PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 25 (39), 1979, pp, 143–147

SUR UNE PROPRIÉTÉ DE PERMANENCE DE CERTAINES CLASSES D'ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

Stojan Radenović

(Communiqué le 24. février 1978.)

Soit E un espace localement convexe séparé sur le corps des nombres réels ou complexes. Dans ce travail nous examinons le sous-espace de codimension finie d'espaces localement convexes de [1], [3], [4] et [6].

Dans le théorème suivant on prouve que le sous-espace de codimension finie d'un p-espace ([1], Définition (4.2)) est p-espace.

Théorème 1. *Si E est un p-espace et F son sous-espace de codimension finie, on a alors que F est p-espace.*

Preuve: En vertu de ([1], Corollaire (4.8)) le théorème il faut le prouver si F est un hyperplan dense. D'après ([8], Théorème 2.) on a alors que F est un p_R-espace ([1], Définition à la page 65), donc, en vertu de ([1], Proposition (4.5)) il faut prouver que F est un espace p-tonnelé ([1], Définition (3.1)). Cela signifie que d'après ([4], Proposition (1.1,2)) il faut prouver qu'un sous-ensemble $H\subset F'$ est équicontinu si sa restriction Hp à tout précompact P de F est équicontinue. Si H est un tel sous-ensemble, alors pour tout précompact $P\subset F$ on existe un voisinage de zéro U dans F ainsi que: $H\subset (P\cap U)^0\subset \subset P^0+U^0=\bar{P}^0+\bar{U}^0\subset 2(\bar{U}\cap\bar{P})^0$. De l'inclusion précédente et ([8], Théorème 2.) il suit que la restriction de sous-ensemble $\frac{1}{2}$ H à tout précompact de E est équicontinue, c'est-à-dire, $\frac{1}{2}$ H est équicontinu car E est un espace p-tonnelé. Donc, F est l'espace p-tonnelé puisque E' et $F'=E'$ ont les mêmes sous-ensembles équicontinus.

Si nous prenons à la manière des précompact les bornés ou les disques compacts on a alors b-espaces ou k-espaces. Dans [5] Nourdeddine a prouvé que le sous-espace de codimension finie d'un b-espace, est b-espace. Ce théorème de [5] on peut le prouver comme chez nous, c'est-à-dire, en utilisant à la manière des précompacts les bornés.

De l'exemple suivant on voit que le théorème analogue pour les k-espaces ne doit pas être juste.

Exemple 1: Soit H le sous-espace (hyperplan dense) d'espace ultra--bornologique E de ([9], Théorème.). En vertu de ([9], Théorème.) les disques compacts de sous-espace H sont de dimension finie, c'est-à-dire, $H_c' = H_\sigma'$. Si H est k-espace, alors H_σ' est complet, donc, $H_\sigma' = H_\sigma^*$. Cela signifie que l'espace H porte la plus forte topologie localement convexe car il est déjà tonnelé, c'est-à-dire, H est ultra-bornologique. En vertu de ([9], Théorème.) c'est absurde. Donc, le sous-espace de codimension finie d'un k-espace ne doit pas être k-espace.

Dans ([6], Définition 1.) nous avons défini deux nouvelles classes d'espaces localement convexes et nous les appelons "N_0-p-tonnelés" et „σ-p-tonnelés". L'espace E est N_0-p-tonnelé (resp. σ-p-tonnelé) si et seulement si tout N_0-p-tonneau (resp. σ-p-tonneau) est un voisinage de zéro dans E ([6], Théorèmes 1. et 2.). Nous dirons que p-tonneau V est N_0-p-tonnean (resp. σ-p-tonneau) si $V = \bigcap_{n=1}^{+\infty} Vn$ où (Vn) est une suite de voisinages disqués fermés de zéro dans E (resp. E_σ).

De l'example suivant on voit que le sous-espace fermé d'un espace σ-p-tonnelé (resp. N_0-p-tonnelé, p-tonnelé) ne doit pas être σ-p-tonnelé (resp. N_0-p-tonnelé, p-tonnelé).

Exemple 2: Soit E un espace métrisable et tonnelé non complet et E_σ' son dual faible. Si l'espace E_σ' est σ-p-tonnelé on a alors en vertu de ([6), Proposition 2.) que $(E_\sigma')_p' = (E_\sigma')_\beta' = E$ est semi complet, mais c'est absurde. D'après ([2], Théorème 1.1.) E_σ' est le sous-espace fermé d'un espace tonnelé, donc, d'un espace σ-p-tonnelé.

