PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 23 (37) 1978, p. p. 193—206

О ПРИБЛИЖЕНИИ УГЛОМ ФУНКЦИЙ С ДОМИНИРУЮЩИМ СМЕШАННЫМ МОДУЛЕМ ГЛАДКОСТИ

Милош Томич

(Получено 4 мая 1977)

Целью этой статьи является распространение нетоторых результатов о приближении углом, доказанных М. К. Потаповым [5], [6] для $2\overline{u}$ периодических функций, на случай непериодических функций, определённых на всём пространстве R_n.

I

Как обычно будем говорить, что функция $f=f(x_1, \ldots, x_n) \in L_p(R_n)$, $1 \leq p \leq \infty$, если f измеримая на всём пространстве R_n и такая, что

$$\|f\|_p = \Big(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, \ldots, x_n)|^p \, dx_1 \cdots dx_n \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad \text{если } 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \operatorname{vrai} \sup |f(x_1, \ldots, x_n) < \infty \qquad \text{если } p = \infty.$$

Определение смешанного m-мерного модуля гладкости ω по переменным x_{ij}, $(1 \leq j \leq m \leq n;\ 1 \leq i_j \leq n)$ даётся так (см [2], [5]).

$$\omega_{K_{i_1} \ldots K_{i_m}} (f_i \, \delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_m})_p = \sup_{|h_{i_j}| \leq \delta_{i_j}} \| \Delta_{h_{i_1} \ldots h_{i_m}}^{K_{i_1} \ldots K_{i_m}} f \|_p$$

где

$$\Delta_{h_{i_1} \ldots h_{i_m}}^{K_{i_1} \ldots i_m} f = \Delta_{h_{i_1}}^{K_{i_1}} \big(\Delta_{h_{i_2} \ldots h_{i_m}}^{K_{i_2} \ldots K_{i_m}} f \big),$$

(K_i натуральные числа)

$$\Delta_{h_i}^{K_i} f = \sum_{j_i=0}^{K_i} (-1)^{K_i - j_i} \binom{K_i}{j_i} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + j_i h_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Определения обобщённой производной и следа функции даны в [4], 4.1. и 6.4.

Через g_{ν_i} обозначим функцию $g_{\nu_i}(x_1, \ldots, x_n) \in L_p(R_n)$, которая является целой типа ν_i по переменной x_i. Отметим, что из условия $g_{\nu_i} \in L_p(R_n)$ для $\nu_i = 0$ и $1 \leq p < \infty$ вытекает, что $g_{\nu_i} \equiv 0$, а для $\nu_i = 0$ и $p = \infty$, из $g_{\nu_i} \in L_\infty$ вытекает, что $g_{\nu_i} = \varphi(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, (см. [4], стр. 122 и 137).

Определение I. Величину

$$Y_{\nu_{i_1} \ldots \nu_{i_m}}(f)_p = \inf_{g_{\nu_{i_j}} \in L_p(R_n)} \left\| f - \sum_{j=1}^{m} g_{\nu_{i_j}} \right\|_p, \quad (m \leq n, \nu_{i_j} \geq 0),$$

назовём наилучшим приближением m-мерным углом функции f по переменным $x_{i_1}, \ldots, x_{i_m}$.

Для приближения одномерным углом функции $f(x, y)$ будем пользоваться символами

$$Y_\lambda(f)_p = E_{\lambda\infty}(f)_p = \inf_{g_{\lambda\infty}} \| f - g_{\lambda\infty} \|_p, \quad (\lambda \geqslant 0),$$

$$Y_\mu(f)_p = E_{\infty\mu}(f)_p = \inf_{g_{\infty\mu}} \| f - g_{\infty\mu} \|_p, \quad (\mu \geqslant 0).$$

Как показано в работах [5—7] приближение углом является хорошим аппаратом для исследования классов функций с доминирующим смешанным модулем гладкости. Поэтому, в этой работе мы изучим некоторые свойства приближения углом.

Большинство теорем этой работы для простоты мы докажем для случая $n = 2$ или $n = 3$. При этом будем пользоваться обобщённым интегралом Фейера, который для функции одного переменного определён следующим образом

$$K_\lambda f = K_\lambda f(x) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - t)\, \Phi\left(\frac{\lambda t}{2}\right) dt, \quad (\lambda > 0),$$

причём

$$\Phi(u) = \frac{\cos u - \cos 2u}{\bar{u}\, u^2}, \quad \| \Phi \|_1 < \infty,$$

(см [I], 106). В [I] показано, что если $\dfrac{f(x)}{1 + |x|} \in L(R)$ или $\dfrac{f(x)}{1 + |x|} \in L_2(R)$, то $K_\lambda f$ целая функция типа λ, и кроме того, если $f(x)$ целая функция типа $\tau \leq \lambda/2$, удовлетворяющая условию $\dfrac{f(x)}{1 + |x|} \in L_2(R)$, то $K_\lambda f = f$.

Введём в рассмотрении величини

$$K_{\lambda\infty} f = K_{\lambda\infty} f(x, y) = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, y)\, \Phi\left(\frac{\lambda}{2}(x - t)\right) dt, \quad (\lambda > 0),$$

$$K_{\infty\mu} f = K_{\infty\mu} f(x, y) = \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, u)\, \Phi\left(\frac{\mu}{2}(y - u)\right) du, \quad (\mu > 0),$$

$$K_{\lambda\mu} f = K_{\lambda\mu} f(x, y) = K_{\lambda\infty} K_{\infty\mu} f, \quad (\lambda, \mu > 0)$$

На основании выше сказанного заключаем, что $K_{\lambda\infty}f$ есть целая функция типа λ по x и $K_{\infty\mu}f$ целая функция типа μ по y, если только $f(x, y)\in L_p(R_2)$, $1\leq p\leq\infty$. Действительно, по теореме Фубини, из $f(x, y)\in L_p(R_2)$ следует $f(x, y)=\Psi(x)\in L_p(R)$ для почти всех $y\in R$. Если $\Psi(x)\, L_p(R)$, $1<p<\infty$, то применением неравенства Гёльдера получаем $\frac{\Psi(x)}{1+|x|}\in L(R)$; если $\Psi(x)\in L(R)$, то тем более $\frac{\Psi(x)}{1+|x|}\in L(R)$; если $\Psi(x)\in L_\infty$ то $\frac{\Psi(x)}{1+|x|}\in L_2(R)$.

