PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 25 (39), 1979, pp. 149—152

# SUR LES ESPACES TONNELÉS ET BORNOLOGIQUES

*Stojan Radenović*

(Communiqué le 3. mars 1978.)

Soit $E$ un espace localement convexe séparé sur le corps des nombres réels ou complexes. $E'$ et $E^*$ sont le dual topologique et le dual algébrique et $\beta$ et $\beta^*$ sont les familles des sous-ensembles faiblement et fortement bornées de $E$. $E'_\beta$ et $E'_{\beta^*}$ ($E_\beta$ et $E_{\beta^*}$) sont les correspondantes topologies de la convergence uniforme sur les familles $\beta$ et $\beta^*$. Un sous-ensemble $A$ d'espace $E$ est faiblement (fortement) borné si et seulement si $A^\circ$ est un tonneau (tonneau bornivore) du faible dual $E'_\sigma$. Donc, les polaires de tous les tonneax (tonneaux bornivores) d'espace $E'_\sigma$ font une base fondamentale pour des sous-ensembles faiblement (fortement) bornés de $E$. Cela signifie que l'espace $E'_\beta$ ($E'_{\beta^*}$) possède pour la base de voisinages de zéro tous les tonneaux (tonneaux bornivores) d'espace $E'_\sigma$.

Pour tout espace localement convexe $E$ on a les sous-espaces suivantes du dual algébrique $E^*$: $\tilde{E}'$ ($\check{E}'$, $\dot{E}'$) est un sous-espace de $E^*$, constitue par les formes linéaires qui restent bornées dans tout faiblement borné (fortement borné, disque compact) de $E$. Nous dirons que $E'$ est clos (fortement clos, compactement clos) dans $E^*$ si $E'=\tilde{E}'$ ($E'=\check{E}'$, $E'=\dot{E}'$). On sait que l'espace $E$ est bornologique (ultra-bornologique) si et seulement si $E=E_\tau$ et $E'=\tilde{E}'$ ($E'=\dot{E}'$). Donc, $\tau(E, \tilde{E}')$ ($\tau(E, \dot{E}')$) est l'espace bornologique (ultra-bornologique) associé à l'espace $E$.

Dans ce travail nous prenons en considération le sous-espace $\check{E}'$ et nous l'appelons la fortement cloture du dual topologique $E'$ dans $E^*$. Nous donnons aussi la caractérisation des espaces qui sont tonnelés et bornologiques. Les notations et les termines sont comme à [3] et [4].

A la proposition suivante on donne la caractérisation de la fortement cloture $\check{E}'$ du duale $E'$ dans $E^*$ comme à ([3], Proposition 1.) pour la cloture $\tilde{E}'$.

Proposition 1: *Si* $[\bar{P}]$ *est le sous-espace de* $E^*$ *engendré par* $\bar{P}$ (*l'adhérence de* $P$ *dans* $E^*$ *pour la topologie* $E^*_\sigma$) *alors on a légalité:* $\check{E}' = \bigcap[\bar{P}]$ *lorsque* $P$ *parcourt l'ensemble des tonneax bornivores du faible dual* $E'_\sigma$.

Le théoréme qui suit est analogue au Théorème 1. de [3].

Théorème 1: *Si le dual topologique* $E'$ *d'espace* $E$ *est fortement clos dans* $E^*$, *et* $V'$ *est le sous-espace de* $E^*$ *de dimension finie,* $F' = E' + V'$ *est fortement clos dans* $E^*$.

Preuve: On peut supposer que dim $V' = 1$. Soit $V'$ engendré par une forme linéaire $v \in E^*/E'$. Il est évident que $E' + V' = F' \subseteq \check{F}'$. Si $u \notin F' = E' + V'$, alors en vertu de la proposition 1. il suffit de prouver qu'il existe un tonneau bornivore $P$ d'espace $F'_\sigma$ ainsi que: $u \notin \bar{P}$. En vertu de la

Proposition 1. *on existe un tonneau bornivore* $Q$ *d'espace* $E'_\sigma$ *ainsi que* $u \notin [\bar{Q}]$. $E'$ *est un sous-espace de* $F'$ *dont la codimension est égale à* 1 *et alors en vertu de* ([1], *Théorème*) *on existe le tonneau bornivore* $P$ *d'espace* $F'_\sigma$ *avec la propriété:* $P \cap E' = Q$ ($P = \bar{Q}^{F'_\sigma}$ *ou* $P = Q + L$ *où* $L$ *est l'enveloppe équilibré de* $\{u\}$). *Il est facile de vérifier quc* $u \notin [\bar{P}]$, *c'est-à-dire,* $u \notin \check{F}'$, *et alors* $F' = \check{F}'$.

