования прямой $y = y_{ek} = \text{const}$ таковых что $\sup \varphi_e(x) < y_{ek} < \inf \varphi_k(x)$. Пусть $\varphi_j(x)$ любая функция и пусть $y = \overset{*}{y_j}$ одна такая прямая в области под функцией $\varphi_j(x)$ и $y = \overset{**}{y_j}$ одна такая прямая в области над $\varphi_j(x)$. Пусть в точках на $y = \overset{**}{y_j}$ знак правой части уравнения (1) положительный, а на $y = y_j^*$ отрицательний. Значить, множество точек строгого выхода $S = \{y = \overset{*}{y_j}\} \cup \{y = \overset{**}{y_j}\}$, $x \geqslant x_0$ и тогда по методу ретракта Т. Važевского ([1], [2]) в открытом множестве $\omega_j = \{x_0 \leqslant$

$\leqslant x < +\infty$, $y_i^* < y < y_j^{**}\}$ существует по крайней мере одно ограниченное решение. Но, если знак правой части уравнения (1) на $y = y_j^{**}$ отрицательный а на $y = y_j^*$ положительный тогда все решения входят в ω_j и все решения ограниченные для $x \geqslant x_0$. Значить, данное уравнение имеет ограниченных решений.

Для того чтобы доказать существование периодических решений применим теорему Массеры ([4]). Как правая часть уравнения (1) ω-периодическая функция и как доказано существование ограниченных решений для $x \geqslant x_0$, тогда применяя теорему Массеры следует что уравнение (1) имеет периодические решения.

В. А. Плисс ([5]) и В. М. Лебедева ([6]), ([7]) исследовали верхнюю границу числа ω-периодических решений дифференциального уравнения первого порядка с полиномиальной правой частью, т.е.

$$y' = p_0(x)y^n + p_1(x)y^{n-1} + \cdots + p_{n-1}(x)y + p_n(x) \tag{4}$$

где $n > 1$, $p_i(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$-непрерывные ω-периодические функции, причём $p_0(x)$-знакоопределенная функция. В работе ([6]) показано что при $n \geqslant 4$ уравнение (4) может допускат любое число $N < \infty$ периодических решений. При исследовании использовано представление решения в виде степенного ряда, так что метод исследования нельзя считать чисто качественым.

Методой качественного анализа (метод Важевского) показано существование также $N < \infty$ периодических решений по уже доказаной теореме.

Будем рассматривать и существование почти периодических решений для дифференциального уравнения (1).

Примечение. Если предположим что все функции $\varphi_j(x)$ $(j = 1, \ldots, n)$ почти периодические, можно похожим способом для уравнения (1) доказать существование почти периодическиих решений.

Предположим теперь, что все функции $\varphi_j(x)$, $j \in N$ непрерывные, ограниченые для $x_0 \leqslant x < \infty$, что не имеют совместных точек и что выполнены условия (2) и (3).

Теорема 2. *Пусть данно дифференциальное уравнение* (1) *и пусть выполнены верхние условия и условия* (2) *и* (3). *Тогда существует почти периодическое решение.*

Доказательство. Как и в предыдущей теореме можно доказать что в областях около $\varphi_j(x)$, $j \in N$ существуют ограниченные решения. Значить, существует решение $p(x, y) = 0$ уравнения (1) такое что для любого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $l = l(\varepsilon)$ такое что любой отрезок $[y_j^*(x_0), y_j^*(x_0) + l]$ содержит по меньшей мере одно число τ для которого выполнено неравенство

$$|p(x, y+\tau) - p(x, y)| < \varepsilon \quad -\infty < y < +\infty \quad x \geqslant x_0$$

т.е. решение $p(x, y) = 0$ явяется почти периодическим по y равномерно относительно x, для $x \geqslant x_0$.

2. Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений

$$(5)\qquad \begin{aligned} y' &= \prod_{j=1}^{n} (y-\varphi_j(x)) \\ z' &= \prod_{j=1}^{n} (z-\psi_j(y)) \end{aligned}$$

Пусть все функции $\varphi_j(x)$ и $\psi_j(y)\,(j=1, \ldots, n)$ непрерывные, ограниченные для $x_0 \leqslant x < +\infty$, $y_0 \leqslant y < +\infty$, не имеют совместных точек и что ω-периодические. Предположим что

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\inf \varphi_k(x) > \sup \varphi_e(x) \quad k > l \\ &\inf \psi_k(y) > \sup \psi_e(y) \end{aligned}$$

и что

$$(7)\qquad \begin{aligned} &\varphi_1(x) < \varphi_2(x) < \cdots < \varphi_n(x) \\ &\psi_1(y) < \psi_2(y) < \cdots < \psi_n(y) \end{aligned}$$

Теорема 3. *Пусть данна система дифференциальных уравнений* (5) *и пусть функции* $\varphi_j(x)$ *и* $\psi_j(y)\,(j=1, \ldots, n)$ *удовлетворяют верхние условия* (6) *и* (7). *Тогда существуют периодические решения.*