Sachant que les espaces E et pE ([1]. Proposition (4.1.)) ont les mêmes précompacts avec les mêmes topologies, nous prouvons le théorème suivant:

Théorème 2: *Soit V un p-tonneau (resp. N_0-p-tonneau, σ-p-tonneau) dans sous-espace F d'espace E. Si F est de codimension finie dans E on existe alors à E p-tonneau (resp. N_0-p-tonneau, σ-p-tonneau) W, ainsi que: $W \cap F = V$.*

Preuve: Soit V un p-tonneau de sous-espace F et soit pE comme à [1] p-espace associé à l'espace E. En vertu du théorème 1, le sous-espace F muni de la topologie induite par la topologie d'espace pE, est p-espace. Cela signifie que V est un voisinage de zéro dans cette topologie de sous-espace F. Si F est un hyperplan dense dans l'espace pE, alors F est dense dans E et il est évident que $W = \overline{V}$ est p-tonneau dans E avec la propriété: $W \cap F = V$. Si F est hyperplan fermé dans l'espace pE, on a alors $V = \overline{V}$ (si $F = \overline{F}$) ou $V \neq \overline{V}$ (si $\overline{F} = E$). Donc, il faut prendre $W = V + L$ (L est l'envoloppe équilibré quelque élément $x \notin F$) au première cas ou $W = \overline{V}$ au deuxième cas. Il est facile de vérifier que

$W=V+L$, c'est-à-dire, $W=\overline{V}$ est p-tonneau d'espace E ainsi que: $W\cap F=V$ et alors la preuve pour p-tonneau est terminé.

Maintenant, si $V=\bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$ est un N_0-p-tonneau de sous-espace F, alors V est un voisinage de zéro dans la topologie induite par la topologie d'espace pE. Si F est hyperplan dense dans l'espace pE on a alors F est dense dans E et $W=\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{V}_n$ est N_0-p-tonneau d'espace E ainsi que: $W\cap F=V$. Si F est hyperplan fermé dans l'espace pE, alors F peut être dense ou fermé dans E. Si F est hyperplan fermé dans E, il est évident que $W=\bigcap_{n=1}^{+\infty} (V_n+L)$ est N_0-p-tonneau dans E avec la propriété: $W\cap F=V$ (L est l'envoloppe équilibré quelque élément $x\notin F$). Au cas que F est hyperplan dense dans l'espace E, on a alors $W=\bigcap_{n=1}^{+\infty} \overline{V}_n \left(\text{si} \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n \not\subset F\right)$ ou $W=\bigcap_{n=1}^{+\infty} (\overline{V}_n+L) \left(\text{si} \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n \subset F\right)$. La preuve que $\bigcap_{n=1}^{+\infty} (\overline{V}_n+L)\cap F=V$ est comme à ([10], Théorème 1, cas 2. (b)).

Si $V=\bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$ est un σ-p-tonneau de sous-espace F, alors la preuve est semblable comme pour N_0-p-tonneau.

Corollaire 1: *Si E est un espace p-tonnelé (resp. N_0-p-tonnelé, σ-p-tonnelé) et F son sous-espace de codimension finie, on a alors que F est p-tonnelé (resp. N_0-p-tonnelé, σ-p-tonnelé).*

Question 1: Nous ne savons pas est-ce que le sous-espace de codimension finie d'un espace k-tonnelé ([4], Définition (1.1.1)) un espace k-tonnelé?

Dans [3] on a montré que l'espace du type (DF) on peut le définir en utilisant une famille arbitraire de bornées avec les conditions I, II et III de ([8], Lemme 1.). Il est naturel de se demander si tous sous-espace de codimension finie d'un espace du type $\mathcal{M}(DF)$ est du même type.

Dans les théorèmes suivants on donne la réponse à cette question pour quelques familles de bornées. Tout d'abord nous prouvons que E/F est du même type comme E, pour tout sous-espace fermé F et pour les sous-ensembles précompacts, compacts, fortement bornés et disques compacts.

Théorème 3: *Si F est un sous-espace fermé d'espace E du type $\mathcal{M}(DF)$* ([3], Définition 1.) *on a alors que E/F est du même type oú $\mathcal{M}$ est la famille des sous-ensembles précompact, compacts, fortement bornées et disques compacts.*

Preuve: En vertu de ([3], Théorème 5) l'espace E est du type (DF) et il est facile de prouver que $E'_{\mathcal{M}}=E_\beta'$. Cela signifie que tout borné d'espace E est relativement compact, précompact ou fortement borné. Sachant que E/F

est du type (DF) et que E_β' induit dans F^0 la topologie forte $\beta(F^0, E/F)$, on a alors que tout borné, c'est-à-dire, tout compact, précompact ou fortement borné de E/F est contenu dans limage canonique d'un borné, c'est-à-dire, d'un compact, précompact ou fortement borné. Donc, E/F est du même type comme E, si nous prenons les familles de sous-ensembles compacts, précompacts, disques compacts ou fortement bornées.