Для нулевых значений λ и μ и $1\leq p<\infty$ положим $K_{0\infty}f=0$, $K_{\infty 0}f=0$, $K_{00}f=0$, $K_{\lambda 0}f=0$, $K_{0\mu}f=0$, $(\lambda, \mu>0)$.

Пусть $\nu=(\nu_1, \dots, \nu_n)\geqslant 0$ а $(i_1, \dots, i_s)$ набор индексов, $1\leq i_j\leq n$; $1\leq s\leq n$; $j=1, \dots, s$. Условимся, что

$$\nu^{(i_1, \dots, i_s)}=(\nu_1, \dots, \nu_n)^{(i_1, \dots, i_s)}=(\rho_1, \dots, \rho_n)$$

причём $\rho_j=\nu_{i_j}$ если $i_j\in(i_1, \dots, i_s)$ и $\rho_j=0$ если $i_j\notin(i_1, \dots, i_s)$.

Лемма I. *Если обозначим*

$$\mathscr{H}_{\lambda\mu}f=K_{2\lambda\infty}f+K_{\infty 2\mu}f-K_{2\lambda 2\mu}f$$

то для функции $f(x, y)\in L_p(R_2)$, $1\leq p\leq\infty$, $\lambda>0$, $\mu>0$, *и* $1\leq p<\infty$, $\lambda\geqslant 0$, $\mu\geqslant 0$, *справедливо неравенство*

$$\|f-\mathscr{H}_{\lambda\mu}f\|_p\leqslant CY_{\lambda\mu}(f)_p$$

причём C абсолютная константа.

Доказательство. Пусть $1\leq p<\infty$, $\lambda\geqslant 0$, $\mu\geqslant 0$ и $p=\infty$, $\lambda>0$ $\mu>0$. Берём функцию $G=f-g_{\lambda\infty}-g_{\infty\mu}$, причём каждая из функций $g_{\lambda\infty}$, $g_{\infty\mu}$ из $L_p(R_2)$ пространства. По теореме Фубини $g_{\lambda\infty}(x, y)\in L_p(R)$ п.в. по y, и для таких y применением неравенства С. М. Никольского [4], 3.3.5. получаем

$$\|g_{\lambda\infty}\|_{\infty(R)}\leqslant 2\lambda^{\frac{1}{p}}\|g_{\lambda\infty}\|_{p(R)}.$$

Это значит, что для таких y, $\frac{g_{\lambda\infty}(x, y)}{1+|x|}\in L_2(R)$, и пользуясь вышесказанным получаем: $K_{2\lambda\infty}g_{\lambda\infty}=g_{\lambda\infty}$. Тем же способом показываем, что $K_{\infty 2\mu}g_{\infty\mu}=g_{\infty\mu}$. Также $K_{2\lambda 2\mu}\ g_{\infty\mu}=K_{2\lambda\infty}g_{\infty\mu}$, и аналогично $K_{2\lambda 2\mu}g_{\lambda\infty}=K_{\infty 2\mu}g_{\lambda\infty}$. Поэтому

$$\|f-\mathscr{H}_{\lambda\mu}f\|_p\leqslant\|G-K_{2\lambda\infty}G-K_{\infty 2\mu}G+K_{2\lambda 2\mu}G\|_p\leqslant$$
$$\leqslant(1+3\|\Phi\|_1)\|f-(g_{\lambda\infty}+g_{\infty\mu})\|_p.$$

Если учесть, что функции $g_{\lambda\infty}$, $g_{\infty\mu}$ произвольные, то приходим к утверждению леммы.

Замечание I. Можем показать, что лемма I справедлива и для $p=\infty$, $\lambda=0, 1, 2, \dots$, $\mu=0$ и $\lambda=0$, $\mu=1, 2, \dots$.

Пусть $f(x, y) \in L_\infty(R_2)$ и функции

$$\overline{G}_\lambda^s = f - \overline{G}_{\lambda 0}^s = f - \overline{g}_{\lambda\infty}^s(x, y) - \overline{g}_{\infty 0}^s(x), \quad \lambda = 0, 1, \ldots, s = 1, 2, \ldots,$$

$$\overline{\overline{G}}_\mu^s = f - \overline{\overline{G}}_{0\mu}^s = f - \overline{\overline{g}}_{0\infty}^s(y) - \overline{\overline{g}}_{\infty\mu}^s(x, y) \quad \mu = 1, 2, \ldots, s = 1, 2, \ldots,$$

причём все функции $\overline{g}_{\lambda\infty}^s$, $\overline{g}_{\infty 0}^s$, $\overline{\overline{g}}_{0\infty}^s$, $\overline{\overline{g}}_{\infty\mu}^s$ принадлежат к $L_\infty(R_2)$, такие что

$$\| \overline{G}_\lambda^s \|_\infty = \| f - \overline{G}_{\lambda 0}^s \|_\infty \leqslant Y_{\lambda 0}(f)_\infty + \overline{\varepsilon}_\lambda(s), \quad (\overline{\varepsilon}_\lambda(s) \to 0, \ s \to \infty),$$

$$\| \overline{\overline{G}}_\mu^s \|_\infty = \| f - \overline{\overline{C}}_{0\mu}^s \|_\infty \leqslant Y_{0\mu}(f)_\infty + \overline{\overline{\varepsilon}}_\mu(s), \quad (\overline{\overline{\varepsilon}}_\mu(s) \to 0, \ s \to \infty).$$

