PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 23 (37) 1978, pp. 13—20

STETIGKEITSAUSSAGEN FÜR EINE KLASSE VERALLGEMEINERTER KONVEXER FUNKTIONEN IN TOPOLOGISCHEN LINEAREN RÄUMEN

Wolfgang W. Breckner

(Eingegangen am 8. April 1977.)

1. In den letzten Jahren befassten sich zahlreiche Arbeiten mit konvexen Funktionen und deren Verallgemeinerungen. Dabei zeigte sich, dass der Begriff der konvexen Funktion sowohl für die Funktionalanalysis als auch für viele ihrer Anwendungsgebiete (z. B. für die Approximationstheorie und für die nichtlineare Optimierung) von fundamentaler Bedeutung ist. Neuere zusammenfassende Darstellungen über die wichtigsten Verallgemeinerungen dieses Begriffes stammen von K.-H. Elster und G. Folgmann [4], [5].

In der vorliegenden Arbeit behandeln wir eine neue Klasse verallgemeinerter konvexer Funktionen. Die Anregung diese Klasse einzuführen gaben uns einerseits die Untersuchungen von M. Landsberg [8] über topologische lineare Räume die nicht lokalkonvex sind und andererseits die Untersuchungen von S. Rolewicz [12], [13, S. 61] über lokalbeschränkte topologische lineare Räume (vgl. dazu auch G. Köthe [7, S. 162—166]). Diese Untersuchungen führten zu dem Begriff der s-Halbnorm und dem der s-Norm, der den bekannten Begriff der Halbnorm bzw. Norm verallgemeinert. Beachtet man, dass Halbnormen und Normen spezielle konvexe Funktionen sind, dann ist es naheliegend den Begriff der konvexen Funktion auch so zu verallgemeinern, dass man die s-Halbnormen und s-Normen als Spezialfälle dieser verallgemeinerten konvexen Funktionen erhält. Die s-konvexen und die rational s-konvexen Funktionen, die wir im folgenden betrachten, sind Verallgemeinerungen dieser Art.

Gegeben seien eine reelle Zahl $s \in]0, 1]$ und eine nichtleere konvexe Teilmenge M eines reellen oder komplexen linearen Raumes. Eine auf M erklärte reellwertige Funktion f heisst *s-konvex* (bzw. *rational s-konvex*), wenn für alle reellen (bzw. rationalen) Zahlen $a>0$, $b>0$ mit $a+b=1$ und alle Elemente x, y aus M die Ungleichung

$$f(ax+by) \leqq a^s f(x) + b^s f(y) \tag{1.1}$$

gilt.

Offensichtlich stimmt der Begriff der 1-konvexen Funktion mit dem der konvexen Funktion überein. Rational 1-konvexe Funktion wurden erstmals von J. L. W. V. Jensen [6] eingehender untersucht.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist es notwendige und hinreichende Bedingungen für die Stetigkeit einer rational s-konvexen Funktion in einem inneren Punkt bzw. im Inneren einer konvexen Teilmenge eines topologischen linearen Raumes anzugeben. Unsere diesbezüglichen Ergebnisse, die bekannte Kriterien aus der Theorie der konvexen Funktionen verallgemeinern, werden im zweiten Abschnitt unserer Arbeit gebracht und durch die Sätze 2.1 und 2.2 ausgedrückt. Als Folgerungen ergeben sich aus Satz 2.2 Kriterien für die s-Konvexität einer rational s-konvexen Funktion. Diese sind im Korollar 2.3 zusammengefasst.

Der Begriff der rational s-konvexen Funktion ist nicht eine überflüssige Verallgemeinerung der s-konvexen Funktion. Wendet man Korollar 2.3 auf rational 1-konvexe Funktionen an, so erhält man mehrere bekannte Aussagen über die Konvexität konvexer Funktionen im Sinne von Jensen (vgl. D. S. Mitrinović [10, S. 11]). Eine reellwertige Funktion ist nämlich genau dann konvex im Sinne von Jensen, wenn sie rational 1-konvex ist. — Der Beweis des Korollars 2.3 ist ausserdem wesentlich einfacher als die bisher in der Literatur angegebenen Beweise (vgl. F. Valentine [14, S. 138—139]) für die Konvexität konvexer Funktionen im Sinne von Jensen in topologischen linearen Räumen.