Théorème 4: *Si E est un espace du type $\mathcal{M}(DF)$ et F son sous-espace de codimension finie, on a alors que F est du même type, si $\mathcal{M}$ est la famille de sous-ensembles précompacts ou fortement bornées.*

Preuve: Si $F=\overline{F}$ on a alors que F est du même type comme E en vertu du théorème précédent. Soit F un hyperplan dense à E. D'après ([3], Théorème 5.) E est un espace du type (DF). On sait que F est l'espace du type (DF). Il faut prouver que tout borné de F est précompact, c'est-à-dire, fortement borné. Si A est un borné dans F, alors A est borné dans E donc, A est un précompact dans E car $E_p'=E_\beta'$. Cela signifie que A est un précompact dans F puisque $A\subset F$. Le fait que tout borné de F est fortement borné dans F suit en vertu des propositions suivantes:

Proposition 1: *Un sous-ensemble A d'un espace localement convexe E est fortement borné si et seulement si l'absorbé par chaque tonneau.*

Proposition 2: *Soit V un tonneau dans sous-espace F d'espace E. Si F est codimension finie dans E on existe alors tonneau W à E, ainsi que: $W\cap F=V$.*

Théorème 5: *Soit E un espace du type $\mathcal{M}(DF)$, F son sous-espace de codimension finie et $\mathcal{M}$ la famille de sous-ensembles compacts ou disques compacts. Si $F=\overline{F}$ on a alors que F est du même type comme E et si $F\neq\overline{F}$, F n'est pas du même type comme E.*

Preuve: La première partie du théorème suit d'après le théorème 3. Si nous supposons que F est du même type comme E, alors il suit que F est semi-réflexif, c'est-à-dire, F est quasi-complet. On sait qu'un espace E du type (DF) est complet si et seulement s'il est quasi-complet. En vertu de cella F est complet, donc, F est un sous-espace fermé dans E. Mais, c'est absurde et le théorème est prouvé.

Du théorème précédent on voit qu'il existe un espace du type (DF) non $\mathcal{M}(DF)$ où $\mathcal{M}$ est la famille de sous-ensembles compacts ou disques compacts. Si E est un espace normé de dimension infinie, alors E est du type (DF) non $\mathcal{M}(DF)$ où $\mathcal{M}$ est la famille de sous-ensembles précompacts. L'espace normé qui n'est pas tonnelé est du type (DF) non $\mathcal{M}(DF)$, où $\mathcal{M}$ est la famille de sous-ensembles fortement bornées.

Question 2: Nous ne savons pas est-ce que le sous-espace de codimension finie d'un espace du type $\mathcal{M}(DF)$, l'espace du même type, où $\mathcal{M}$ est la famille de disques completent?

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. Dazord et M. Jourlin, *Sur quelques classes d'espaces localement convexes*, Publ. du Dép. de Math. Lyon 1971, t. 8—2.

[2] Y. Komura, *On linear topological spaces*, Kumamoto J. of Sc., 5A (1962), 148—157.

[3] B. Mirković, *On locally convex spaces of the type (DF) defined by an arbitrarv family of bounded sets*, Matem. vesnik, 11. (26) 1974 (127—130).

[4] K. Noureddine, *Nouvelles classes d'espaces localement convexes*, Publ. du Dép. de Math. Lyon 1973 (259—277).

[5] K. Noureddine, *Sur une propriètè de permanence de certaines classes a'espaces localement convexes*. C. R. Acad. Sc. Paris, t 277, (1973).

[6] S. Radenović, *Sur deux classes d'espaces localement convexes*, Publ. Inst. Math. t. 24 (38), pp 138—142, Beograd 1978.

[7] A. P. Robertson, *Topological vector spaces*, Cambridge Univers. Press, 1964.

[8] M. Valdivia, *On subspaces of countable codimension of a locally convex space*, J. Reine Angew. Math. 256 (1972), 185—189.

[9] M. Valdivia, *Sur certains hyperplans qui ne sont pas ultra-bornologique dans les espaces ultra-bornologique*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 284, A—935, 1977.

[10] Y. H. Webb, *Finite — codimensional subspaces of countable quasi-barrelled spaces*, J. London Math. Soc. (2) 8 (1974), 630—632.