PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 24 (38) 1978, pp 109—120

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО — ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ФРЕДГОЛЬМА С ИМПУЛЬСАМИ

С. Д. Милушева, Д. Д. Байнов

(Получено 5 октобря 1976)

Метод усреднения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсами обоснован А. М. Самойленко [1] — [3]. В настоящей работе обоснован метод усреднения для систем интегро — дифференциальных уравнений типа Фредгольма с импульсами

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon X\left(t,\ x,\ \int_0^1 \varphi(t,\ s,\ x(s))\,ds\right), \tag{1}$$

где $x,\ X\in R_n,\ \varphi\in R_m,\ \varepsilon>0$ — малый параметр.

Пусть в пространстве $(t,\ x)$ заданы гиперповерхности

$$t=t_i(x),\quad t_i(x)<t_{i+1}(x),\quad i=1,\ 2,\ \ldots . \tag{2}$$

При предположении, что вне гиперповерхностей (2) движение происходит согласно уравнениям (1), а на каждой гиперповерхности $t=t_i(x)$ в точке x траектория системы (1) претерпевает мгновенный разрыв по закону

$$\Delta x\Big|_{t=t_i(x)}=x_+-x_-=\varepsilon I_i(x), \tag{3}$$

где x_- и x_+ — точки, в которых траектория соответственно встречает и покидает гиперповерхность $t=t_i(x)$, системе (1) ставим в соответствие усредненную систему

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=\varepsilon\,[X_0(\bar{x})+I_0(\bar{x})], \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} X_0(x)&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_t^{t+T} X\left(t,\ x,\ \int_0^1 \varphi(t,\ s,\ x)\,ds\right)dt,\\ I_0(x)&=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t<t_i<t+T} I_i(x). \end{aligned} \tag{5}$$

Имеет место следующая теорема о близости решений задачи Коши для системы (1) и системы (4):

Теорема 1. *Пусть*:

1. Функция $X(t, x, u)$ определена и непрерывна в области

$$\{t \geqslant 0, \quad x \in D \subset R_n, \quad U \in R_m\}.$$

Функция $\varphi(t, s, x)$ определена и непрерывна в области

$$\{t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1, \quad x \in D\}.$$

2. Существуют положительные постоянные M, N, K, C и функция $\sigma(t, s)$ такие, что

$$\left\| \frac{\partial t_i(x)}{\partial x} \right\| + \| X(t, x, u) \| + \| I_i(x) \| \leqslant M,$$

$$\left\| \frac{\partial t_i(x)}{\partial x} - \frac{\partial t_i(x')}{\partial x} \right\| + \| I_i(x) - I_i(x') \| \leqslant K \| x - x' \|, \qquad \left\| \frac{\partial^2 t_i(x)}{\partial x^2} \right\| \leqslant C,$$

$$\| X(t, x, u) - X(t, x', u') \| \leqslant K [\| x - x' \| + \| u - u' \|], \tag{6}$$

$$\| \varphi(t, s, x) - \varphi(t, s, x') \| \leqslant \sigma(t, s) \| x - x' \|,$$

$$\int_0^1 \sigma(t, s)\, ds \leqslant N, \qquad \int_0^1 t\, \sigma(t, s)\, ds \leqslant N$$

для всех $t \geqslant 0$, $s \in [0, 1]$, $x, x' \in D$, $u, u' \in R_m$, $i = 1, 2, \ldots$.

3. Равномерно относительно $t \geqslant 0$ и $x \in D$ существуют конечные пределы (5) и $\lim\limits_{T \to \infty} \dfrac{1}{T} \sum\limits_{t < t_i < t+T} 1 = d_0$, $d_0 = \text{const}$.

4. Система (1), (3) имеет единственное решение $x_t(x^*)$ и при любом $t^* > 0$ и при любом фиксированном x^* из области D, $x_{t^*}(x^*) = x^*$.

5. Усредненная система (4) имеет решение $\bar{x} = \bar{x}(\varepsilon t, x_0)$, $\bar{x}(0, x_0) = x_0$, которое при $\varepsilon = 1$ принадлежит области D для всех $t \in [0, L]$, $0 < L = \text{const}$, вместе с некоторой ρ — окрестностью ($0 < \rho = \text{const}$) и удовлетворяет неравенствам

$$\frac{\partial t_1(x_0)}{\partial x} I_1(x_0) \leqslant \beta < 0,$$

$$\frac{\partial t_i(\bar{x}(\varepsilon t, x_0))}{\partial x} I_i(\bar{x}(\varepsilon t, x_0)) \leqslant \beta < 0, \quad \beta = \text{const}, \quad t_i' < t < t_i'', \tag{7}$$

$$t_i' = \inf_{x \in D} t_i(x), \quad t_i'' = \sup_{x \in D} t_i(x), \quad i = \overline{2, d}, \quad t_d < L \varepsilon^{-1} < t_{d+1},$$

или условию $\dfrac{\partial t_i(x)}{\partial x} \equiv 0$, если $t = t_i(x) = \text{const}$ есть гиперплоскость.

