PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 24 (38) 1978, pp. 45–52

QUELQUES FORMES GÉNÉRALES DES FONCTIONS PSEUDO-BOOLÉENNES

Koriolan Gilezan, Bosiljka Čanak

(Reçu le 6 Octobre 1978)

Dans l'article [1] M. Carvallo présente les formes canoniques pour les expressions booléennes dans l'espace vectoriel booléen, ainsi que dans l'espace vectoriel postien au-dessus du champ défini, en se servant de la transition d'une base à l'autre de la façon habituelle.

Dans l'article [2] cette idée est élargie sur les expressions pseudo-booléennes généralisées sur l'anneau commutatif $(P, +, \cdot)$ avec l'élément unitaire.

Dans cet article on a donné une nouvelle forme aux expressions pseudo-booléennes généralisées, où la transition habituelle d'une base à l'autre n'est pas utilisée.

Soit $P=\{0, 1, 2, \dots p-1\}$ et „+" et „·" l'addition et multiplication d'après mod. p. Le théorème connu est que pour n'importe quelle fonction pseudo-booléennes généralisée

$$F: L^n \to P$$

($L \subset P$, et L^n produit carthésien de l'ensemble fini L) est valable l'égalité

$$(1) \qquad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_n)} f(\alpha_1 \dots, \alpha_n)\,[x_1]_{\alpha_1} \cdot [x_2]_{\alpha_2} \cdots [x_n]_{\alpha_n},$$

c'est-à-dire que la fonction f peut être présenté dans la forme canonique.

Sur l'ensemble fini L nous introduisons les relations (projections)

$$(2) \qquad [x_i]_\alpha = \begin{cases} 1, & \text{pour } x_i = \alpha \\ 0, & \text{pour } x_i \neq \alpha \end{cases} \qquad x_i,\ \alpha \in L,\ (i=1, \dots, n),$$

pour les variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, parce que pour l'anneau ayant les diviseurs zéro on ne peut pas former les polynomes de Lagrange.

Pour les expressions pseudo-booléennes on utilise la définition suivante:

1. Les constantes de l'ensemble P sont des expressions preudo-booléennes généralisées.

2. Les projections $[x_1]_{\alpha_1}$, $[x_2]_{\alpha_2}, \ldots, [x_n]_{\alpha_n}$, $\alpha_i \in L$, $i=1, 2, \ldots, n$ sont des expressions pseudo-booléennes généralisées.

3. Si A et B sont des expressions pseudo-booléennes généralisées definies sous 1 et 2, alors $A+B$ et $A \cdot B$ sont aussi des expressions pseudo-booléennes généralisées.

4. Les expressions pseudo-booléennes généralisées se forment en appliquant n fois 1, 2 et 3; n étant un nombre fini.

L'ensemble d'expressions pseudo-booléennes généralisées P_n est le module sur l'anneau $(P, +, \cdot)$ où les opérations „$+$" et „$\cdot$" pour ce module sont prises de la définition donnée plus haut.

Les expressions pseudo-booléennes généralisées

$$[x_1]_{\alpha_1} \cdot [x_2]_{\alpha_2} \cdots [x_n]_{\alpha_n}, \qquad (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in L^n,$$

sont linéairement indépendantes et, en vertu de (1), forment une base dans P_n.

Les autres bases dans P_n. Soit pour chaque $(a_1, \ldots, a_n) \in L^n$

$$B_{a_1} \cdots a_n = \{1, [x_{i_1}]_{\alpha i_1} \cdot [x_{i_2}]_{\alpha i_2} \cdots [x_{i_m}]_{\alpha i_m}\}. \tag{3}$$

$$1 \leqslant m \leqslant n;\ i_1, i_2, \ldots i_m \in \{1, 2, \ldots n\};\ \alpha_{ik} \in L \setminus \{a_k\},\ (1 \leqslant k \leqslant n).$$

Dans ce cas, le lemme suivant est en vigueur.