Exemple: Soit $E$ un espace ultra-bornologique qui ne porte pas la plus forte topologie localement convexe. Alors, son dual topologique $E'$ est compactement clos, c'est-à-dire, $E' = \check{E}'$. En vertu de ([2], Théorème) l'espace $E$ a un hyperplan dense qui n'est pas ultra-bornologique. Alors, on existe une forme linéaire $u \in E^*$ ainsi que: $\langle u, x \rangle = 0$ pour tout $x \in H$ et il est facile de vérifier que $E' + [\{u\}] = E' + V'$ n'est pas compactement clos dans $E^*$.

Remark: 1: Soit $E'$ est clos (fortement clos, compactement clos) dans $E^*$ et $V'$ est le sous-espace de $E^*$ de dimension dénombrable. Nous ne savons pas est-ce que l'espace $F' = E' + V'$ clos (fortement clos, compactement clos) dans $E^*$.

Sachant que des sous-ensembles fortement bornés d'espace $E$ sont les sous-ensembles faiblement bornés d'espace $E_\beta$, avec la proposition suivante est donné le rapport entre la fortement cloture $\check{E}'$ et le dual topologique $E'_1$. d'espace $E_\beta$.

Proposition 2: *Si* $E' = \check{E}'$ *alors* $E'_1 = \check{E}'$. *Inversement est vrai si et seulement si l'espace* $E_\tau$ *est tonnelé.*

Preuve: Il est claire que $E' \subseteq E'_1 \subseteq \check{E}'$ et alors la première partie de la proposition est prouvée. Si de l'égalité $E'_1 = \check{E}'$ suit que $E' = \check{E}'$, alors $E_\beta = E_\tau$, donc, l'espace $E_\tau$ est tonnelé. Inversement, si $E'_1 = E'$ et si l'espaces $E_\tau$ est tonnelé, alors $E'_1 = E'$, c'est-à-dire, $E' = \check{E}'$.

A la proposition suivante on donne la condition suffisante et nécessaire pour que la cloture $\check{E}'$ soit égale à la fortement cloture $\check{E}'$.

Proposition 3: *Pour tout espace localement convexe E, les propositions suivantes sont équivalentes:*

a) $\beta = \beta^*$ *à l'espace* $E$;

b) $E'_\beta = E'_{\beta^*}$;

c) $\beta = \beta^*$ *à l'espace* $E'_\sigma$;

d) $E_\beta = E_{\beta^*}$;

e) $\tilde{E}' = \check{E}'$;

Preuve: Il est évident que a) $\Rightarrow$ b), c) $\Rightarrow$ d) et a) $\Rightarrow$ e). On a que b) $\Rightarrow$ c) puisque les espaces $E'_\sigma$ et $E'_{\beta^*}$ ont les mêmes sous-ensembles bornés. En vertu de cela d) $\Rightarrow$ a) et d) $\Rightarrow$ e). Si $\tilde{E}' = \check{E}'$, alors on a que $\tau(E, \tilde{E}') = \tau(E, \check{E}')$, c'est-à-dire, $\beta = \beta^*$ à l'espace $E$ car $\tau(E, \tilde{E}'$ et $\tau(E, \check{E}')$ sont les espaces bornologiques associés à $E_\tau$ et $E_\beta$. Cela signifie que e) $\Rightarrow$ a) et alors la proposition est prouvée.

On sait que l'espace $E$ est bornologique si et seuleuent si pour tout espace localement convexe $F$, toute application linéaire $f: E \to F$ bornée sur les bornées de $E$, est continue.

La définition suivante est analogue:

Définition 1: *L'espace E est dit* $\beta^*$*-bornologique si pour tout espace localement convexe F, toute application linéaire* $f: E \to F$ *bornée sur les fortement bornés de E, est continue.*

De la proposition suivante on voit que l'espace $E$ est $\beta^*$-bornologique si et seulement s'il est tonnelé et bornologique.