Обозначим

$$A_0 = \{(x, y) : |f(x, y)| \geqslant \|f\|_\infty\}, \quad A_\lambda^s = \{(x, y) : |\overline{G}_\lambda^s| > \|\overline{G}_\lambda^s\|_\infty\}, \quad \lambda = 0, 1, \ldots, \quad s = 1, 2, \ldots;$$

$$B_\mu^s = \{(x, y) : |\overline{\overline{G}}_\mu^s| > \|\overline{\overline{G}}_\mu^s\|_\infty\}, \quad \mu = 1, 2, \ldots, s = 1, 2, \ldots; \quad A = A_0 \cup \left(\bigcup_{\lambda=0}^{\infty}\left(\bigcup_{s=1}^{\infty} A_\lambda^s\right)\right),$$

$$B = \bigcup_{\mu=1}^{\infty}\left(\bigcup_{s=1}^{\infty} B_\mu^s\right), \quad D(f) = R_2 - (A \cup B).$$

Тогда мера m множества $A \cup B$ равняется нулю. Пусть $(x_0, y_0) \in D(f)$ фиксированная точка. Положим $K_{0\infty} f = f(x_0, y)$, $K_{\infty 0} f = f(x, y_0)$, $K_{00} = f(x_0, y_0)$,

$$K_{\lambda 0} f = \frac{\lambda}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t, y_0)\, \Phi\left(\frac{\lambda}{2}(x - t)\right) dt, \quad (\lambda > 0),$$

$$K_{0\mu} f = \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0 u)\, \Phi\left(\frac{\mu}{2}(y - u)\right) du, \qquad (\mu > 0).$$

Для $\lambda = 0, 1, 2, \ldots$ и $\mu = 0$ имеем $K_{2\lambda\infty} \overline{G}_\lambda^s = K_{2\lambda\infty} f - \overline{g}_{\lambda\infty}^s(x, y) - K_{2\lambda\infty} \overline{g}_{\infty 0}^s(x)$, $K_{\infty 0} \overline{G}_\lambda^s = f(x, y_0) - \overline{g}_{\lambda\infty}^s(x, y_0) - \overline{g}_{\infty 0}^s(x)$, $K_{2\lambda 0} \overline{G}_\lambda^s = K_{2\lambda 0} f - \overline{g}_{\lambda\infty}^s(x, y_0) - K_{2\lambda\infty} \overline{g}_{\infty 0}^s$, и $f - \mathscr{H}_{\lambda 0} f = \overline{G}^s - K_{2\lambda\infty} \overline{G}_\lambda^s - K_{\infty 0} \overline{G}_\lambda{}^s + K_{2\lambda 0} \overline{G}_\lambda{}^s$.

Отсюда получаем

$$\| f - \mathscr{H}_{\lambda 0} f \|_{\infty(R_2)} \leqslant (2 + 2\|\Phi\|_1) \| \overline{G}_\lambda{}^s \|_\infty \leqslant (2 + 2\|\Phi\|_1)(Y_{\lambda 0}(f)_\infty + \varepsilon_\lambda \overline{(s)})$$

Аналогично показываем, что

$$\| f - \mathscr{H}_{0\mu} f \|_{\infty(R_2)} \leq (2 + 2\|\Phi\|_1)(Y_{0\mu}(f)_\infty + \overline{\overline{\varepsilon}}_\mu(s)), \quad \mu = 1, 2, \ldots, \quad s = 1, 2, \ldots.$$

Замечание 2. Из леммы I вытекает

$$\| f - K_{2\lambda\infty} f \|_p \leqslant c\, Y_\lambda(f)_p, \quad (\lambda \geqslant 0)$$

$$\| f - K_{\infty 2\mu} \|_p \leqslant c\, Y_\mu(f)_p, \quad (\mu \geqslant 0), \quad 1 \leqslant p < \infty.$$

Эти неравенства справедливы и для $p=\infty$, λ, $\mu=0, 1, 2, \ldots$. Чтобы это показать надо брать функции $G=f-g_{\lambda\infty}(x, y)$ и аналогично $G=f-g_{\infty\mu}(x, y)$ и рассуждать как в замечании I.

II

Теорема I. *Если функция* $f(x_1, \ldots, x_n)\in L_p(R_n)$, $1\leq p\leq\infty.$, *и имеет (смешанную) производную*

$$f^{r_{im}\ldots r_{i1}}\frac{\partial^{r_{i1}+\cdots+r_{im}} f}{\partial x_{i_1}^{r_{i1}}\ldots\partial x_{i_m}^{r_{im}}}\in L_p(R_n)$$

то

$$Y_{\nu_{i_1}\ldots\nu_{i_m}}(f)_p\leq\frac{C}{\prod_{j=1}^{m}\nu_{ij}^{r_{ij}}}\,\omega^{\rho_{i_1}\ldots\rho_{i_m}}\left(f^{r_1\ldots r_{im}};\frac{1}{\nu_{i_1}},\ldots,\frac{1}{\nu_{im}}\right)_p$$

причём $\nu_{ij}>0$, $(j=1, \ldots, m\leqslant n)$, r_{ij} *целые неотрицательные числа* ρ_{ij} *натуральные числа, С константа зависящая только от* $k_{ij}=r_{ij}+\rho_{ij}$.