L e m m e 1. *Pour chaque $(a_1, \ldots, a_n) \in L^n$, l'ensemble $Ba_1, \ldots, a_n$ est un ensemble d'expressions linéairement indépendantes dans P_n.*

D é m o n s t r a t i o n. La démonstration du lemme se fait par l'induction. Soit $n=1$, alors pour $a_1 \in L$ on a l'ensemble

$$B_{ai} = \{1, [x_1]_{\alpha_1}\},\ \alpha_1 \in L \setminus \{a_i\}.$$

Le fait que B_{ai} est un ensemble d'expressions linéairement indépendantes, provient de la relation

$$\lambda_{ai} \cdot 1 + \sum_{\alpha_1 \in L \setminus \{ai\}} \lambda_{\alpha_1} \cdot [x_1]_{\alpha_1} = 0. \tag{*}$$

Si dans (*), x_1 passe par l'ensemble L, en vertu de (2), on obtient le système d'équations

$$\lambda_{ai} = 0,$$

$$\lambda_{ai} + \lambda_{\alpha_1} = 0,\ \alpha_i \in L \setminus \{a_i\},\ (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Par conséquent,

$$\lambda_{ai} = 0,\ \lambda_{a_1} = 0,\ \lambda_{a_2} = 0, \ldots, \lambda_{ai-1} = 0,\ \lambda_{ai+1} = 0, \ldots, \lambda_{an} = 0.$$

De cette manière, nous avons démontré que l'ensemble B_{ai} est un ensemble d'expressions linéairement indépendantes. Comme cela est valable pour chaque élément a_i, $a_i \in L$, alors B_{ai}, $a_i \in L$ sont des ensembles d'expressions linéairement indépendantes.

Soit $n=2$; alors pour $(a_i, a_j)\in L^2$ nous avons l'ensemble

$$B_{a_i a_j}=\{1,\ [x_1]_{\alpha_1},\ [x_2]_{\alpha_2},\ [x_1]_{\alpha_1}\cdot[x_2]_{\alpha_2}\},\ \ \alpha_1\in L\setminus\{a_i\},\ \ \alpha_2\in L\setminus\{a_j\}.$$

Le fait que $B_{a_i a_j}$, est un ensemble d'expressions linéairement indépendantes, provient de la relation

$$(**)\qquad \lambda_{a_i a_j}\cdot 1+\sum_{\alpha_1\in L\setminus\{a_i\}}\lambda^{(1)}_{\alpha_1}[x_1]_{\alpha_1}+\sum_{\alpha_2\in L\setminus\{a_j\}}\lambda^{(2)}_{\alpha_2}[x_2]_{\alpha_2}+$$
$$+\sum_{\substack{\alpha_1\in L\setminus\{a_i\}\\ \alpha_2\in L\setminus\{a_j\}}}\lambda_{\alpha_1\alpha_2}[x_1]_{\alpha_1}[x_2]_{\alpha_2}=0.$$

Si dans (**), (x_1, x_2) passe par l'ensemble L^2, en vertu de (2), on obtient le système d'équations

$$\begin{array}{ll}
\lambda_{a_i a_j}=0 & \\
\lambda_{a_i a_j}+\lambda^{(1)}_{\alpha_1}=0 & \alpha_1\in L\setminus\{a_i\}\\
\lambda_{a_i a_j}+\lambda^{(2)}_{\alpha_2}=0 & \alpha_2\in L\setminus\{a_j\}\\
\lambda_{a_i a_j}+\lambda^{(k)}_{\alpha_1}+\lambda_{\alpha_1\alpha_2}=0 & \alpha_1\in L\setminus\{a_i\},\ k\in\{1,\ 2\},\ \alpha_2\in L\setminus\{a_j\}
\end{array}$$

d'où

$$\begin{array}{lll}
\lambda_{a_i a_j}=0 & & \\
\lambda^{(1)}_{\alpha_1}=0 & \alpha_1\in L\setminus\{a_i\} & \\
\lambda^{(2)}_{\alpha_2}=0 & \alpha_2\in L\setminus\{a_j\} & \\
\lambda_{\alpha_1\alpha_2}=0 & \alpha_1\in L\setminus\{a_i\}, & \alpha_2\in L\setminus\{a_j\}.
\end{array}$$

De cette manière, nous avons montré que l'ensemble $B_{a_i a_j}$ est un ensemble d'expressions linéairement indépendantes. Comme cela est valable pour chaque vecteur (a_i, a_j) de L^2, il en provient que $B_{a_i a_j}$, $(a_i, a_j)\in L^2$, sont des ensembles d'expressions linéairement indépendantes.