Тогда для любого $\eta>0$ и любого $L>0$ можно указать такое $\varepsilon_0>0$, что при $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ система уравнений (1), (3) имеет решение $x_t(x_0)$ $x_0(x_0)=x_0$, определенное для всех $t\in[0, L\varepsilon^{-1}]$ и такое, что

(8) $$\|x_t(x_0)-\bar{x}(\varepsilon t, x_0)\|<\eta \quad \text{при} \quad t\in[0, L\varepsilon^{-1}].$$

Доказательство. В силу условий теоремы 1 существует монотонно убывающая функция $\alpha(t)$ $(\alpha(t)\to 0$ при $t\to\infty)$, такая, что

(9) $$\left\|\int_t^{t+T}\left[X\left(\theta, x, \int_0^1 \varphi(\theta, s, x)\,ds\right)-X_0(x)\right]d\theta\right\|\leqslant\frac{1}{2}\alpha(T)\,T,$$
$$\Big\|\sum_{t<t_i<t+T} I_i(x)-T I_0(x)\Big\|\leqslant\frac{1}{2}\alpha(T)\,T.$$

Пусть T — фиксированное и достаточно большое число и пусть в интервале $(0, T)$ лежат d_1 точек

(10) $$t_1(x_0)=t_1^0,\ \ldots,\ t_{d_1}(x_0)=t_{d_1}^0, \quad t_i^0<t_{i+1}^0,$$
$$0<t_1^0, \quad t_{d_1}^0<T, \quad i=\overline{1, d_1-1}$$

Обозначим через $x(t, \tau, c)$, $x(\tau, \tau, c)=c$ решение системы

(11) $$x(t, \tau, c)=c+\varepsilon\int_\tau^t X\left(\theta, x(\theta, \tau, c), \int_0^1 \varphi(\theta, s, x(s, \tau, c))\,ds\right)d\theta.$$

Легко проверить, что

$$x(t, \tau, c)=c+\varepsilon\int_\tau^t X\left(\theta, c, \int_0^1 \varphi(\theta, s, c)\,ds\right)d\theta+R(t, \varepsilon, \tau),$$

где при $0<\tau\leqslant t\leqslant T$, $\|R(t, \varepsilon, \tau)\|\leqslant\dfrac{1}{2}\varepsilon^2 KMT(T+2N)$.

Рассмотрим решение $x_t(x_0)$ системы (1) на отрезке $[0, T]$. Это решение состоит из кусков определяемых равенством (11). Поэтому с точностью до величин порядка ε^2 на отрезке $0<\tau\leqslant t\leqslant T$ решение $x_t(x_0)$ можно определить выражением

(12) $$x_t(x_0)=c+\varepsilon\int_\tau^t X\left(\theta, c, \int_0^1 \varphi(\theta, s, c)\,ds\right)d\theta\equiv x_1(t, \tau, c).$$

Отсюда с точностью до величин порядка ε^2 имеем

$$x_t(x_0)=x_1(t, 0, x_0), \quad 0\leqslant t\leqslant t_1^*,$$

где t_1^* — корень уравнения $t=t_1(x_1(t, 0, x_0))$, или

$$(13)\qquad t=t_1(x_0)+\varepsilon\left.\frac{\partial t_1(x)}{\partial x}\right|_{x=x_0}\cdot\int_0^t X\left(\theta, x_0, \int_0^1 \varphi(\theta, s, x_0)\,ds\right)d\theta+\varepsilon^2\ldots .$$

Из (13) с точностью до ε^2 находим

$$(14)\qquad t_1^*=t_1^0+\varepsilon\frac{\partial t_1(x_0)}{\partial x}\int_0^{t_1^0} X\left(\theta, x_0, \int_0^1 \varphi(\theta, s, x_0)\,ds\right)d\theta\equiv t_1^0+\varepsilon\,\Theta_1 .$$

Итак

$$(15)\qquad x_t(x_0)=x_1(t, 0, x_0),\quad 0<t<t_1^0+\varepsilon\,\Theta_1=t_1^*.$$