Ein weiterer Vorteil, den die Einführung der rational s-konvexen Funktionen bietet, ergibt sich, wenn man beachtet, dass für additive Funktionen ähnliche Stetigkeitsaussagen gelten wie für konvexe Funktionen (z. B. ist eine additive Funktion in einem Punkt eines topologischen linearen Raumes stetig, dann ist sie in dem ganzen Raum stetig; ist eine konvexe Funktion in einem Punkt einer offenen konvexen Menge stetig, dann ist sie in der ganzen Menge stetig). Bisher wurden diese Aussagen für beide Funktionenklassen stets getrennt bewiesen. Im letzten Abschnitt unserer Arbeit bemerken wir, dass nicht nur die konvexen Funktionen, sondern auch die additiven Funktionen Spezialfälle der rational 1-konvexen Funktionen sind. Daher ist es nun möglich die für diese Klassen bekannten Ergebnisse durch Spezialisierung aus den Sätzen des zweiten Abschnitts gleichzeitig zu erhalten.

2. Im folgenden bezeichnen wir mit M eine nichtleere Teilmenge eines reellen oder komplexen topologischen linearen Raumes, mit int M ihr Inneres, mit R den Körper der reellen Zahlen und mit s eine Zahl aus dem Intervall $]0, 1]$. Ausser diesen Bezeichnungen benötigen wir noch einige Definitionen um die Ergebnisse unserer Untersuchungen formulieren zu können.

Es sei f eine auf M erklärte reellwertige Funktion und x_0 ein Punkt der Menge M. Wir sagen, f ist in x_0 *lokal nach oben beschränkt*, wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt mit $U \subseteq M$ und eine reelle Zahl a, so dass die Ungleichung

$$f(x) \leqq a \quad \text{für alle } x \in U \tag{2.1}$$

gilt. f heisst in x_0 *lokal beschränkt*, wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt mit $U \subseteq M$ und eine reelle Zahl a, so dass die Ungleichung

$$|f(x)| \leqq a \quad \text{für alle } x \in U$$

gilt. Ist f in jedem Punkt einer nichtleeren Teilmenge M_1 von M lokal nach oben beschränkt (bzw. lokal beschränkt), dann sagen wir f ist in M_1 lokal nach oben beschränkt (bzw. lokal beschränkt).

Für f führen wir ausserdem noch die Menge

$$E(f)=\{(x, a)\in M\times R : x\in \operatorname{int} M,\ f(x)<a\}$$

ein.

Satz 2.1. *Ist M eine konvexe Menge, $f: M\to R$ eine rational s-konvexe Funktion und x_0 ein innerer Punkt von M, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(A_1) f ist in x_0 lokal beschränkt.

(A_2) f ist in x_0 lokal nach oben beschränkt.

(A_3) f ist in x_0 stetig.

(A_4) f ist in x_0 nach oben halbstetig.

(A_5) (x_0, a_0) ist für alle $a_0\in R$ mit $f(x_0)<a_0$ ein innerer Punkt der Menge $E(f)$.

(A_6) Es gibt eine reelle Zahl a_0, so dass (x_0, a_0) ein innerer Punkt der Menge $E(f)$ ist.

Beweis. Offensichtlich folgt (A_2) aus (A_1), (A_4) aus (A_3) und (A_6) aus (A_5).