Soit $(a_1, \ldots, a_n)\in L^n$; alors on obtient l'ensemble

$$B_{a_1\ldots a_n}=\{1,\ [x_1]_{\alpha_1},\ldots,\ [x_n]_{\alpha_n},\ [x_{j_1}]_{\alpha_1}\cdot[x_{j_2}]_{\alpha_2},$$
$$[x_{j_1}]_{\alpha_1}\cdot[x_{j_2}]_{\alpha_2}\cdot[x_{j_3}]_{\alpha_3},\ldots,\ [x_{j_1}]_{\alpha_1}\cdot[x_{j_2}]_{\alpha_2}\cdots[x_{j_n}]_{\alpha_n}\}$$
$$\alpha_i\in L\setminus\{a_i\},\ (i=1,\ 2,\ldots,\ n);\ j_1,\ldots,\ j_n=1,\ 2,\ldots,\ n\ (j_1<j_2<\cdots<j_n).$$

La démonstration que $B_{a_1\ldots a_n}$ est l'ensemble d'expressions linéairement indépendantes, provient de la relation

$$(***)\qquad \lambda_{a_1 a_2\ldots a_n}+\sum_{i=1}^{n}\lambda^{(i)}_{\alpha_i}[x_i]_{\alpha_i}+\sum_{\substack{i_1,\ i_2=1\\ i_1<i_2}}^{n}\ \sum_{\substack{\alpha_1\in L\setminus\{a_1\}\\ \alpha_2\in L\setminus\{a_2\}}}\lambda^{(i_1\ i_2)}_{\alpha_1\ \alpha_2}[x_{i_1}]_{\alpha_1}[x_{i_2}]_{\alpha_2}$$
$$+\sum_{\substack{i_1,\ i_2,\ i_3=1\\ i_1<i_2<i_3}}^{n}\ \sum_{\substack{\alpha_i\in L\setminus\{a_i\}\\ i=1,\ 2,\ 3}}\lambda^{(i_1\ i_2\ i_3)}_{\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3}[x_{i_1}]_{\alpha_1}[x_{i_2}]_{\alpha_2}[x_{i_3}]_{\alpha_3}+\cdots$$
$$+\sum_{\substack{\alpha_i\in L\setminus\{a_i\}\\ i=1,\ 2,\ldots,\ n}}\lambda^{(1\ 2\ \ldots\ n)}_{\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n}[x_1]_{\alpha_1}\cdots[x_n]_{\alpha_n}=0.$$

Si dans (***), $(x_1, x_2, \dots x_n)$ passe par l'ensemble L^n, en vertu de (2), on obtient le système d'équations

$$\lambda_{a_1} \dots {}_{a_n} = 0,$$

$$\lambda_{a_1} \dots {}_{a_n} + \lambda_{\alpha_1}^{(i)} = 0, \quad \alpha_i \in L \setminus \{a_i\} \qquad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$\lambda_{a_1 a_2} + \lambda_{\alpha i_1}^{(i_1)} + \lambda_{\alpha_1 \alpha_2}^{(i_1 i_2)} = 0: \ i_1, i_2 = 1, 2, \dots, n; \text{ et } (i_1 < i_2) \text{ pour } (i_1 \ i_2)$$

$$\alpha_{i_1} \in L \setminus \{a_{i_1}\}; \ \alpha_{i_2} \in L \setminus \{a_{i_2}\};$$

$$\lambda_{a_1} \dots {}_{a_n} + \lambda_{\alpha i_1}^{(i_1)} + \lambda_{\alpha i_2}^{(i_2)} + \lambda_{\alpha i_3}^{(i_3)} + \lambda_{\alpha i_1 \ \alpha i_2}^{(i_1 \ i_2)} + \lambda_{\alpha i_1 \ \alpha i_2 \ \alpha i_3}^{(i_1 \ i_2 \ i_3)} = 0,$$