Доказатеьство. Берём функцию одного аргумента $g(t)$ такую, что она целая экспоненциального типа 1 и такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(|t|)\,dt=1. \tag{1}$$

За $g(t)$ можно взять функцию

$$g(t)=\mu\left(\frac{\sin\frac{t}{\lambda}}{t}\right)^{\lambda}$$

причём $\lambda\geqslant\max_j(K_{ij}+2)$ целое чётное число, а константа μ выбрана так, что имеет место (1), (см. [4], 5.2.1). Тогда функция

$$g_{\nu_{i_1}}(x_1, \ldots, x_n)=\int_{-\infty}^{\infty} g(|t_1|)\left\{(-1)^{K_{i1}-1}\Delta^{K_{i1}}_{\frac{t_1}{\nu_{i1}}} f(x_1, \ldots, x_n)+f(x_1, \ldots, x_n)\right\}dt_1$$

есть целая функция экспоненциальног типа ν_{i_1} по переменной x_{i_1}, (см. [4], 5.2.1). Обозначим

$$\varphi_1(x_1, \ldots, x_n)=f(x_1, \ldots, x_n)-g_{\nu_{ij}}(x_1, \ldots, x_n),\quad \varphi_j=\varphi_{j-1}-g_{\nu_{ij}},$$

причём

$$g_{\nu_{ij}}=\int_{-\infty}^{\infty} g(|t_j|)\left\{(-1)^{K_{ij}-1}\Delta^{K_{ij}}_{\frac{t_j}{\nu_{ij}}}\varphi_{j-1}(x_1, \ldots, x_n)+\varphi_{j-1}(x_1, \ldots, x_n)\right\}dt_j \tag{2}$$

$j=2, \ldots, m \leqslant n$. Функция $g_{\nu_{i_j}}$ целая типа ν_{ij} по переменной x_{i_j}, K_{i_j} натуральные числа. Тогда

$$(3) \qquad f-\sum_{j=1}^{m} g_{\nu_{ij}}=\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{m} g(|t_j|)\, \Delta^{K_{i_1}\ldots K_{i_m}}_{\frac{t_1}{\nu_{i1}}\ldots\frac{t_m}{\nu_{im}}} f(x_1, \ldots, x_n)\, dt_j .$$

Если положим $K_{i_j}=r_{i_j}+\rho_{i_j}$ и используем неравенство Минковского и свойства модуля гладкости (см. [4], 4.6 (6), 4.2. (8)), то из (3) получаем

$$Y_{\nu_{i_1}\ldots\nu_{i_m}}(f)_p \leqslant \frac{1}{\prod_{j=1}^{m} \nu_{i_j}^{r_{ij}}}\, \omega_{\rho_{i_1}\ldots\rho_{i_m}}\left(f^{r_{i_1}\ldots r_{i_m}}; \frac{1}{\nu_{i_1}}, \ldots, \frac{1}{\nu_{i_m}}\right)_p \cdot$$

$$\cdot \prod_{j=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} g(|t_j|)\, |t_j|^{r_{ij}} (1+|t_j|)^{\rho_{ij}} dt_j$$

откуда, учитывая, что для $\lambda \geqslant \max(K_{i_j}+2)$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(|t_j|) \cdot |t_j|^{K_{ij}} dt_j < \infty ,$$

получаем утврждение теоремы 1.

Отметим, что обобщения на банахово пространство прямой и обратной теорем конструктивной теории функций даны Терехином [10].

Теорема 2. (о представлении). *Если функция* $f(x_1, \ldots, x_n) \in L_p(R_n)$, $1 \leq p \leq \infty$, *то в смысле* L_p *справедливо представление*

$$f(x_1, \ldots, x_n)=\sum_{(i_1, \ldots, i_s)} \sum_{\nu_{i_1}=1}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_{i_s}=1}^{\infty} g_{\nu^{(i_1, \ldots, i_s)}}$$

причём $g^{(x_1, \ldots, x_n)}_{\nu(i_1, \ldots, i_s)}$ *целые функции типа* $2^{\nu_{ij}+1}$ *по* x_{i_j}, $(1 \leq i_j \leq n,\ 1 \leq j \leq s \leqq n$, (и являются суммой интегралов Фейера, образованных от функции f), *а типа 2 по остальным переменным.*

В этой теореме под L_∞ подразумеваем пространство равномерно непрерывных функций.

Доказательство. Для функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ образуем n-мерный угол

$$(1) \qquad \begin{gathered} \mathcal{H}_{\nu_1\ldots\nu_n} f=K_{2\nu_1\infty\ldots\infty} f+K_{\infty 2\nu_2\infty\ldots\infty} f+\cdots+K_{\infty\ldots\infty 2\nu_n} f-K_{2\nu_1 2\nu_2\infty\ldots\infty} f-\cdots- \\ -K_{\infty\ldots\infty 2\nu_{n-1} 2\nu_n} f+\cdots+(-1)^{n-1} K_{2\nu_1 2\nu_2\ldots 2\nu_n} f \end{gathered}$$

(начиная с функцией K, целой по одному аргументу со знаком $+$, а затем знаки чередуются). Функцию $\xi_{\nu_1\ldots\nu_n} f$ образуем так

$$(2) \qquad \xi_{\nu_1\ldots\nu_n} f=\sum_{l}(-1)^{n+1-s} \mathcal{H}_{2^{l_1}\ldots 2^{l_a}} f$$

причём суммирование идёт по всём $l_i \in \{\nu_i, \nu_{i_1}-1,\ i=1, \dots, n\}$ а s число которое показывает сколько раз появляется $\nu_i - 1$ в агрегате $(l_1, \dots, l_n)$. Значит в сумме для ξ фигурирует 2^n членов $\mathscr{H}$. Выражая $\mathscr{H}$ при помощи K, после выкладки получаем

$$\xi_{\nu_1 \dots \nu_n} f = \sum_l (-1)^{n+s} K_{2l_1 \dots 2l_n} f \tag{3}$$

причём суммирование идёт по всем $l_i \in \{\nu_i + 1,\ \nu_i;\ i=1, \dots, n\}$ а s число которое показивает сколько раз появляется $\nu_i + 1$ в агрегате $(l_1, \dots, l_n)$. Из (3) видно, что функция $\xi_{\nu_1 \dots \nu_n} f$ целая типа 2^{ν_i+1} по переменной x_i, $i=1, \dots, n$.

