PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 24 (38), 1978, pp. 138–142

SUR DEUX CLASSES D'ESPACES LOCALEMENT CONVEXES

Stojan Radenović

(Communiqué le 20. Janvier 1978.)

Soit E est un espace localement convexe séparé (elc) sur le corps K, où K est le corps des nombres réels ou complexes.

Dans ce travail nous définissons deux nouvelles classes d'espaces localement convexes et nous examinons quelques de leurs propriétés. Nous les appelons „N_0-p-tonnelés" et „σ-p-tonnelés". De l'exemple 1. on voit qu'il l'existe espace N_0-p-tonnelé non N_0-infratonnelé. Nous ne savons pas encore l'espace N_0-p-tonnelé non p-tonnelé comme et l'espace σ-p-tonnelé non σ-infratonnelés. Les notions et les termines sont comme à [2] et [5].

D é f i n i t i o n 1: Un elc E est dit N_0-p-tonnelé (σ-p-tonnelé), si tout sous-ensemble précompact d'espace E_p' qui est l'union dénombrable des sous-ensembles équicontinus (toute suite précompacte d'espace E_p') est équicontinu. (E_p' — le dual topologique E' muni de la topologie de la convergence uniforme sur des sous-ensembles précompacts).

D é f i n i t i o n 2: Un p-tonneau V d'espace E est dit N_0-p-tonneau (σ-p-tonneau) si et seulement si $V=\bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n$ où (V_n) est une suite de voisinages disqués fermés de zéro dans E (E_σ).

Dans les théorèmes suivants on donne la caractérisation des espace N_0-p-tonnelés (σ-p-tonnelés) comme à ([3], Théorèmes 1 et 2) pour les espaces N_0-tonnelés et N_0- infratonnelés.

T h é o r è m e 1: *Soit E est un elc. Pour que E soit N_0-p-tonnelé, il faut et il suffit, que tout N_0-p-tonneau soit un voisinage de zéro dans E.*

P r e u v e: Soit $T=\bigcap_{i=1}^{+\infty} V_i$ est N_0-p-tonneau d'espace E. En vertu de ([2], Proposition (3.35)) le tonneau T est un voisinage d'espace E_p, c'est-à-dire il existe un sous-ensemble précompact P d'espace E_p', ainsi que $\bigcup_{i=1}^{+\infty} V_i^0 \subseteq T^0 \subseteq P^0$.

Cela signifie qu'après ([2], Corollaire (1.4)) $\bigcup_{i=1}^{+\infty} V_i^0$ est un sous-ensemble précompact d'espace E_p', donc $\bigcup_{i=1}^{+\infty} V_i^0$ est équicontinu comme l'union dénombrable des sous-ensembles équicontinus, c'est-à-dire, $\left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} V_i^0\right)^0 = \bigcap_{i=1}^{+\infty} V_i^{00} = \bigcap_{i=1}^{+\infty} V_i = T$ est un voisinage de zéro dans E. Inversement, si $P = \bigcup_{i=1}^{+\infty} P_i$ est un sous-ensemble précompact d'espace E_p', où les (P_i) sont les sous-ensembles équicontinus, il faut prouver que P est un sous-ensemble équicontinu. Il est évident que $P^0 = \bigcap_{i=1}^{+\infty} P_i^0$ est un N_0-p-tonneau, donc, P^0 est un voisinage de zéro dans E, c'est-à-dire, $P \subseteq P^{00}$ est un sous-ensemble équicontinu du dual E'.

Théorème 2: *Soit E est un elc. Pour que E soit σ-p-tonnelé il faut et il suffit, que tout σ-p-tonneau soit un voisinage de zéro dans E.* (La preuve peut être faite en utilisant que $V_n = \{x_n'\}^0$ pour quelque $x_n' \in E'$).

Sachant que les espaces E_p' est E_β' ont les mêmes sous-ensembles bornés, alors le théorème suivant est immédiate:

Théorème 3: *Un elc E est infratonnelé* (N_0-infratonnelé, σ-infratonnelé) *si et seulement si tous sous-ensemble borné d'espace E_p'* (tout sous-ensemble borné d'espace E_p' lequel est l'union d'énombrable des sous-ensembles équicontinus, toute suite borné d'espace E_p') *est équicontinu.*

En vertu de ([2], Définition (3.1)) et du théorème précédent il suit:

Corollaire 1: *Tout espace infratonnelé E est p-tonnelé et N_0-infratonnelé, comme et tout espace p-tonnelé ou N_0-infratonnelé est N_0-p-tonnelé c'est-à--dire, σ-p-tonnelé.*

Le rapport de ces classes d'espaces localement convexes est donné au tableau suivant:

$$\begin{array}{ccccc}
\text{tonnelés} & \Rightarrow & N_0\text{-tonnelés} & \Rightarrow & \sigma\text{-tonnelés} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\text{infratonnelés} & \Rightarrow & N_0\text{-infratonnelés} & \Rightarrow & \sigma\text{-infratonnelés} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
p\text{-tonnelés} & \Rightarrow & N_0\text{-}p\text{-tonnelés} & \Rightarrow & \sigma\text{-}p\text{-tonnelés}
\end{array}$$

De l'exemple suivant on voit qu'il existe l'espace σ-p-tonnelé, c'est-à-dire, N_0-p-tonnelé non N_0-infratonnelé.