$$i_1, i_2, i_3 = 1, 2, \dots, n \ (i_1 < i_2 < i_3) \text{ pour } (i_1 \ i_2) \ (i_1 \ i_2 \ i_3);$$

$$\alpha_{ij} \in L \setminus \{a_{ij}\} \ (j = 1, 2, 3) \text{ etc.}$$

$$\lambda_{a_1} \dots {}_{a_n} + \lambda_{\alpha i_1}^{(i_1)} + \dots + \lambda_{a i_n}^{(i_n)} + \lambda_{\alpha i_1 \ \alpha i_2}^{(i_1 \ i_2)} + \lambda_{\alpha i_1 \ \alpha i_2 \ \alpha i_3}^{(i_1 \ i_2 \ i_3)} + \dots +$$
$$+ \lambda_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{(1, 2 \dots n)} = 0, \ i_1, \dots, i_n = 1, 2, \dots, n \ (i_{j-1} < i_j) \text{ pour}$$
$$(i_1 \ i_2), \ (i_1 \ i_2 \ i_3) \text{ etc. } (\alpha_{ij} \in L \setminus \{a_{ij}\}) \ (j = 1, 2, \dots n).$$

Du système précédent résulte que tous les scalaires sont égaux à zéro.

Exemple 1. Soit $f: \{0, 1, 2\}^2 \to \{0. 1, \dots, p-1\}$, où „+" et „·" sont l'addition et la multiplication par le mod p. En fixant (2, 2), on a l'ensemble suivant d'expressions:

$$B_{22} = \{1, [x]_0, [y]_0, [x]_1, [y]_1, [x]_0 \cdot [y]_0, [x]_0 \cdot [y]_1, [x]_1 \cdot [y]_0, [x]_1 \cdot [y]_1\}.$$

En fixant (1, 1) nous avons l'ensemble suivant d'expression:

$$B_{11} = \{1, [x]_0, [y]_0, [x]_2, [y]_2, [x]_0 \cdot [y]_0, [x]_0 \cdot [y]_2, [x]_2 \cdot [y]_0, [x]_2 \cdot [y]_2\}.$$

De même, si nous fixons (0, 2), nous aurons l'ensemble suivant d'expressions.

$$B_{02} = \{1, [x]_1, [y]_0, [x]_2, [y]_1, [x]_1 \cdot [y]_0, [x]_1 \cdot [y]_1, [x]_2 \cdot [y]_0, [x]_2 \cdot [y]_1\}$$

etc. En tout, il y a 3^2 ensembles $B_{a_1 a_2}$, $(a_1, a_2) \in \{0, 1, 2\}^2$.

Montrons, par exemple, que B_{22} est l'ensemble d'expressions linéairement indépendantes:

$$\alpha_0 + \alpha_1 [x]_0 + \alpha_2 [y]_0 + \alpha_3 [x]_1 + \alpha_4 [y]_1 + \alpha_5 [x]_0 [y]_0 + \alpha_6 [x]_0 [y]_1 + \alpha_7 [x]_1 [y]_0$$
$$+ \alpha_8 [x]_1 [y]_1 = 0.$$

Si $(x, y) \in \{0, 1, 2\}^2$; alors:

$$\begin{array}{ll} \alpha_0 = 0, & \alpha_0 + \alpha_3 = 0, \\ \alpha_0 + \alpha_2 = 0, & \alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_7 = 0, \\ \alpha_0 + \alpha_4 = 0, & \alpha_0 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_8 = 0, \\ \alpha_0 + \alpha_1 = 0, & \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_6 = 0, \\ & \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5 = 0, \end{array}$$

d'où

$$\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=\alpha_6=\alpha_7=\alpha_8=0.$$

Si L contient m éléments, alors il existe m^n ensembles de la forme

$$B_{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

Après cela, nous allons introduire les notations suivantes:

$$\Phi^{\alpha}(j_1)=\begin{cases} i_1, & \alpha=j_1 \\ a_{\alpha}, & \alpha\neq j_1, \ \alpha, \ j_1\in\{1, 2, \ldots, n\}\end{cases}$$