С таким выбором целых функций $\xi_{\nu_1 \dots \nu_n} f$ показываем, что (в смысле L_p) справедливо равенство

$$f(x_1, \dots, x_n) - \mathscr{H}_{\underbrace{1 \dots 1}_{n}} f = \sum_{\nu_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{\nu_n=1}^{\infty} \xi_{\nu_1 \dots \nu_n} f. \tag{4}$$

Таким образом остаётся представить функцию $\mathscr{H}_{1 \dots 1} f$ в сумму рядов, члены которых целые функции. В сумме для $\mathscr{H}_{1 \dots 1} f$ фигурируют целые функции по одной, двух, ..., n переменных. Проблему разложения функции целой по одной переменной мы сводим (при помощи $(n-1)$-мерного угла соответствующего $n-1$ переменным, по которым функция не целая) на проблему разложения функции, которая является целой по двум переменным. И так далее. Более подробно это рассуждение мы иллюстрируем на сведении проблемы для случая $n=3$ на случай $n=2$ и затем на случай $n=1$, для которых дадим полную выкладку.

Итак, пусть дана функция $f(x, y, z) \in L_p(R_3)$. Тогда

$$f - \mathscr{H}_{111} f - \sum_{\nu_1=1}^{M_1} \sum_{\nu_2=1}^{M_2} \sum_{\nu_3=1}^{M_3} \xi_{\nu_1 \nu_2 \nu_3} f = f - \mathscr{H}_{2M_1 2M_2 2M_3} f + \mathscr{H}_{12M_2 2M_3} f + \tag{5}$$
$$+ \mathscr{H}_{2M_1 12M_3} f - \mathscr{H}_{112M_3} f + \mathscr{H}_{2M_1 2M_2 1} f - \mathscr{H}_{12M_2 1} f - \mathscr{H}_{2M_1 11} f.$$

Из (5) получаем

$$\|f - \mathscr{H}_{111} f - \sum_{\nu_1=1}^{M_1} \sum_{\nu_2=1}^{M_3} \sum_{\nu_3=1}^{M_3} \xi_{\nu_1 \nu_2 \nu_3} f\|_p \leqslant$$
$$\leqslant \|f - \mathscr{H}_{2M_1 2M_2 2M_3} f\| + \|\mathscr{H}_{12M_2 M_3} f - f\| + \|\mathscr{H}_{2M_1 12M_3} f - f\| +$$
$$+ \|f - \mathscr{H}_{112M_3} f\| + \|\mathscr{H}_{2M_1 2M_2 1} f - f\| + \|f - \mathscr{H}_{12M_2 1} f\| + \|f - \mathscr{H}_{2M_1 11} f\|$$

откуда на основании леммы I следует

$$\|f - \mathscr{H}_{111} f - \sum_{\nu_1=1}^{M_1} \sum_{\nu_2=1}^{M_2} \sum_{\nu_3=1}^{M_3} \xi_{\nu_1 \nu_2 \nu_3} f\|_p \leqslant \tag{6}$$
$$\leqslant C_1 \{Y_{2M_1 2M_2 2M_3}(f)_p + Y_{12M_2 2M_3}(f)_p + Y_{2M_1 12M_3}(f)_p +$$
$$+ Y_{112M_3}(f)_p + Y_{2M_1 2M_2 1}(f)_p + Y_{12M_2 1}(f)_p + Y_{2M_1 11}(f)_p.$$

На основании теоремы I каждый из углов Y фигурирующих в (6), стремится к нулю, если $M_1, M_2, M_3 \to \infty$. Поэтому получаем равенство (4) для $n=3$.

Если написать $f=f-\mathscr{H}_{111}f+\mathscr{H}_{111}f$, то нам осталось дать представление для $\mathscr{H}_{111}$ в ряд, члены которого целые функции. Мы это сделаем для одной функции, на пример, для $K_{\infty\infty 2}f$ из равенства $\mathscr{H}_{111}f=K_{2\infty\infty}f+$ $+K_{\infty 2\infty}f+K_{\infty\infty 2}f-K_{22\infty}f-K_{2\infty 2}f-K_{\infty 222}f+K_{222}f$, а для остальных членов рассуждение аналогично. Функция $K_{\infty\infty 2}f$ целая степени 2 по z и мы используем двухмерный угол, соответствующий переменным x и y, а именно

$$\mathscr{H}_{11\infty}(K_{\infty\infty 2}f)=K_{2\infty\infty}(K_{\infty\infty 2}f)+K_{\infty 2\infty}(K_{\infty\infty 2}f)-K_{22\infty}(K_{\infty\infty 2}f),$$

$$\xi_{ij}(K_{\infty\infty 2}f)=(\mathscr{H}_{2i\,2j-1\,\infty}+\mathscr{H}_{2i-1\,2j-1\,\infty}-\mathscr{H}_{2i-1\,2j-1\infty}-\mathscr{H}_{2i\,2j\infty})K_{\infty\infty 2}f=$$
$$=K_{2i+1\,2j+1\,2}f+K_{2i\,2j\,2}f-K_{2i+1\,2j\,2}f-K_{2i\,2j+1\,2}f.$$

Пользуясь этими функциями, получаем

$$K_{\infty\infty 2}f-\mathscr{H}_{11\infty}(K_{\infty\infty 2}f)-\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\xi_{ij\,\infty}(K_{\infty\infty 2}f)= \tag{7}$$
$$=K_{\infty\infty 2}f-\mathscr{H}_{12^N\infty}(K_{\infty\infty 2}f)+K_{\infty\infty 2}f-\mathscr{H}_{2^{M_1}\infty}(K_{\infty\infty 2}f)-$$
$$-[K_{\infty\infty 2}f-\mathscr{H}_{2^{M_2}N\infty}(K_{\infty\infty 2}f)].$$