Exemple 1: Si E est un espace de Banach réflexif de dimension infinie, alors l'espace E_p' est N_0-p-tonnelé (σ-p-tonnelé) non N_0-infratonnelé.

A la proposition suivante on donne le rapport entre les espaces N_0-p-tonnelés et N_0-infratonnelés semblable comme pour les espaces p-tonnelés et infratonnelés à ([2], Proposition (3.6.)).

P r o p o s i t i o n 1: *Pour tout elc N_0-p-tonnelé E les assertions suivantes sont equivalentes*:

a) *E est N_0-infratonnelé*;

b) *Tout sous-ensemble borné d'espace E_p' lequel est l'union dénombrable des sous-ensembles équicontinus est un sous-ensemcle précompact dans E_p'*;

c) *Tout sous-ensemble borné d'espace E_p' lequel est l'union dénombrable des sous-ensemble équicontinus est un sous-ensemble relativement compact dans E_p'*;

P r e u v e; Soit $A=\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$ est un sous-ensemble borné d'espace E_p' où les (A_i) sont équicontinus. Alors $b) \Rightarrow c)$ et $c) \Rightarrow a)$ puisque l'espace E est N_0-p-tonnelé et les espaces E_p' et E_β' ont les mêmes bornés. Il faut prouver que $a) \Rightarrow b)$. Si E est un espace N_0-infratonnelé, alors A, est équicontinu, donc, E_σ'-relativement compact, c'est-à-dire, E_p'-précompact (prour tout sous-ensemble équicontinu A on a: $E_p' \mid A=E_\sigma' \mid A$).

Dans ([3], Corollaire 8) est prouvé que l'espace E_p' d'un espace N_0-tonnelé E est semi-complet. De la proposition suivante on voit que c'est vrai et pour les espaces σ-p-tonnelés, donc, et pour les espaces N_0-infratonnelés.

P r o p o s i t i o n 2: *Si E est un elc σ-p-tonnelé, alors l'espace E_p' est semi-complet.*

P r e u v e: Une suite de Cauchy dans E_p' est évident un sous-ensemble précompact, donc, équicontinu de E'. En vertu de ([5], chap. IV, Proposition 3, Corollaire) l'espace E_p' est semi-complet puisque l'adhérence faible de cette suite est complète dans E_σ'.

A la proposition suivante on donne la condition suffisante et nécessaire pour que l'espace p-tonnelé soit métrisable (semblable comme pour les espaces infratonnelés à [3], Proposition 7).

P r o p o s i t i o n 3: *Pour que l'espace p-tonnelé E soit métrisable, il faut et il suffit que l'espace E_p' possède une suite fondamentale des sous-ensembles précompacts.*

P r e u v e: Si l'espace p-tonnelé E est métrisable, alors, il est évident que la suite des polaires $(\bigcup^0{}_n)$ des voisinages de zéro dans E est fondamentale pour les sous-ensembles précompacts à l'espace E_p'. Inversement, si l'espace E_p' possède une suite fondamentale des sous-ensembles précompacts, alors, l'espace E est métrisable comme un sous-espace d'espace métrisable $(E_p')_p'$.

Soient E et F deux espaces localement convexes. Une application linéaire f de E dans F est presque ouverte si $\overline{f(\bigcup)}$ est un voisinage de zéro dans F, pour tout voisinage de zéro $\bigcup$ dans E. La proposition suivante est immédiate:

P r o p o s i t i o n 4: *Soit E un elc N_0-p-tonnelé (σ-p-tonnelé) et f une application linéaire continue et presque ouverte de E dans un elc F. Alors F est un elc N_0-p-tonnelé (σ-p-tonnelé).*

Corollaire 2: *Soit E un elc N_0-p-tonnelé (σ-p-tonnelé) et f une application linéaire continue et ouverte de E dans un elc F. Alors, F est un elc N_0-p-tonnelé (σ-p-tonnelé).*

Corollaire 3. *Le complété $\hat{E}$ d'un elc N_0-p-tonnelé (σ-p-tonnelé) est un elc N_0-p-tonneié (σ-p-tonnelé).*

Corollaire 4: *Si F est un elc N_0-p-tonnelé (σ-p-tonnelé) lequel est dense á E, alors, E est un elc N_0-p-tonnelé (σ-p-tonnelé).*