Proposition 4: *Pour tout espace localement convexe E, les assertions suivantes sont équivalentes:*

*b) E est* $\beta^*$*-bornologique;*

*b) E est tonnelé et bornologique;*

*c)* $E = E_\tau$ *et* $E' = \check{E}'$;

*d)* $E = E_\tau$ *et* $E'_{\gamma^*}$ *est complet;* ($E'_{\gamma^*}$ *– le dual* $E'$ *muni de la topologie de la convergence uniforme sur les suites qui convergent à zéro au sens de Mackey à l'espace* $E_\beta$).

*e) Tout disque absorbant les fortement bornés de E est un voisinage de zéro à E;*

Preuve: *a)* $\Rightarrow$ *b)* puisque l'application identitée $E \to E_\beta$ est bornée sur les fortement bornés de $E$, donc, elle est continue et alors on a que $E = E_\beta$, c'est-à-dire, $E$ est tonnelé. L'espace $E$ est bornologique car à l'espace tonnelé on a que $\beta = \beta^*$. *b)* $\Rightarrow$ *c)* en vertu de la proposition 3. et de la caractérisation des espaces bornologiques. *c)* $\Rightarrow$ *d)* puisque $\check{E}'$ est le complété d'espace $E'_{\gamma^*}$. *c)* $\Rightarrow$ *b)*

en vertu de la proposition 2. *b*) $\Rightarrow$ *a*): Si pour tout espace localement convexe $F, f: E \to F$ est une application linéaire bornée sur les fortement bornés de $E$, alors, $f$ est bornée sur les bornés de $E$ ($E$ est tonnelé et alors on a que $\beta = \beta^*$), donc, $f$ est continue puisque $E$ est bornologique. Il est évident que *b*) $\Rightarrow$ *e*) car à l'espace tonnelé on a que $\beta = \beta^*$. La proposition est prouvée.

Soit $\mathcal{U}^* = \{U^* \subseteq E$ et $U^*$ est le disque absorbant les fortement bornés de $E\}$ et $\mathcal{T}^*$ la topologie de $E$ qui a pour la base fondamentale de voisinages de zéro les éléments de $\mathcal{U}^*$. $(E, \mathcal{T}^*)$ est évident l'espace bornologique associé à la forte topologie $E_\beta$ d'espace $E$ et $\check{E}'$ est son dual topologique, c'est-à-dire: $(E, \mathcal{T}^*) = \tau(E, \check{E}')$. Si l'espace $(E, \mathcal{T}^*)$ est tonnelé, alors, il est facile de vérifier que $\mathcal{T}^*$ est la plus fine topologie localement convexe sur $E$, avec les mêmes fortement bornés comme $E$. Si $(E, \mathcal{T}^*)$ n'est pas tonnelé alors, on existe à $E$ un fortement borné qui n'est pas $\mathcal{T}^*$ – fortement borné. Dans le cas général nous définissons pour tout nombre ordinal $\alpha$ par:

$\mathcal{T}_\alpha = (\mathcal{T}_{\alpha-1})^*$, si $\alpha$ a un prédécesseur.

$\mathcal{T}_\alpha = \bigcup_{\alpha<\beta} \mathcal{T}_\beta$, si $\alpha$ est un ordinal limite.

Propositon 5: *Pour tout espace localement convexe E on existe un plus petit nombre ordinal bt ainsi que* $\mathcal{T}_{bt} = \mathcal{T}_{bt+1}$ (*$(E, \mathcal{T}_{bt})$ est un espace tonnelé et bornologique*).

Proposition 6: *Toute application linéaire continu d'un espace* $\beta^*$ – *bornologique F dans E est encore continu de F dans* $(E, \mathcal{T}_{bt})$.

Corollaire 1: *La topologie* $\mathcal{T}_{bt}$ *est la plus faible topologie tonnelé et bornologique plus forte de la topologie initiale de E.*

Remark: Nous ne savons pas existe – il espace localement convexe $E$ dont le dual fort est bornologique sans être tonnelé?

## BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Valdivia, *A hereditary property in locally convex spaces*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble; 21, 2 (1971), 1—2.

[2] M. Valdivia, *Sur certains hyperplans qui ne sont pas ultra-bornologique dans les espaces ultra-bornologique*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 284, Série A.939, 1977.

[3] I. Dieudonné, *Sur les propriétés de certaines espaces vectoriels topologiques*, Ann. Soc. Pol. Math., 25, (1952), p. 50—55.

[4] A. P. Robertson; *Topological vector spaces*, Cambridge Univ. Press, 1964.