Далее

$$x_{t_1^*}^+(x_0)=x_1(t_1^*, 0, x_0)+\varepsilon I_1(x_1(t_1^*, 0, x_0))\equiv$$

$$\equiv x_0+\varepsilon\int_0^{t_1^*} X\left(\theta, x_0, \int_0^1 \varphi(\theta, s, x_0)\,ds\right)d\theta+\varepsilon I_1^0,$$

$$I_1^0\equiv I_1(x_1(t_1^*, 0, x_0)).$$

Решение системы (1) между гиперплоскостями $t=t_1(x)$ и $t=t_2(x)$ описывается формулой (12), в которой положено $\tau=t_1^*$ и $c=x_{t_1^*}^+(x_0)$:

$$x_t(x_0)=x_{t_1^*}^+(x_0)+\varepsilon\int_{t_1^*}^t X\left(\theta, x_{t_1^*}^+(x_0), \int_0^1 \varphi(\theta, s, x_{t_1^*}^+(x_0))\,ds\right)d\theta=$$

$$(16)\qquad \begin{aligned} &=x_0+\varepsilon\int_0^t X\left(\theta, x_0, \int_0^1 \varphi(\theta, s, x_0)\,ds\right)d\theta+\varepsilon I_1^0+\\ &+\varepsilon\int_{t_1^*}^t X\left(\theta, x_{t_1^*}^+(x_0), \int_0^1 \varphi(\theta, s, x_{t_1^*}^+(x_0))\,ds\right)d\theta-\\ &-\varepsilon\int_{t_1^*}^t X\left(\theta, x_0, \int_0^1 \varphi(\theta, s, x_0)\,ds\right)d\theta. \end{aligned}$$

Так как

$$\left\|\varepsilon\int_{t_1^*}^t\left[X\left(\theta, x_{t_1^*}^+(x_0), \int_0^1 \varphi(\theta, s, x_{t_1^*}^+(x_0))\,ds\right)-X\left(\theta, x_0, \int_0^1 \varphi(\theta, s, x_0)\,ds\right)\right]d\theta\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon^2 KM(1+N)(1+T)\,T,$$

то последные два слагаемые в (16) можно опустить и с точностью до величин порядка ε^2 получаем

$$x_t(x_0) = x_1(t,\ 0,\ x_0) + \varepsilon I_1^0. \tag{17}$$

Возникает вопрос; встретить ли траектория (17) после момента t_1^* поверхность $t = t_1(x)$ или нет.

Для того чтобы ответить на вопрос, решим систему

$$x_t(x_0) = x_1(t,\ 0,\ x_0) + \varepsilon I_1^0, \qquad t = t_1(x).$$

Исключая x, получаем

$$t = t_1\left(x_1(t,\ 0,\ x_0) + \varepsilon I_1^0\right). \tag{18}$$

Пусть теперь $\bar{t}_1$ корень уравнения (18), т.е.,

$$\bar{t}_1 = t_1\left(x_1(\bar{t}_1,\ 0,\ x_0) + \varepsilon I_1^0\right).$$

Из (18) находим

$$t = t_1\left(x_0 + \varepsilon \int_0^t X\left(\theta,\ x_0,\ \int_0^1 \varphi(\theta,\ s,\ x_0)\, ds\right) d\theta + \varepsilon I_1^0\right) =$$

$$= t_1^0 + \varepsilon \frac{\partial t_1(x_0)}{\partial x} \int_0^{t_1^0} X\left(\theta,\ x_0,\ \int_0^1 \varphi(\theta,\ s,\ x_0)\, ds\right) d\theta + \varepsilon \frac{\partial t_1(x_0)}{\partial x} I_1^0 +$$

$$+ \varepsilon \frac{\partial t_1(x_0)}{\partial x} (t - t_1^0)\, X\left(\tilde{t},\ x_0,\ \int_0^1 \varphi(\tilde{t},\ s,\ x_0)\, ds\right) O(\varepsilon^2),$$

$$\tilde{t} = t_1^0 + \mu\left(t - t_1^0\right), \qquad 0 \leqslant \mu \leqslant 1.$$

Отсюда следует, что

$$\bar{t}_1 = t_1^* + \varepsilon \frac{\partial t_1(x_0)}{\partial x} I_1^0 + O(\varepsilon^2).$$

В силу отрицательности второго слагаемого имеем $\bar{t}_1 < t_1^*$. Таким образом при $t > t_1^*$ решение $x_t(x_0)$ покидает гиперповерхность $t = t_1(x)$, т.е., точка $(t_1^0,\ x_0)$ не является точкой биения решения о поверхности $t = t_1(x)$.