(4)

$$\Phi^{\alpha}(j_1, j_2)=\begin{cases} i_k, & \alpha=j_k, \ k=1, 2 \\ a_{\alpha}, & \alpha\neq j_k, \ k=1, 2; \ \alpha, \ j_k\in\{1, 2, \ldots, n\}\end{cases}$$

$$\Phi^{\alpha}(j_1, j_2, j_3)=\begin{cases} i_k, & \alpha=j_k, \ k=1, 2, 3 \\ a_{\alpha}, & \alpha\neq j, \ k=1, 2, 3; \ \alpha, \ j_k\in\{1, 2, \ldots, n\} \text{ etc.}\end{cases}$$

. . . .

$$\Phi^{\alpha}(j_1, j_2, \ldots, j_n)=i_k \quad \alpha=j_k, \ k=1, 2, \ldots, n; \ \alpha, \ j_k\in\{1, 2, \ldots, n\}$$

(5) $B^k=L\setminus\{a_k\}, \ k=1, 2, \ldots, n;$

(6) $[a]^n=\begin{cases} p-1, & \text{pour } n \text{ impaire} \\ 1, & \text{pour } n \text{ paire}\end{cases};$

(7) $M=\{1, 2, \ldots, n\}.$

Théorème. *Soit* $P=\{0, 1, \ldots, p-1\}$ *l'anneau commutatif avec l'additon et la multiplication par mod p, L étant sous-ensemble de P à* $m\leqslant p$ *elements. Pour n'importe quelle fonction pseudo-boolienne généralisée* $f: L^n\to P$ *on a l'équation*:

$$f(x_1, x_2 \ldots, x_n)=f(a_1, \ldots, a_n)+\sum_{i_1\in B_1}\sum_{j_1\in M}(f(\Phi^1(j_1), \ldots, \Phi^n(j_1))$$

$$+(p-1)f(a_1, \ldots a_n))[x_{j_1}]_{i_1}+\sum_{\substack{i_1\in B^1\\ i_2\in B^2}}\{\sum_{\substack{j_1 \ j_2\in M\\ j_1<j_2}} f(\Phi^1(j_1, j_2), \ldots, \Phi^n(j_1, j_2))$$

$$+(p-1)f(\Phi^1(j_1), \ldots, \Phi^n(j_1))+(p-1)f(\Phi^1(j_2), \ldots, \Phi^n(j_2))$$

$$+f(a_1, \ldots, a_n)\}[x_{j_1}]_{i_1}[x_{j_2}]_{i_2}+\sum_{\substack{i_1\in B^1\\ i_2\in B^2\\ i_3\in B^3}}\{\sum_{\substack{j_1, j_2, j_3\in M\\ j_1<j_2<j_3}}[f(\Phi^1(j_1, j_2, j_3), \ldots, \Phi^n(j_1, j_2, j_3))$$

$$+(p-1)f(\Phi^1(j_1, j_2)\cdots\Phi^n(j_1, j_2))+(p-1)f(\Phi^1(j_1, j_3), \ldots, \Phi^n(j_1, j_3))$$

$$+(p-1)f(\Phi^1(j_2, j_3), \ldots, \Phi^n(j_2, j_3)+f(\Phi^1(j_1), \ldots, \Phi^n(j_1))$$

$$+f(\Phi^1(j_2), \ldots, \Phi^n(j_2))+f(\Phi^1(j_3), \ldots, \Phi^n(j_3))]$$

$$+(p-1)f(a_1, \ldots, a)\}[x_{j_1}]_{i_1}[x_{j_2}]_{i_2}[x_{j_3}]_{i_3}+\cdots$$

$$+\sum_{\substack{i_j\in B^j\\ j=1,2,\ldots,n}}\Big\{\sum_{\substack{j_1,\ldots,j_n\in M\\ j_1<j_2<\cdots<j_n}} f(\Phi^1(j_1,\ldots,j_n),\ldots,\Phi^n(j_1,\ldots,j_n))$$

$$+(p-1)\sum_{\substack{s_1,\ldots,s_{n-1}\in\{1,2,\ldots,n\}\\ s_1<s_2<\cdots<s_{n-1}}} f(\Phi^1(j_{s_1},\ldots,j_{s_{n-1}}),\ldots,\Phi^n(j_{s_1},\ldots,j_{s_{n-1}}))$$

$$+[a]^{n+1}\sum_{s=1}^{n} f(\Phi^1(j_s),\ldots,\Phi^n(j_s))+[a]^n f(a_1,\ldots,a_n)\Big\}[x_{j_1}]_{i_1}\cdots[x_{j_n}]_{i_n}$$