Теперь мы покажем, что

$$K_{\infty\infty 2}f-\mathscr{H}_{12^N\infty}(K_{\infty\infty 2}f)=K_{\infty\infty 2}(f-\mathscr{H}_{12^N\infty}f), \tag{8}$$

$$K_{\infty\infty 2}f-\mathscr{H}_{2^{M}1\infty}(K_{\infty\infty 2}f)=K_{\infty\infty 2}(f-\mathscr{H}_{2^{M}1\infty}f). \tag{9}$$

$$K_{\infty\infty 2}f-\mathscr{H}_{2^{M_2}N\infty}(K_{\infty\infty 2}f)=K_{\infty\infty 2}(f-\mathscr{H}_{2^{M_2}N\infty}f). \tag{10}$$

Имеем

$$K_{\infty\infty 2}f-\mathscr{H}_{12^N\infty}(K_{\infty\infty 2}f)=K_{\infty\infty 2}f-K_{2\infty\infty}(K_{\infty\infty 2}f)-K_{\infty 2^{N+1}\infty}(K_{\infty\infty 2}f)+$$
$$+K_{22^{N+1}\infty}(K_{\infty\infty 2}f)=K_{\infty\infty 2}f-K_{\infty\infty 2}(K_{2\infty\infty}f)-K_{\infty\infty 2}(K_{\infty 2^{N+1}\infty}f)+$$
$$+K_{\infty\infty 2}(K_{22^{N+1}\infty}f)=K_{\infty\infty 2}\{f-K_{2\infty\infty}f-K_{22^{N+1}\infty}f+K_{22^{N+1}\infty}f\},$$

и этим равенство (8) доказано. Тем же способом доказываем и равенства (9) и (10).

Теперь, на основании равенства (8 – 10), применением обобщённого неравенства Минковского, из (7) получаем

$$\|K_{\infty\infty 2}f-\mathscr{H}_{11\infty}(K_{\infty\infty 2})-\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N}\xi_{ij\infty}(K_{\infty\infty 2}f)\|\leqslant \tag{11}$$
$$\leqslant C_2\{\|f-\mathscr{H}_{12^N\infty}f\|+\|f-\mathscr{H}_{2^{M_1}\infty}f\|+\|f-\mathscr{H}_{2^{M_2}N\infty}f\|\}.$$

Применяя лемму I и теорему I, из (11) получаем справедливость в смысле $L_p(R_3)$ равенства

$$K_{\infty\infty 2}f-\mathscr{H}_{11\infty}(K_{\infty\infty 2}f)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\xi_{ij\infty}(K_{\infty\infty 2}f). \tag{12}$$

Чтобы представить функцию $K_{\infty\infty 2}f$ в ряд нам осталось представить в ряд функцию $\mathcal{H}_{11\infty}(K_{\infty\infty 2}f)=K_{2\infty 2}f+K_{\infty 22}f-K_{222}f$. Из этого равенства представим в ряд, например, функцию $K_{2\infty 2}f$. Положим

$$T_{212}f=K_{222}f,\ T_{2\nu 2}f=K_{22^{\nu}2}f-K_{22^{\nu-1}2}f,\ \nu=2, 3, \ldots .$$

Имеем

$$K_{2\infty 2}f-\sum_{\nu=1}^{N}T_{2\nu 2}f=K_{2\infty 2}f-K_{22^N 2}f=K_{2\infty\infty}[K_{\infty\infty 2}(f-K_{\infty 2^N\infty}f)]. \tag{13}$$

Пользуясь обобщённым неравенством Минковского, леммой I и теоремой I, получаем справедливость в смысле $L_p(R_3)$ равенства

$$K_{2\infty 2}f=\sum_{\nu=1}^{\infty}T_{2\nu 2}f, \tag{14}$$

причём $T_{2\nu 2}f$ целые функции типа 2 по x, 2^{ν} по y, 2 по z.

Таким образом в полности дано представление для функции $f(x, y, z)\in L_p(R_3)$. Этим закончиваем доказательство теоремы.

Отметим, что теорема о представлении для функции класса $S^r_{p\theta}B$ другим методом доказана Амановым [2].

Теорема 3. *Если функция* $f(x_1, \ldots, x_n)\in L_p(R_n)$, $1\le p\le\infty$, *то*

$$\omega_{K_{i_1}\ldots K_{i_m}}\left(f;\frac{1}{l_{i_1}}, \ldots, \frac{1}{l_{i_m}}\right)_p\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C}{\prod_{j=1}^{m}l_{ij}^{K_{ij}}}\sum_{\nu_{i_1}=0}^{l_{i_1}}\cdots\sum_{\nu_{i_m}=0}^{l_{i_m}}\prod_{j=1}^{m}(\nu_{ij}+1)^{K_{ij}-1}Y_{\nu_{i_1}\ldots\nu_{i_m}}(f)_p,$$

причём l_{ij}, K_{ij}, $(j=1, \ldots, m\le n)$ *натуральные числа*, C *константа независящая от* f *и* l_{ij}.

Доказательство для простоты дадим для $n=2$. Для одномерного случая $Y_\lambda=E_{\lambda\infty}$ и эта теорема известна, [8], 6.3.61.

Остаётся доказать теорему для двухмерного случая $m=2=n$. Принимая во внимание, что для $1\leqslant p<\infty$, $\mathcal{H}_{00}f=0$ и для $p=\infty$, $\mathcal{H}_{00}f=\varphi(x)+\psi(y)$ можем пользоваться идеей доказательства теоремы 2 в работе [5] принадлежащей Потапову. При этом нам нужно сослаться на факты, относящиеся к целым функциям.