Wir nehmen nun an (A_2) sei richtig. Dann gibt es eine Umgebung U des Punktes x_0 mit $U\subseteq M$ und eine reelle Zahl a so dass (2.1) gilt. Sei $\varepsilon>0$ beliebig vorgegeben. Wir wählen eine kreisförmige Nullumgebung V für die $x_0+V\subseteq U$ gilt und eine natürliche Zahl n, die den Ungleichungen

$$n^{-s}\{a+[(n-1)^s-n^s]f(x_0)\}<\varepsilon, \tag{2.2}$$

$$n^{-s}\{a+[n^s-(n+1)^s]f(x_0)\}<\varepsilon \tag{2.3}$$

genügt. die Menge $W=x_0+n^{-1}V$ ist dann eine Umgebung von x_0 mit $W\subseteq U$. Ferner gilt $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ für alle $x\in W$.

In der Tat, ist x ein beliebiger Punkt von W, so gehören die Punkte $y=x_0+n(x-x_0)$ und $z=x_0-n(x-x_0)$ der Menge x_0+V an. Wegen (2.1) gilt demnach $f(y)\leqq a$ und $f(z)\leqq a$. Beachtet man nun die Darstellungen

$$x=n^{-1}y+n^{-1}(n-1)\,x_0, \qquad x_0=(n+1)^{-1}z+n\,(n+1)^{-1}x,$$

so erhält man auf Grund der Definition der rational s-konvexen Funktion die Ungleichungen

$$f(x)\leqq n^{-s}[f(y)+(n-1)^s f(x_0)]\leqq n^{-s}[a+(n-1)^s f(x_0)], \tag{2.4}$$

$$f(x_0)\leqq (n+1)^{-s}[f(z)+n^s f(x)]\leqq (n+1)^{-s}[a+n^s f(x)]. \tag{2.5}$$

Aus (2.4) ergibt sich

$$f(x)-f(x_0) \leqq n^{-s}\{a+[(n-1)^s-n^s]f(x_0)\}, \tag{2.6}$$

während (2.5) die Ungleichung

$$f(x) \geqq -n^{-s}[a-(n+1)^s f(x_0)]$$

zur Folge hat, aus der

$$f(x)-f(x_0) \geqq -n^{-s}\{a+[n^s-(n+1)^s]f(x_0)\} \tag{2.7}$$

resultiert. Berücksichtigt man nun (2.2) und (2.3), so folgt aus (2.6) und (2.7) die Ungleichung $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Da ε beliebig war, ist demnach bewiesen, dass f im Punkt x_0 stetig ist. Folglich gilt $(A_2) \Rightarrow (A_3)$.

Es sei nun (A_4) richtig. Ist a_0 eine reelle Zahl die der Ungleichung $f(x_0)<a_0$ genügt, dann gilt auch $f(x_0)<a_0-\varepsilon$, wobei

$$\varepsilon = 2^{-1}[a_0-f(x_0)]$$

gesetzt wurde. Weil f in x_0 nach oben halbstetig ist, gibt es folglich eine Umgebung U von x_0 mit $U \subseteq \operatorname{int} M$ und $f(x)<a_0-\varepsilon$ für alle $x \in U$. Hieraus folgt

$$U \times]a_0-\varepsilon, a_0+\varepsilon[\subseteq E(f); \tag{2.8}$$

also ist (x_0, a_0) ein innerer Punkt von $E(f)$. Demnach gilt $(A_4) \Rightarrow (A_5)$.

Es sei nun (A_6) richtig. Dann gibt es eine Umgebung U des Punktes x_0 und eine reelle Zahl $\varepsilon>0$ so dass (2.8) gilt. Aus (2.8) folgt $U \subseteq M$ und $f(x)<a_0$ für alle $x \in U$. Die Funktion f ist demnach in x_0 lokal nach oben beschränkt. Also gilt $(A_6) \Rightarrow (A_2)$.