Найдем момент, когда решение (17) достигает гиперповерхности $t = t_2(x)$. Для этого определим корень t_2^* уравнения

$$t = t_2\left(x_1(t,\ 0,\ x_0) + \varepsilon I_1^0\right).$$

Имеем

$$t_2^* = t_2^0 + \varepsilon \frac{\partial t_2(x_0)}{\partial x}\left[I_1^0 + \int\limits_0^{t_2^0} X\left(\theta, x_0, \int\limits_0^1 \varphi(\theta, s, x_0)\, ds\right) d\theta \right] \equiv t_2 + \varepsilon \Theta_2.$$

Так как по условии $t_2^0 > t_1^0$, то (если ε достаточно мало) $t_2^* > t_1^*$ и, следовательно решение системы (1) на интервале $t_1^* < t < t_2^*$ описывается формулой $x_t(x_0) = x_1(t, 0, x_0) + \varepsilon I_1^0$.

Далее

$$\overset{+}{x}_{t_2^*}(x_0) = x_1(t_2^*, 0, x_0) + \varepsilon I_1^0 + \varepsilon I_2\left(x_1(t_2^*, 0, x_0) + \varepsilon I_1^0\right) \equiv$$

$$\equiv x_1(t_2^*, 0. x_0) + \varepsilon (I_1^0 + I_2^0).$$

Нетрудно показать (как это видно из предыдующих вычислений), что система (1) при начальном условии $c = \overset{+}{x}_{t_2^*}(x_0)$ в момент времени t_2^* имеет с точностью до величин порядка ε^2 на интервале $t_2^* < t < t_3^*$ решение

$$x_t(x_0) = x_1(t, 0, x_0) + \varepsilon (I_1^0 + I_2^0),$$

где t_3^* определяется как корень уравнения

$$t = t_3\left(x_1(t, 0, x_0) + \varepsilon (I_1^0 + I_2^0)\right)$$

при условии, что

$$\frac{\partial t_2(x_0)}{\partial x} I_2^0 \leqslant \beta < 0 \qquad \left(\text{или } \frac{\partial t_2(x)}{\partial x} \equiv 0 \right)$$

Как и раньше имеем

$$t_3^* = t_3^0 + \varepsilon \frac{\partial t_3(x_0)}{\partial x}\left[I_1^0 + I_2^0 + \int\limits_0^{t_3^0} X\left(\theta, x_0, \int\limits_0^1 \varphi(\theta, s, x_0)\, ds\right) d\theta \right] \equiv t_3^0 + \varepsilon \Theta_3.$$

Оказывается, что траектория $x_t(x_0) = x_1(t, 0, x_0) + \varepsilon (I_1^0 + I_2^0)$ после момента t_2^* не встречает больше поверхность $t = t_2(x)$.

Методом индукции легко убедится, что при условии

$$\frac{\partial t_i(x_0)}{\partial x} I_i^0 \leqslant \beta < 0 \qquad \left(\text{или } \frac{\partial t_i(x)}{\partial x} \equiv 0 \right) \qquad i = \overline{1, d_1} \tag{19}$$

для $x_t(x_0)$ получим следующее выражение

$$\begin{gathered} x_t(x_0) = x_1(t, 0, x_0) + \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} I_i^0, \\ t_{k-1}^0 + \varepsilon \Theta_{k-1} = t_{k-1}^* < t < t_k^* = t_k^0 + \varepsilon \Theta_k, \end{gathered} \tag{20}$$

где

$$\Theta_k = \frac{\partial t_k(x_0)}{\partial x}\left[\sum_{i=0}^{k-1} I_i^0 + \int_0^{t_k^0} X\left(\theta,\, x_0,\, \int_0^1 \varphi(\theta,\, s,\, x_0)\, ds\right) d\theta\right],$$

(21)

$$t_0^0 = \Theta_0 = I_0^0 = \Theta_{d_1+1} = 0, \qquad t_{d_1+1}^0 = T, \qquad k = \overline{1,\; d_1+1}$$

Следовательно, при выполнении условия (19) решение $x_t(x_0)$ существует на отрезке $[0,\, T]$ и определяется с точностью до величин порядка ε^2 согласно (20) и (21).

Теперь можно вычислить

$$x_T(x_0) = x_1(T,\, 0,\, x_0) + \varepsilon \sum_{i=1}^{d_1} I_i^0 = x_0 + \varepsilon\,[X_0(x_0) + I_0(x_0)]\, T +$$

$$+\varepsilon \int_0^T \left[X\left(\theta,\, x_0,\, \int_0^1 \varphi(\theta,\, s,\, x_0)\, ds\right) - X_0(x_0)\right] d\theta + \varepsilon\left[\sum_{i=1}^{d_1} I_i^0 - I_0(x_0)\, T\right].$$

Определим оператор A_0 следующим образом

$$A_0 x_0 = x_0 + \varepsilon\, T\,[X_0(x_0) + I_0(x_0)].$$

Тогда из (22) находим

$$\| x_T(x_0) - A_0 x_0 \| \leqslant \varepsilon\, \alpha(T)\, T + \varepsilon^2 M_1,$$

где $M_1 = M_1(T,\, d_1)$ — постоянная.