Исходим из неравенства

$$\omega_{K_1K_2}\left(f;\frac{1}{l_1}, \frac{1}{l_2}\right)_p\leqslant\omega_{K_1K_2}\left(f-\mathcal{H}_{2^r2^s}f;\frac{1}{l_1}, \frac{1}{l_2}\right)_p+\omega_{K_1K_2}\left(\mathcal{H}_{2^r2^s}f;\frac{1}{l_1}, \frac{1}{l_2}\right)_p.$$

На основании свойства модуля гладкости и леммы I имеем

$$\omega_{K_1K_2}\left(f-\mathcal{H}_{2^r2^s}f;\frac{1}{l_1}, \frac{1}{l_2}\right)_p\leqslant C\,Y_{2^r2^s}(f)_p.$$

Чтоби оценить модуль гладкости от $\mathscr{H}_{2^r 2^s}f$ используем равенство (для краткости обозначим $\mathscr{H}_{ij}f=\mathscr{H}_{ij}$).

$$\mathscr{H}_{2^r 2^s}-\mathscr{H}_{00}=\sum_{i=0}^{r}\mathscr{H}_{2^i 2^s}-\mathscr{H}_{[2^{i-1}]2^s}+\sum_{j=0}^{s}\mathscr{H}_{2^r 2^j}-\mathscr{H}_{2^r[2^{j-1}]}-$$
$$-\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=0}^{s}\mathscr{H}_{2^i 2^j}-\mathscr{H}_{2^i[2^{j-1}]}-\mathscr{H}_{[2^{i-1}]2^j}+\mathscr{H}_{[2^{i-1}][2^{j-1}]}, \tag{1}$$

где считаем, что $[2^{K-1}]=2^{K-1}$ для $k\geqslant 1$ и $[2^{K-1}]=0$ для $k=0$. Введём обозначения

$$\xi_{ij}=\mathscr{H}_{2^i[2^{j-1}]}+\mathscr{H}_{[2^{i-1}]2^j}-\mathscr{H}_{[2^{i-1}][2^{j-1}]}-\mathscr{H}_{2^i 2^j},$$

$$\eta_i=\mathscr{H}_{2^i 2^s}-\mathscr{H}_{[2^{i-1}]2^s},\quad \zeta_j=\mathscr{H}_{2^r 2^j}-\mathscr{H}_{2^r[2^{j-1}]}.$$

Выражая $\mathscr{H}$ с помощью K, мы увидим, что: ξ_{ij} есть целая функция типа 2^{i+1} по x и типа 2^{j+1} по y; η_i – целая функция типа 2^{i+1} по x: ζ_j – целая функция типа 2^{j+1} по y. Учитывая, что на основании леммы 1 и замечания 1 справедливы неравенства

$$\|\xi_{ij}\|_p\leqslant C_1 Y_{[2^{i-1}][2^{j-1}]}(f)_p;\ \|\eta_i\|_p\leqslant C_1 Y_{[2^{i-1}]2^s}(f)_p;\ \|\zeta_j\|_p\leqslant C_1 Y_{2^r[2^{j-1}]}(f)_p,$$

то, пользуясь неравенством типа Бернштейна ((4], 3.2.2 (9)) и свойством модуля гладкости, получаем

$$\omega_{K_1K_2}\left(\xi_{ij};\frac{1}{l_1},\frac{1}{l_2}\right)_p\leqslant C_2\frac{2^{iK_1+jK_2}}{l_1^{K_1}l_2^{K_2}}Y_{[2^{i-1}][2^{j-1}]}(f)_p,$$

$$\omega_{K_1K_2}\left(\eta_i;\frac{1}{l_1},\frac{1}{l_2}\right)_p\leqslant\frac{C_2 2^{iK_1}}{l_1^{K_1}}Y_{[2^{i-1}]2^s}(f)_p,$$

$$\omega_{K_1K_1}\left(\zeta_j;\frac{1}{l_1},\frac{1}{l_2}\right)_p\leqslant\frac{C_2 2^{jK_2}}{l_2^{K_2}}Y_{2^r[2^{j-1}]}(f)_p.$$

Дальнейшей выкладкой, которая полностью совпадает с выкладкой данной в доказательстве теоремы 2 в [5] приходим к справедливости теоремы 3.

Теорема 3'. *Пусть* $f(x_1,\dots,x_n)\in L_n)$, $1\leq p\leq\infty$, K_{ij}, l_{ij}, $(1\leq j\leq\leq m\leq n)$, *натуралные числа. Тогда*

$$\omega_{K_{i_1}\dots K_{i_m}}\left(f:\frac{1}{l_{i_1}},\dots,\frac{1}{l_{i_m}}\right)_p\leqslant$$
$$\leqslant\frac{C}{\prod_{j=1}^{m}l_{ij}^{K_{ij}}}\left\{\|f\|_p+\sum_{(i_1,\dots,i_s)}\sum_{\nu_{i_1}=1}^{l_{i_1}}\cdots\sum_{\nu_{i_s}=1}^{l_{i_s}}\prod_{j=1}^{s}\nu_{ij}^{K_{ij}-1}Y_{\nu_{i_1}\dots\nu_{i_s}}(f)_p\right\},$$

причём первая сумма распронстраняется по всем $(i_1,\dots,i_s)\subset(i_1,\dots,i_m)$, $1\leq s\leq m$, *а константа* C *не зависит от* f *и* l_{ij}.

Для доказательства (случай $n=2$) исходим из разложения $f=f-\mathcal{H}_{11}+ + K_{2\infty}+K_{\infty 2}-K_{22}$ и $f-\mathcal{H}_{11}=f-\mathcal{H}_{2^r 2^s}+\mathcal{H}_{2^r 2^s}-\mathcal{H}_{11}$ Для оценки модуля от $\mathcal{H}_{2^r 2^s}-\mathcal{H}_{11}$ используемся равенством которое получаем из равенства (I) теоремы 3 если в нём всюду напишем I вместо 0. Чтобы, например, оценить модуль гладкости от $K_{2\infty}$ используемся разложениями

$$K_{2\infty}=K_{2\infty}-K_{22}+K_{22}, \quad K_{2\infty}-K_{22}=K_{2\infty}-K_{22^s}+K_{22^s}-K_{22},$$

$$K_{22^s}-K_{22}=\sum_{j=2}^{s} K_{22^j}-K_{22^{j-1}}.$$

Отметим, что для случая $1\le p<\infty$ теорема 3′ совпадает с теоремой 3. Тоже теорема 3′ является следствием теоремы 3.