Es sei nun (A_2) richtig. Dann gibt es eine Umgebung U des Punktes x_0 mit $U \subseteq M$ und eine reelle Zahl $a>0$, so dass (2.1) gilt. Wir wählen eine kreisförmige Nullumgebung V mit $x_0+V \subseteq U$ und setzen $W=x_0+V$. Es sei x ein Punkt von W. Wegen $W \subseteq U$ und (2.1) ist dann $f(x) \leqq a$. Daraus folgt

$$f(x) \leqq a-2^s f(x_0)+2^s|f(x_0)|. \tag{2.9}$$

Weil $y=x_0-(x-x_0)$ auch zu W gehört, haben wir $f(y) \leqq a$. Beachtet man nun die Darstellung $x_0=2^{-1}x+2^{-1}y$, so folgt auf Grund der Definition der rational s-konvexen Funktion

$$f(x_0) \leqq 2^{-s}f(x)+2^{-s}f(y) \leqq 2^{-s}f(x)+2^{-s}a.$$

Hieraus resultiert

$$f(x) \geqq 2^s f(x_0)-a \geqq -[a-2^s f(x_0)+2^s|f(x_0)|]. \tag{2.10}$$

Aus (2.9) und (2.10) folgt

$$|f(x)| \leqq a-2^s f(x_0)+2^s|f(x_0)|.$$

Da $x \in W$ beliebig war, ist demnach f im Punkt x_0 lokal beschränkt. Somit gilt $(A_2) \Rightarrow (A_1)$ und der Satz ist bewiesen.

B e m e r k u n g. Ist M eine konvexe Menge und $f: M \to R$ eine rational s-konvexe Funktion mit $0 < s < 1$, dann gilt

$$f(x) \geqq 0 \quad \text{für alle } x \in M. \tag{2.11}$$

In der Tat, ist x ein Punkt von M, dann ergibt sich aus

$$f(x) = f(2^{-1}x + 2^{-1}x) \leqq 2^{-s} f(x) + 2^{-s} f(x) = 2^{1-s} f(x)$$

die Ungleichung $(1 - 2^{1-s}) f(x) \leqq 0$, die $f(x) \geqq 0$, liefert, denn es ist $1 < 2^{1-s}$. — Wegen (2.11) folgt also für eine rational s-konvexe Funktion mit $0 < s < 1$ die Aussage (A_1) sofort aus (A_2).

S a t z 2.2. *Es sei M eine konvexe Menge und $f: M \to R$ eine rational s-konvexe Funktion. Gibt es einen Punkt $x_0 \in \operatorname{int} M$, so dass eine der Aussagen $(A_1), \ldots, (A_6)$ von Satz 2.1 gilt, dann gelten folgende (äquivalente) Aussagen:*

(B_1) *f ist in $\operatorname{int} M$ lokal beschränkt.*

(B_2) *f ist in $\operatorname{int} M$ lokal nach oben beschränkt.*

(B_3) *f ist in $\operatorname{int} M$ stetig.*

(B_4) *f ist in $\operatorname{int} M$ nach oben halbstetig.*

(B_5) *Die Menge $E(f)$ ist offen.*

B e w e i s. O. b. d. A. können wir annehmen, dass Aussage (A_2) gilt. Dann gibt es eine Umgebung U des Punktes x_0 mit $U \subseteq M$ und eine reelle Zahl a, so dass (2.1) gilt. Sei y_0 ein innerer Punkt von M. Wegen

$$\lim_{n \to \infty} [y_0 + n^{-1}(y_0 - x_0)] = y_0$$

gibt es dann eine natürliche Zahl n so dass der Punkt

$$y = y_0 + n^{-1}(y_0 - x_0)$$

in M liegt. Für

$$V = n(n+1)^{-1} y + (n+1)^{-1} U \tag{2.12}$$

gilt demnach $V \subseteq M$, denn M ist eine konvexe Menge. Ist x ein Punkt von V, dann gibt es wegen (2.12) ein $u \in U$, so dass gilt

$$x = n(n+1)^{-1} y + (n+1)^{-1} u.$$

Mit Hilfe dieser Darstellung von x erhält man auf Grund der Definition der rational s-konvexen Funktion

$$f(x) \leqq n^s (n+1)^{-s} f(y) + (n+1)^{-s} f(u) \leqq (n+1)^{-s} [n^s f(y) + a].$$

Da x ein beliebiges Element aus V war und V eine Umgebung von y_0 ist (denn es gilt nämlich $V=y_0+(n+1)^{-1}(U-x_0)$), bedeutet dies, dass f in y_0 lokal nach oben beschränkt ist. Also gilt (B_2). Nach Satz 2.1 gelten dann auch die übrigen Aussagen (B_1), (B_3), (B_4) und (B_5). Damit ist der Satz bewiesen.