Доазательство. Сначала надо доказать что существуют асимптотически ограниченные решения. Рассмотрим любую из поверхностей $y=\varphi_j(x)$ и $z=\psi_j(y)$, и для каждой из этих рассмотрим их соседные области. Пусть $S_1=\{y=y_j^*\}$ $(S_3=\{z=z_j^*\})$ одна плоскость в соседной области под $\varphi_j(x)$ $(\psi_j(y))$ для $x \geqslant x_0$ и $y \geqslant y_0$, и $S_2=\{y=y_j^{**}\}$ $(S_4=\{z=z_j^{**}\})$ одна плоскость в соседной области над $\varphi_j(x)$ $(\psi_j(y))$ для $x \geqslant x_0$ и $y \geqslant y_0$. Эти плоскости образуют параллелепипед в пространстве. Значить, рассмотрим открытое множество $\omega = \{x \geqslant x_0,\ y_j^* < y < y_j^{**},\ z_j^* < z < z_j^{**}\} \subset R^3$. Со S_1^+ (S_1^-) обозначим что знак правой части уравнения (5) положительный (отрицательный) по этой плоскости. Обозначим со $fr\,\omega$ границу от ω. В зависимости от знака правой части уравнения (5) по сторонам параллелепипеда имеет место один из следующих случаев: 1. $fr\,\omega = S_1^+ \cup S_2^+ \cup S_3^+ \cup S_4^+$ 2. $fr\,\omega = S_1^- \cup S_2^- \cup S_3^- \cup S_4^-$ 3. $fr\,\omega = S_1^+ \cup S_2^+ \cup S_3^- \cup S_4^-$ 4. $fr\,\omega = S_1^- \cup S_2^- \cup S_3^+ \cup S_4^+$. Применяя метод ретракта ([9]) доказывается что в ω в случае 1. все решения асимптотически ограниченны. в случае 2. существует по крайней мере одно асимптотически ограниченное решение, и в случаях 3. и 4. существует класс асимптотически ограниченных решений. Значить, данна система (5) имеет класс ограниченных решений для $x \geqslant x_0$ и $y \geqslant y_0$. Правая часть системы (5) ω-периодическая функция тогда по теореме Массеры каждое ограниченное решение есть периодическое, и значить утврждение теоремы доказано.

Предположим теперь, что все функции $\varphi_j(x)$ и $\psi_j(y)$, $j \in N$ непрерывные, ограниченные для $x_0 \leqslant x < \infty$, $y_0 \leqslant y < \infty$ и что имеют место условия (5) и (7).

Теорема 4. *Пусть данна система дифференциальных уравнений* (5) *и пусть функции* $\varphi_j(x)$ и $\psi_j(y)$, $j \in N$ *удовлетворяют верхние условия и условия* (6) *и* (7). *Тогда существуют почти периодические решения.*

Доказательство. Как и в теореме 2 доказывается существование класса асимптотически ограниченных решений. Значить, существуют решения $f_{1k}(x, y, z) = 0$ и $g_{i1}(x, y, z) = 0$, $i, k \in N$ такие что для каждого $\varepsilon > 0$ существует положительное число $l = l(\varepsilon)$ такое что любой отрезок $[z_j^*(y_0), z_j^*(y_0) + l]$ т.е. $[y_j^*(x_0), y_j^*(x_0) + l]$ содержит по меньшей мере одно число τ для которого имеем

$$|f_{1k}(x, y, z+\tau) - f_{1k}(x, y, z)| < \varepsilon \quad i, k \in N, \quad x \geqslant x_0 \quad y \geqslant y_0$$

$$|g_{i1}(x, y+\tau, z) - g_{i1}(x, y, z)| < \varepsilon$$

т.е. эти решения почти периодические. Значить, для системы (5) доказано что существуют $F(x, y, z) = (f_{1k}(x, y, z))$ и $G(x, y, z) = (g_{i1}(x, y, z)$ почти периодические матрицы решений.

3. Рассмотрим уравнение

$$y' = \frac{\prod_{j \in A} (y - \varphi_j(x))^{\alpha_j}}{\prod_{i \in B} (y - \varphi_i(x))^{\alpha_i}} \tag{8}$$

которое исследовано в работе [2]. Эсли для функции $\varphi_s(x)\,(s = 1, \ldots, m)$ введём предположения как в теоремах 1 и 2 тогда пользуюсь результатами из работы [2] можно также доказать существование периодических или почти периодических режений.

ЛИТЕРАТУРА

[1] T. Wazevski, *Sur un principe topologique de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentialles ordinaires*, Ann. de la Soc. pol. de Math. T. XX, 279—313.

[2] M. Bertolino, *Solutions asymptotiques d'une équation différentielle au deuxième membre rationnel*, Mat. vesnik 3 (18) Sv. 4, 1966, 275—285.

[3] M. Bertolino, *Généralisation de „l'équation chimique" de Petrovitch*, Mat. vesnik 7 (22) sv. 1, 1970, 95—102.

[4] Jośe Massera, *The existence of periodic solutions of system of differential equations*, Duke Math. Journal 17 (1950), 457—475.

[5] В. А. Плисс, *Нелокальные проблемы теории колебаний*, „Наука" 127—130.

[6] В. М. Лебедева. *О количестве периодических решений дифференциального уравнения первого порядка с полинрмиальной частью*, Дифф. уравнения 4, № 8, 1968.

[7] В. М. Лебедева, Дифф ур. 5, № 6, 1969.

[8] H. Borh, *Almost periodic functions*, 1951.

[9] J. Knežević, *Asimptotska rešenja nekih sistema diferencijalnih jednačina*, Mat. vesnik 13 (28), 1976, 63—69.

[10] J. Knežević, Mat. vesnik 13 (28) 1976, 70—74.