Corollaire: 5: *Soit E un elc (séparé) dont la topologie est la topologie finale associée à un système d'applications linéaires $f_\alpha : E_\alpha \to E$, où les E_α sont des espaces N_0-p-tonnelés (σ-p-tonnelés). Alors, E est un elc N_0-p-tonnelé (σ-p-tonnelé). (On a pour tout $\alpha : f_\alpha^{-1}\,(\overline{f_\alpha(\cup_\alpha)}) \supseteq f_\alpha^{-1}\,(f_\alpha(\cup_\alpha)) \supseteq \cup_\alpha$).*

Corollaire 6: *Si F est un sous-espace fermé d'un elc N_0-p-tonnelé (σ-p-tonnelé) E, alors E/F est un elc N_0-p-tonnelé (σ-p-tonnelé).*

Corollaire 7: *Si les E_α sont des espaces N_0-p-tonnelés (σ-p-tonnelés) alors, la somme directe et la limite inductive séparé sont des espaces N_0-p-tonnelés (σ-p-tonnelés).*

Proposition: 5: *Tout produit d'espaces N_0-p-tonnelés (σ-p-tonnelés) est un elc N_0-p-tonnelé (σ-p-tonnelé).*

Preuve: Soit E_α une famille d'espace N_0-p-tonnelés et $E = \Pi E_\alpha$ leur produit. Si $A = \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$ est un sous-ensemble précompact d'espace $E_p' = \oplus (E_\alpha)_p'$, où les A_i sont équicontinus, alors, $A \subseteq \bigoplus_{\alpha=1}^{m} p_\alpha'(A) = \bigoplus_{\alpha=1}^{m} p_\alpha' \left(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i \right) = \bigoplus_{\alpha=1}^{m} \bigcup_{i=1}^{+\infty} p_\alpha'(A_i)$ ($p_\alpha : \Pi E_\alpha \to E_\alpha$ et $p_\alpha' : (E_\alpha)' \to \oplus (E_\alpha)'$). Donc, A est un sous-ensemble équicontinu de E'. La démonstration pour les espaces σ-p-tonnelés est semblable.

Exemple 2: Si E est un elc métrisable et tonnelé lequel n'est pas complet, alors, l'espace E_c' (le dual de E muni de la topologie de la convergence uniforme sur les disques compacts) n'est pas σ-p-tonnelé.

Sachant que la suite de Cauchy au dual fort d'un elc σ-p-tonnelé est équicontinu, alors, les théorèmes suivantes et leurs corollaires on peut les prouver comme à ([1], 4, Proposition 5, Corollaires 1, 2 et 3) pour les espaces du type (DF).

Théorème 4: *Soit E un elc σ-p-tonnelé. Si E possède une suite fondamentale de bornés, alors, son fort dual est un elc de Fréchet et son bidual est un elc du type (DF), c'est-à-dire, un elc σ-p-tonnelé qui possède une suite fondamentald de bornés.*

Théorème 5; *Soit E un elc et F un sous-espace vectoriel de E.*

a) *Si F est un elc σ-p-tonnelé qui possède une suite fondamentale de bornés, alors, le dual fort de F est isomorphe topologiquement à E_β'/F^0.*

b) *Si E est un elc σ-p-tonnelé qui possède une suite fondamentale de bornés et si F est fermé, alors, E/F est un elc σ-p-tonnelé qui possède une suite fondamentale de bornés est la topologie forte sur F^0 est la topologie induite par celle de E_β'.*

Corollaire 8: *Le complété d'un espace σ-p-tonnelé qui possède une suite fondamentale de bornés, est un elc σ-p-tonnelé avec une suite fondamentale de bornés.*

Corollaire 9: *Pour que l'espace σ-p-tonnelé avec une suite fondamentale de bornés soit complet, il faut et il suffit qu'il soit quasi-complet.*

Corollaire 10: *Soit E un elc σ-p-tonnelé avec une suite fondamentale de bornés. Pour que E soit infratonnelé, il faut et il suffit que son complété $\hat{E}$ soit tonnelé.*

L'espace de l'exemple 1. est σ-p-tonnelé avec la suite fondamentale de bornés lequel n'est pas l'espace du type (DF).

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Grothendieck, *Sur les espaces (F) et (DF)*, Summa Brasil. Math., 3, 1954, 57—123.

[2] J. Dazord — M. Jourlin, Sur quelques classes d'espaces localement convexes, Publ. du Dép. de Math. Lyon 1971 t. 8—2.

[3] T. Husain, *Two new classes of locally convex spaces*, Math. Ann. 166, 289—299, (1966).

[4] K. Nouredine, *Nouvelles classes d'espaces localement convexes*. Publ. du Dép. de Math, Lyon, 1973, 259—277.

[5] A. P, Robertson, Topological vector spaces, Cambridge, Univ. Press, 1964.