Korollar 2.3. *Es sei M eine offene konvexe Menge und $f: M\to R$ eine rational s-konvexe Funktion. Gibt es einen Punkt $x_0\in M$, so dass eine der Aussagen $(A_1), \ldots, (A_6)$ von Satz 2.1 gilt, dann ist f eine s-konvexe Funktion.*

Beweis. Es seien $a>0$ und $b>0$ reelle Zahlen mit $a+b=1$ und x, y Punkte der Menge M. Ist (a_n) eine Folge rationaler Zahlen aus dem Intervall $]0, 1[$, die gegen a konvergiert, dann gilt auf Grund der Definition der rational s-konvexen Funktion

$$f(a_n x+(1-a_n)y)\leqq a_n^s f(x)+(1-a_n)^s f(y) \tag{2.13}$$

für alle natürlichen Zahlen n. Nach Satz 2.2 ist die Funktion f aber in M stetig. Durch Grenzübergang folgt also aus (2.13) die Ungleichung (1.1). Damit ist bewiesen, dass f s-konvex ist.

3. Jede konvexe Funktion ist rational 1-konvex. Daher verallgemeinern Satz 2.1 und Satz 2.2 bekannte Ergebnisse über die Stetigkeit konvexer Funktionen in topologischen linearen Räumen (vgl. N. Bourbaki [2, S. 60], P.-J. Laurent [9, S. 333—336], Ş. Cobzaş und I. Muntean [3]).

Aus den Ergebnissen des zweiten Abschnitts folgen auch noch andere bekannte Resultate. Um dieses zu zeigen, benötigen wir den folgenden Hilfssatz der die rational 1-konvexen Funktionen charakterisiert.

Hilfssatz 3.1. Es sei M eine nichtleere konvexe Teilmenge eines reellen oder komplexen linearen Raumes. Eine Funktion $f: M\to R$ ist genau dann rational 1-konvex, wenn für alle x, $y\in M$ die Ungleichung

$$f(2^{-1}x+2^{-1}y)\leqq 2^{-1}f(x)+2^{-1}f(y) \tag{3.1}$$

gilt.

Dieser Hilfssatz wurde erstmals von J. L. W. V. Jensen [6] für reelle Funktionen einer reellen Veränderlichen bewiesen. Der von ihm angegebene Beweis (er ist auch im Buch von D. S. Mitrinović [10, S. 12—13] wiedergegeben) lässt sich wörtlich auf den von uns betrachteten Fall übertragen.

Beachtet man Hilfssatz 3.1, so folgen aus Korollar 2.3 die in dem Buch von F. Valentine [14, S. 138—139] angegebenen und dort auf andere Art bewiesenen Sätze über die Konvexität einer Funktion $f: M\to R$ die für jedes Punktepaar x, $y\in M$ Bedingung (3.1) erfüllt. Eine Funktion f mit dieser Eigenschaft wird auch noch *konvex in Sinne von Jensen* genannt.

Korollar 3.2. *Es sei X ein reeller oder komplexer linearer Raum. Ist $f: X\to R$ eine additive Funktion, dann ist sie rational 1-konvex.*

B e w e i s. Wegen der Additivität von f gilt (vgl. [1, S. 43])

$$f(2^{-1}x+2^{-1}y)=2^{-1}[f(2^{-1}x+2^{-1}y)+f(2^{-1}x+2^{-1}y)]=$$
$$=2^{-1}f(x+y)=2^{-1}f(x)+2^{-1}f(y)$$

für alle $x, y \in X$. Nach Hilfssatz 3.1 ist dann f rational 1-konvex. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wegen Korollar 3.2 kann man also aus Satz 2.1 und Satz 2.2 notwendige und hinreichende Bedingungen für die Stetigkeit additiver Funktionen in topologischen linearen Räumen herleiten. Wir gehen darauf nicht näher ein.