D é m o n s t r a t i o n. Soit $n=1$, c'est-à-dire $f:L\to p$. Dans ce cas, on a

$$(*)\qquad f(x)=f(a_1)+\sum_{i\in L\setminus\{a_1\}} f[(i)+(p-1)f(a_1)]\cdot[x[_i.$$

Vraiment, si $x=a_1$, et en le substituant dans (*), on aura, en vertu de (2), $[a_i]_i=0$, $i\in L\setminus\{a_1\}$, c'est-à-dire $f(x)=f(a_1)$, pour $x=a_1$. Si $x\neq a_1$ et si $x=i$ et si $i\in L\setminus\{a_1\}$, par leur substitution dans (*), en vertu de (2), $[i]_i=1$, résulte

$$f(x)=f(a_1)+f(i)+(p-1)f(a_1)=f(i),\ \text{pour}\ x=i\in L\setminus\{a_1\}.$$

Ainsi nous avons démontré la relation (*) pour $n=1$. Soit maintenant $n=2$, c'est-à-dire $f:L^2\to P$.

$$(**)\quad f(x,y)=f(a_1,a_2+\sum_{i_1\in L\setminus\{a_1\}}[f(i_1,a_2)+(p-1)f(a_1,a_2)]\cdot[x]_{i_1}$$

$$+\sum_{i_2\in L\setminus\{a_2\}}[f(a_1,i_2)+(p-1)f(a_1,a_2)]\cdot[y]_{i_2}$$

$$+\sum_{\substack{i_1\in L\setminus\{a_1\}\\ i_2\in L\setminus\{a_2\}}}[f(i_1,i_2)+(p-1)f(a_1,i_2)+(p-1)f(i_1,a_2)+f(a_1,a_2)][x]_{i_1}\cdot[y]_{i_2}$$

Si $(x,y)=(a_1,a_2)$ et en le substituant dans (**), alors, en vertu de (2), $[a_1]_{i_1}=0$, $[a_2]_{i_2}=0$, pour $i_1\in L\setminus\{a_1\}$, $i_2\in L\setminus\{a_2\}$, résulte $f(x_1\ y)=f(a_1,a_2)$, pour $(x,y)=(a_1,a_2)$. Si $(x,y)\neq(a_1,a_2)$ et si $(x,y)=(i_1,i_2)$, $i_1\in L\setminus\{a_1\}$, $i_2\in L\setminus\{a_2\}$ et en le substituant dans (**), alors, en vertu de (2), $[i_1]_{i_1}=1$ et $[i_2]_{i_2}=1$, nous avons

$$f(x,y)=f(a_1,a_2)+f(i_1,a_2)+(p-1)f(a_1,a_2)+f(a_1,i_2)$$

$$+(p-1)f(a_1,a_2)+f(i_1,i_2)+(p-1)f(a_1,i_2)+(p-1)f(i_1,a_2)$$

$$+f(a_1,a_2)=f(i_1,i_2),\ \text{pour}\ (x,y)=(i_1,i_2).$$

De cette façon, nous avons démontré (**). Puis, par induction et en utilisant les relations (4), (5), (6), et (7), le théorème peut être démontré.

R e m a r q u e: Chaque fonction f, en vertu de ce théorème, peut être écrite de m^n manières.

Exemple 2: $f:\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}^3 \to \{0, 1, \ldots, p-1\}$, $f(x, y, z)$