Пусть $\bar{x} = \bar{x}(\varepsilon t,\, x_0)$ решение усредненной системы (6) с начальным условием $\bar{x}(0,\, x_0) = x_0$. В силу интегрального представления

$$\bar{x}(\varepsilon t,\, x_0) = x_0 + \varepsilon \int_0^t [X_0(\bar{x}(\varepsilon\theta,\, x_0)) + I_0(\bar{x}(\varepsilon\theta,\, x_0))]\, d\theta.$$

получаем, что

$$\bar{A}x_0 = \bar{x}(\varepsilon T,\, x_0) = x_0 + \varepsilon \int_0^T [X_0(\bar{x}(\varepsilon\theta,\, x)) + I_0(\bar{x}(\varepsilon\theta,\, x_0))]\, d\theta.$$

При $t \geqslant 0$ и $x \in D$ имеем

$$\| X_0(x) \| \leqslant M, \qquad \| I_0(x) \| \leqslant M d_0, \qquad \| \bar{x}(\varepsilon t,\, x_0) - x_0 \| \leqslant \varepsilon(1 + d_0)\, MT,$$

$$\| X_0(\bar{x}) - X_0(x_0) \| \leqslant \varepsilon(1 + d_0)(1 + N)\, KMT,$$

$$\| I_0(\bar{x}) - I_0(x_0) \| \leqslant \varepsilon(1 + d_0)\, KMT d_0.$$

Тогда

(24) $$\| \bar{A}x_0 - A_0 x_0 \| \leqslant \varepsilon^2 (1 + d_0)(1 + \tilde{d}_0)\, KMT^2, \qquad \tilde{d}_0 = d_0 + N,$$

и

(25) $$\| x_T(x_0) - \bar{A}x_0 \| \leqslant \varepsilon\, \alpha(T)\, T + \varepsilon^2 [M_1 + (1 + d_0)(1 + \tilde{d}_0)\, KMT^2].$$

Так как $\bar{A}x_0$ принадлежит D с ρ — окрестностью, то из (24) и (25) следует, что $x_T(x_0)$ и $A_0 x_0$ принадлежат D соответственно с окрестностями

$$\rho_1 = \rho - \varepsilon \{\alpha(T)\, T + \varepsilon [M_1 + (1+d_0)(1+\tilde{d}_0) KMT^2]\},$$

$$\rho_1' = \rho - \varepsilon^2 (1+d_0)(1+\tilde{d}_0) KMT^2.$$

Предположим теперь, что в интервале $(T, 2T)$ лежат d_2 точек

$$T < t_{d_1+1}(\bar{A}x_0), \ \ldots, \ t_{d_1+d_2}(\bar{A}x_0) < 2T. \tag{26}$$

Но тогда в силу оценки (25) и непрерывности функций $t_i(x)$ следует, что на интервале $(T, 2T)$ лежат d_2 точек

$$T < t_{d_1+1}(x_T(x_0)) = t_1^{(1)}, \ \ldots, \ t_{d_1+d_2}(x_T(x_0)) = t_{d_2}^{(1)} < 2T.$$

Из условия (7) теоремы следует, что

$$\frac{\partial t_{d_1+i}(x_T(x_0))}{\partial x} I_{d_1+i}(x_T(x_0)) \leqslant \beta_1 < 0,$$

$$\beta_1 = \beta - \varepsilon_2, \quad i = \overline{1, d_2}.$$

Решение $x_t(x_0)$ системы (1), построенное для $0 \leqslant t < T$, продолжим на отрезок $[T, 2T]$, обозначая $x_T(x_0) = x_T$:

$$x_t(x_0) = x(t, T, x_T(x_0)) = x_T + \varepsilon \int_T^t X\Big(\theta, x_T, \int_0^1 \varphi(\theta, s, x_T)\, ds\Big)\, d\theta + O(\varepsilon^2) =$$

$$= x_1(t, T, x_T) + O(\varepsilon^2), \quad T \leqslant t < t^*_{d_1+1},$$

где $t^*_{d_1+1}$ — решение уравнения

$$t = t_{d_1+1}\left(x_T + \varepsilon \int_T^t X\Big(\theta, x_T, \int_0^1 \varphi(\theta, s, x_T)\, ds\Big)\, d\theta + O(\varepsilon^2)\right),$$