Eine Anwendung von Korollar 2.3 auf additive Funktionen ergibt

K o r o l l a r 3.3 *Es sei X ein topologischer linearer Raum über dem Körper der reellen Zahlen und $f: X \to R$ eine additive Funktion. Gibt es ein $x_0 \in X$, so dass eine der Bedingungen $(A_1), \ldots, (A_6)$ von Satz 2.1 erfüllt ist, dann ist f linear und stetig.*

B e w e i s. Nach Korollar 3.2 sind f und $(-f)$ rational 1-konvex. Wendet man nun Korollar 2.3 auf diese beiden Funktionen an, so ergibt sich, dass f und $(-f)$ konvex sind. Daher gilt

$$f(ax+by)=af(x)+bf(y)$$

für alle reellen Zahlen $a>0$, $b>0$ mit $a+b=1$ und alle $x, y \in X$. Beachet man nun, dass f für das Nullelement von X den Weit Null annimmt, so folgt $f(ax)=af(x)$ für alle $a \in [0, 1]$ und alle $x \in X$. Hieraus ergibt sich aber $f(ax)=af(x)$ für alle $a \in R$ und alle $x \in X$. Demnach ist f linear. Die Stetigkeit von f folgt nach Satz 2.2.

LITERATUR

[1] H. B l u m b e r g, *On convex functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 20 (1919), 40—44.

[2] N. B o u r b a k i, *Éléments de mathématique*, Livre V: *Espaces vectoriels topologiques*. Chap. I et II. Deuxième édition. Paris: Hermann 1966.

[3] Ş. C o b z a ş and I. M u n t e a n, *Continuous and locally Lipschitz convex functions*, Mathematica (Cluj) (erscheint demnächst).

[4] K.-H. E l s t e r und G. F o l g m a n n, *Über Verallgemeinerungen konvexer Funktionen und deren Anwendung in der Theorie der nichtlinearen Optimierung*, Wiss. Z. TH, Ilmenau 16 (1970), Nr. 4, 23—34.

[5] K.-H. E l s t e r und G. F o l g m a n n, *Verallgemeinerte konvexe Funktionale in linearen Räumen* (Teil 1), Wiss. Z. TH, Ilmenau 20 (1974), Nr. 3, 11—30.

[6] J. L. W. V. J e n s e n, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*, Acta Math. 30 (1906), 175—193.

[7] G. K ö t h e, *Topologische lineare Räume*, I. Zweite Auflage. Berlin — Heidelberg — New York: Springer-Verlag 1966.

[8] M. L a n d s b e r g, *Lineare topologische Räume, die nicht lokalkonvex sind*, Math. Z. 65 (1956), 104—112.

[9] P.-J. Laurent, *Approximation et optimisation*, Paris: Hermann 1972.

[10] D. S. Mitrinović, *Analytic inequalities*, Berlin — Heidelberg — New York: Springer-Verlag 1970.

[11] M. Pavel, *On quasi normed spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 5 (1957), 479—484.

[12] S. Rolewicz, *On a certain class of linear metric spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 5 (1957), 471—473.

[13] S. Rolewicz, *Metric linear spaces*, Warszawa: PWN — Polish Scientific Publishers 1972.

[14] F. Valentine, *Konvexe Mengen*, Mannheim: Bibliographisches Institut 1968.

Universitatea "Babeş-Bolyai",
Facultatea de Matematica,
R-3400 CLUJ-NAPOCA,
Str. Kogalniceanu Nr. 1,
R. S. Romania.