$$= f(p-1, p-1, p-1) + \sum_{i=0}^{p-2} f(i, p-1, p-1) + (p-1) f(p-1, p-1, p-1) [x_1]_i$$
$$+ \sum_{i=0}^{p-2} [f(p-1, i, p-1) + (p-1) f(p-1, p-1, p-1)] [x_2]_i + \sum_{i=0}^{p-2} [f(p-1, p-1, i)$$
$$+ (p-1) f(p-1, p-1, p-1)] [x_3]_i + \sum_{j,i=0}^{p-2} [f(i, p-1, j) + (p-1) f(p-1, p-1, j)]$$
$$+ (p-1) f(i, p-1, p-1) + f(p-1, p-1, p-1) [x_1]_i [x_3]_j + \sum_{i,j=0}^{p-2} [f(i, j, p-1)$$
$$+ (p-1) f(i, p-1, p-1) + (p-1) f(p-1, j, p-1) + f(p-1, p-1, p-1) [x_1]_i [x_2]_j$$
$$+ \sum_{i,j=0}^{p-2} f(p-1, i, j) + (p-1) f(p-1, i, p-1) + (p-1) f(p-1, p-1, j)$$
$$+ f(p-1, p-1, p-1)] [x_2]_i [x_3]_j + \sum_{i,j,k=0}^{p-2} [f(i, j, k) + (p-1) f(i, j, p-1)$$
$$+ (p-1) f(i, p-1, k) + (p-1) f(p-1, j, k) + f(i, p-1, p-1)$$
$$+ f(p-1, j, p-1) + f(p-1, p-1, k) + (p-1) f(p-1, p-1, p-1)] [x_1]_i [x_2]_j [x_3]_k.$$

Exemple 3. La fonction $f:\{0, 1, 2\}^2 \to \{0, 1, 2, 3\}$ où „$+$" et „$\cdot$" sont l'addition et la multiplication par *mod* 3, est donnée par le tableau

x	0	0	0	1	1	1	2	2	2
y	0	1	2	0	1	2	0	1	2
$f(x, y)$	2	1	0	1	2	0	0	2	1

On peut l'écrire de 3^2 façons différentes, c'est-à-dire

$$f(x, y) = 2 + 2[x]_1 + 2[y]_1 + [x]_2 + [y]_2 + [x]_1 [y]_2 + 2[x]_1 [y]_1$$
$$f(x, y) = 1 + [x]_1 + [y]_0 + [x]_2 + 2[y]_2 + [x]_1 [y]_0 + 2[x]_1 [y]_2$$
$$f(x, y) = 2[y]_0 + [x]_2 + [y]_1 + 2[x]_1 [y]_0 + [x]_1 [y]_1$$
$$f(x, y) = 1 + [x]_0 + 2[x]_2 + [y]_1 + 2[y]_2 + [x]_0 [y]_1 + 2[x]_0 [y]_2 + [x]_2 [y]_1 + 2[x]_2 [y]_2$$
$$f(x, y) = 2 + 2[x]_0 + 2[y]_0 + [y]_2 + 2[x]_0 [y]_0 + [x]_0 [y]_2 + 2[x]_2 [y]_0 + [x]_2 [y]_2$$
$$f(x, y) = [y]_0 + [x]_2 + 2[y]_1 + 2[x]_0 [y]_0 + 2[x]_0 [y]_1 + [x]_2 [y]_0 + 2[x]_2 [y]_1$$
$$f(x, y) = 2[x]_0 + 2[y]_1 + [x]_1 + [y]_2 + 2[x]_1 \cdot [y]_1 + [x]_1 \cdot [y]_2$$
$$f(x, y) = 2 + 2[x]_2 + [y]_0 + 2[y]_0 + [x]_1 [y]_0 + 2[x]_1 [y]_2$$
$$f(x, y) = 1 + 2[x]_0 + 2[x]_1 + 2[y]_0 + [y]_1 + 2[x]_1 [y]_0 + [x]_1 [y]_1$$

Nous avons le plaisir de remercier le professeur M. Stojaković, des suggestions et remarques faites au cours de la réalisation de cet ouvrage.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Carvallo.. *Espaces vectoriels booléens et postiens formules d'interpolation*, C. R. Acad, Sc. Paris, t 272, 24 mai 1971.

[2] C. Ghilezan. *L'espace vectoriel pseudo-booléen généralisé*, Publ. Inst. Math, Beograd, Tome 19 (33), 1975.

[3] S. Rudeanu, Boolean Functions and Equation, North-Holland, 1974.

[4] M. Stojaković, *On the Exponential Properties of the Implication*, Publ. Inst. Math., Beograd, Tome 13 (27), 1972.