т.е.,

$$t^*_{d_1+1} = t_1^{(1)} + \varepsilon \frac{\partial t_{d_1+1}(x_T)}{\partial x} \int_T^{t_1^{(1)}} X\left(\theta, x_T, \int_0^1 \varphi(\theta, s, x_T)\, ds\right) d\theta + O(\varepsilon^2) \equiv$$

$$\equiv t_1^{(1)} + \varepsilon\, \Theta_1^{(1)} + O(\varepsilon^2).$$

Следовательно с точностью до ε^2 имеем

$$x_t(x_0) = x_1(t, T, x_T), \quad T \leqslant t < t_1^{(1)} + \varepsilon\, \Theta_1^{(1)} = t^*_{d_1+1},$$

$$\overset{+}{x}_{t^*_{d_1+1}}(x_0) = x_1(t^*_{d_1+1}, T, x_T) + \varepsilon I_1(x_1(t^*_{d_1+1}, T, x_T)) = \tag{27}$$

$$= x_1(t^*_{d_1+1}, T, x_T) + \varepsilon I_1^{(1)},$$

и поэтому

$$x_t(x_0)=x_1(t,\ T,\ x_T)+\varepsilon I_1^{(1)},\quad t^*_{d_1+1}\leqslant t<t_2^{(1)}+\varepsilon\,\Theta_2^{(1)}=t^*_{d_1+2}$$

и т.д.. В общем случае имеем

$$x_t(x_0)=x_1(t,\ T,\ x_T)+\varepsilon\sum_{i=0}^{k-1}I_i^{(1)},$$

(28) $$t_{k-1}^{(1)}+\varepsilon\,\Theta_{k-1}^{(1)}\leqslant t<t_k^{(1)}+\varepsilon\,\Theta_k^{(1)},$$

где

$$\Theta_k^{(1)}=\frac{\partial\, t_{d_1+1}(x_T)}{\partial x}\left[\int_T^{t_k^{(1)}}X\left(\theta,\ x_T,\ \int_0^1\varphi(\theta,\ s,\ x_T)\,ds\right)d\theta+\sum_{i=0}^{k-1}I_i^{(1)}\right],$$

$$I_i^{(1)}=I_{d_1+i}\left[x_1(t^*_{d_1+i},\ T,\ x_T)+\sum_{j=0}^{i-1}I_j^{(1)}\right]\quad i=\overline{1,\ k-1},$$

$$t=I_0^{(1)}=\Theta_0^{(1)}=\Theta_{d_2+1}^{(1)}=0,\quad t_0^{(1)}=T\ t_{d_2+1}^{(1)}=2\,T,\quad k=\overline{1,\ d_2+1}.$$

Итак, $x_t(x_0)$ определяется на отрезке $[T,\ 2\,T]$ с точностью до величин порядка ε^2 согласно формулам (27) и (28).

Следовательно

$$x_{2T}(x_0)=x_T+\varepsilon\,[X_0(x_T)+I_0(x_T)]\,T+\varepsilon\int_T^{2T}\left[X\left(\theta,\ x_T,\ \int_0^1\varphi(\theta,\ s,\ x_T)\,ds\right)-\right.$$
$$\left.-X_0(x_T)\right]d\theta+\varepsilon\left[\sum_{i=1}^{d_2}I_i^{(1)}-I_0(x_T)\,T\right]+O(\varepsilon^2).$$

Отсюда в силу определения оператора A_0 находим

(29) $$\|\,x_{2T}(x_0)-A_0\,x_T\,\|\leqslant\varepsilon\,\alpha(T)\,T+\varepsilon^2 M_2,$$

где $M_2=M_2(T,\ d_2)$ — постоянная.

Далее имеем

$$\bar A^2 x_0=\bar A\,x_0+\varepsilon\int_T^{2T}[X_0(\bar x(\varepsilon\theta,\ x_0))+I_0(\bar x(\varepsilon\theta,\ x_0))]\,d\theta,$$

$$\|\,A_0\,x_T-A_0(\bar A\,x_0)\,\|\leqslant[1+\varepsilon(1+\tilde d_0)\,KT]\,\{\varepsilon\alpha(T)\,T+$$
$$+\varepsilon^2\,[M_1+(1+d_0)\,(1+\tilde d_0)\,KMT^2]\},$$

(30) $$\|\,\bar x(\varepsilon\,t,\ x_0)-\bar A\,x_0\,\|\leqslant\varepsilon\,(1+d_0)\,MT\quad\text{при}\quad T<t<2\,T,$$

(31) $$\|\,A_0(\bar A x_0)-\bar A(\bar A x_0)\,\|\leqslant\varepsilon^2(1+d_0)\,(1+\tilde d_0)\,KMT^2.$$

Из (29) — (31) получаем

$$\| x_{2T}(x_0) - \bar{A}^2 x_0 \| \leqslant \varepsilon \{1 + [1 + \varepsilon (1 + \tilde{d}_0) KT]\} [\alpha (T) T + \varepsilon \overline{M}],$$

$$\overline{M} = (1 + d_0)(1 + \tilde{d}_0) KMT^2 + \max (M_1, M_2).$$

Следовательно, $x_{2T}(x_0)$ принадлежит области D вместе со своей ρ_2 — окрестностью

$$\rho_2 = \rho - \varepsilon \sum_{i=0}^{1} [1 + \varepsilon (1 + \tilde{d}_0) KT]^i \cdot [\alpha (T) T + \varepsilon \overline{M}].$$

Теперь по $x_{2T}(x_0)$ можно построить решение $x_t(x_0)$ для $t \in [2T, 3T]$. Выполнив вычисления, найдем

$$\| x_{3T}(x_0) - A_0 x_{2T} \| \leqslant \varepsilon \alpha (T) T + \varepsilon^2 M_3 (T, d_3),$$

где d_3 — число точек

$$2T < t_{d_1+d_2+1}(\bar{x}(2\varepsilon T, x_0)), \ldots, \quad t_{d_1+d_2+d_3}(\bar{x}(2\varepsilon T, x_0)) < 3T$$

лежащих в интервале $(2T, 3T)$.

Далее, как и выше, найдем

$$\| x_{3T}(x_0) - \bar{x}(3\varepsilon T, x_0) \| \leqslant \varepsilon \{1 + [1 + \varepsilon (1 + \tilde{d}_0) KT] +$$

$$+ [1 + \varepsilon (1 + \tilde{d}_0) KT]^2\} [\alpha (T) T + \varepsilon \overline{M}].$$

$$\overline{M} = (1 + d_0)(1 + \tilde{d}_0) KMT^2 + \max_{i = \overline{1, 3}} M_i.$$

Следовательно, $x_{3T}(x_0)$ лежит в области D вместе с ρ_3 — окрестностью

$$\rho_3 = \rho - \varepsilon \sum_{i=0}^{2} [1 + \varepsilon (1 + \tilde{d}_0) KT]^i \cdot [\alpha (T) T + \varepsilon \overline{M}].$$

Продолжая описанный процесс, на k — ом шаге построим решение $x_t(x_0)$ для $t \in [(k-1)T, kT]$, $kT \leqslant L\varepsilon^{-1}$. При этом получим (что нетрудно доказать методом математической индукции):

$$\| x_{kT}(x_0) - \bar{x}(k\varepsilon T, x_0) \| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{i=0}^{k-1} [1 + \varepsilon (1 + \tilde{d}_0) KT]^i \cdot [\alpha (T) T + \varepsilon \overline{M}],$$

$$\overline{M} = (1 + d_0)(1 + \tilde{d}_0) KMT^2 + \max_{i = \overline{1, k}} M_i.$$

Так как $d_i \leqslant c < \infty$, то

$$\overline{M} = (1 + d_0)(1 + \tilde{d}_0) KMT^2 + \max_i M_i (T, d_i) \leqslant M_0 (T) < \infty,$$

поэтому

$$\| x_{kT}(x_0) - \bar{x}(k\varepsilon T,\ x_0) \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(1+\tilde{d}_0)KT}[\alpha(T)T + \varepsilon M_0(T)][\exp\{1+\tilde{d}_0)KL\} + O(\varepsilon)]$$

Подберем теперь T и $\varepsilon_0 > 0$ так, чтобы при $\varepsilon < \varepsilon_0$ выполнялись условия

$$\frac{\alpha(T)}{(1+\tilde{d}_0)K}\exp\{(1+\tilde{d}_0)KL\} < \frac{\eta}{4}$$

и

$$O(\varepsilon)\frac{\alpha(T)}{(1+\tilde{d}_0)K} + \varepsilon[\exp\{(1+\tilde{d}_0)KL\} + O(\varepsilon)]\frac{M_0(T)}{(1+\tilde{d}_0)KT} < \frac{\eta}{4}.$$

Тогда

$$\| x_{kT}(x_0) - \bar{x}(k\varepsilon T,\ x_0) \| < \frac{\eta}{2}, \quad k = 0,\ 1, \ldots, \left[\frac{L}{\varepsilon T}\right]. \tag{32}$$

На интервале $[(k-1)T,\ kT]$ имеем оценки

$$\| \bar{x}(\varepsilon t,\ x_0) - \bar{x}((k-1)\varepsilon T,\ x_0) \| \leqslant \varepsilon(1+d_0)MT, \tag{33}$$

$$\| x_t(x_0) - x_{(k-1)T}(x_0) \| \leqslant \varepsilon M(T+c). \tag{34}$$

Из (32) — (34) видно, что если T достаточно большое и ε достаточно малое число,

$$\varepsilon < \min\left(\varepsilon_0,\ \frac{\eta}{4M(T+c)},\ \frac{\eta}{4(1+d_0)MT}\right),$$

на отрезке $[(k-1)T,\ kT]$ будет справедлива оценка

$$\| x_t(x_0) - \bar{x}(\varepsilon t,\ x_0) \| < \eta.$$

Следовательно на отрезке $0 \leqslant t \leqslant L\varepsilon^{-1}$ выполнено неравенство $\| x_t(x_0) - \bar{x}(\varepsilon t,\ x_0) \| < \eta$. Этим теорема доказана.

Предположим, что усредненная система (4) имеет изолированное положение равновесия $\bar{x} = x^0$:

$$X_0(x^0) + I_0(x^0) = 0. \tag{35}$$

Вопрос качественного соответствия между точными решениями системы (1), (3) и ее приближениями $\bar{x}$ — решениями системы (4) выясняется следующими теоремами:

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1 — 4 *теоремы* 1. *Тогда если положение равновесия $\bar{x} = x^0$ усредненной системы асимптотически устойчиво и*

$$\frac{\partial t_i(x)}{\partial x} I_i(x) \leqslant \beta < 0 \quad \left(\text{либо } \frac{\partial t_i(x)}{\partial x} \equiv 0\right) \tag{36}$$

для всех $i = \dot{1},\ 2, \ldots$ и всех x из некоторой ρ_0 — окрестности точки x^0, то существует такая ρ — окрестность $D_\rho\ (\rho \leqslant \rho_0)$ точки x^0 и такое $\varepsilon^0 > 0$, что при всех $\varepsilon < \varepsilon^0$ и всех $x \in D_\rho$ решение $x_t(x)$, $x_0(x) = x$ системы (1) *равномерно ограничено при* $t \in (0,\ \infty)$.

Теорема 3. *Пусть система* (1) *удовлетворяет условиям* 1 — 4 *теоремы* 1 *как при* $t>0$, *так и при* $t<0$. *Положим*

$$I_0(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t<t_i<t+T}I_i(x)\quad при\quad t\geqslant 0.$$

(37)

$$I^0(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t-T<t_i<t}I_i(x)\quad при\quad t\leqslant 0.$$

Предположим, что усредненная при $t\geqslant 0$ система

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=\varepsilon\,[X_0(\bar{x})+I_0(\bar{x})] \tag{38}$$

имеет асимптотически устойчивое положение равновесия $x=x^0$, удовлетворяющее неравенству (36) для x из некоторой ρ_0 — окрестностью. Пусть в ρ — окрестности D_ρ решения x^0, указанной в теореме 2, усредненная при $t\leqslant 0$ система

$$\frac{d\bar{x}_1}{dt}=\varepsilon\,[X_0(\bar{x}_1)+I^0(\bar{x}_1)] \tag{39}$$

имеет положение равновесия $\bar{x}_1=\overset{0}{x}_1$, и

$$\frac{\partial t_i(x)}{\partial x}I_i(x)\leqslant\beta<0\quad\left(\text{либо}\,\frac{\partial t_i(x)}{\partial x}\equiv 0\right) \tag{40}$$

для всех $i=-1,\,-2,\,\ldots$ и всех x из некоторой ρ_0' — окрестностью положения равновесия $\overset{0}{x}_1$. Тогда

1. Если положение равновесия $\overset{0}{x}_1$ системы (39) асимптотически устойчиво при $t<0$, то найдется такое $\varepsilon^0>0$ и такая область D_{ρ_1}, содержащая x^0 и $\overset{0}{x}_1$, что при $\varepsilon<\varepsilon^0$ все решения $x_t(x)$ системы (1), (3), для которых $x\in D_{\rho_1}$, равномерно ограничены при $t\in(-\infty,\,\infty)$.

2. Если положение равновесия $\overset{0}{x}_1$ системы (39) асимптотически устойчиво, то найдется такое $\varepsilon_0>0$ и такое x^*, что решение $x_t(x^*)$ системы (1), (3) ограничено при $t\in(-\infty,\,+\infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Самойленко, А. М., *О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра*, ДАН УССР, 1962, № 10.

[2] Самойленко, А. М., *Обоснование принципа усреднения для дифференциальных уравнений с разрывной правой частью*, В сб. Приближенные методы решения дифференциальных уравнении, Изд-во „Наукова думка", Киев, 1963.

[3] Самойленко, А. М., *К вопросу обоснования метода усреднения для исследования колебании в системах, подверженных импульсному воздействию*, Украинский математический журнал, 1967, т. 19, № 5.

Высший машинно — электротехническии
институт имени В. И. Ленина — София

Пловдивски университет
имени П. Хилендарского