Теорема 4. *Если для функции $f(x_1,\ldots,x_n)\in L_p(R_n)$, $1\le p\le q\le\infty$, натуральных чисел K_{i_j}, m, i_j, $(1\le i_j\le n,\ 1\le j\le m\le n)$ и неотрицательных чисел r_{i_j} справедливы неравенства*

$$J_{i_1\cdots i_m}=\int_0^1\cdots\int_0^1\prod_{j=1}^{m} t_{ij}^{-\left(r_{ij}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-1}\,\omega_{K_{i_1}\ldots K_{i_m}}(f;t_{i_1},\ldots,t_{i_m})_p\,dt_{ij}<\infty,$$

то f имеет обобщённую смешанную производную $f^{r_1\cdots r_n}$ принадлежащую к $L_p(R_n)$ и $L_q(R_n)$ и

$$\|f^{r_1\cdots r_n}\|_q\le C\{\|f\|_p+\sum_{(i_1,\ldots,i_m)} J_{i_1\cdots i_m}\}$$

где константа C не зависит от f.

Доказательство. В доказательстве теоремы используется представление данное теоремой 2. Поэтому, для простоты дадим доказательство для случая $n=2$. Пользуясь теоремой I и условия теоремы получаем, что

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} 2^{i\left(r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+j\left(r_2+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} Y_{2^i 2^j}(f)_p<\infty \tag{1}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} 2^{i\left(r_1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} Y_{2^i}(f)_p<\infty,\quad \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\left(r_2+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} Y_{2^j}(f)_p<\infty. \tag{2}$$

Теперь исходя из

$$f-\mathcal{H}_{11}f=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\xi_{ij}, \tag{3}$$

а пользуясь; фактом $\|\xi\|\le CY$, неравенствами [4], 3.3.5., [4], 3.2.2 (9), леммами Никольского, [4], 4.4.7, 1.3.9 и неравенством (1), получаем, что в смысле L_p и L_q справедливо равенсто

$$\frac{\partial^{r_1+r_2}(f-\mathcal{H}_{11}f)}{\partial x^{r_1}\partial y^{r_2}}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial^{r_1+r_2}\xi_{ij}}{\partial x^{r_1}\partial y^{r_2}}.$$

Тем же рассуждением получаем соответствующие равенства для производных функций $K_{2\infty}f$ и $K_{\infty 2}f$, (при этом используемся неравенствами (2)), и этим заканчиваем доказательство теоремы.

Теорема 5. *Если* $f(x, y)\in L_p(R_2)$, $1\leq p<q<\infty$ *то*

$$\|f\|_q^q \leqq C\Big\{\|f\|_p^q+\int_0^\infty t_1^{-\frac{q}{p}}\|\Delta_{t_1}^1 f\|_p^q\,dt_1+$$

$$+\int_0^\infty t_2^{-\frac{q}{p}}\|\Delta_{t_2}^1 f\|_p^q\,dt_2+\int_0^\infty\int_0^\infty (t_1 t_2)^{-\frac{q}{p}}\|\Delta_{t_1 t_2}^{11} f\|_p^q\,dt_1\,dt_2\Big\}$$

причём константа C не зависит от f,

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству леммы I из [6] и обосновано на неравенстве

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^q\,dx\leq C\Big\{\Big(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\,dx\Big)^{\frac{q}{p}}+\int_0^\infty t^{-\frac{q}{p}}\|\Delta_t^1 f(x)\|_p^q\,dt\Big\}$$

которое вытекает из работы Ульянова [9]. Отметим, что это неравенство позволяет обойтись без неравенства Гельдера использованного в [6].

Теорема 6. *Если для функции* $f(x, y)\in L_p(R_2)$, $1\leq p\leq\infty$, *выполнено*

$$\sum_{i=1}^\infty\sum_{j=1}^\infty i^{-1}j^{\frac{1}{p}-1}\,Y_{ij}(f)_p<\infty, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^\infty j^{\frac{1}{p}-1}\,Y_j(f)_p<\infty, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^\infty i^{-1}\,Y_i(f)_p<\infty, \tag{3}$$

то $f(x, y)$ имеет след $\psi=\psi(x)$ принагзежащий $k\,L_p(R)$.

Доказательство. Покажем, что каждая из функций $f-\mathcal{H}_{11}f$, $K_{2\infty}f$, $K_{\infty 2}f$, $K_{22}f$ имеет след на R. Из условия теоремы вытекает, что $Y_{ij}\to 0$, $Y_{1j}\to 0$, $Y_{i1}\to 0$ когда $i, j\to\infty$, поэтому в смысле L_p справедливо равенство (3) теоремы 4. Пользуясь неравенством Никольского [4], 3.4.2 (I) и неравенствами

$$\sum_{K=0}^\infty A\,2^k\leq C\sum_{\nu=1}^\infty \nu^{-1}A_\nu,\qquad \sum_{K=0}^\infty 2^{\frac{k}{p}}A\,2^k\leq C\sum_{\nu=1}^\infty \nu^{\frac{1}{p}-1}A_\nu,$$

из равенства (3) теоремы 4 получаем

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\|\xi_{ij}\|_{L_p(R(Y))}\leq C_2\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} i^{-1}j^{\frac{1}{p}-1}\,Y_{ij}(f)_p<\infty.$$

Это значит, (см [4], 1.3.9), что равенство (3) теоремы 4 справедливо в смысле $L_p(R(Y))$ для любого Y.

Мы покажем, что функция $\psi_1(x)=f(x, 0)-\mathscr{H}_{11}f(x, 0)=\varphi(x, 0)$ есть след на R функции $f-\mathscr{H}_{11}f$. Для этого, мы докажем, что

$$(4)\qquad \|\varphi(x, y+h)-\varphi(x, y)\|_{L_p(R(y))}\to 0, \quad (h\to 0).$$

Имеем

$$\|\varphi(x, y+h)-\varphi(x, y)\|_{L_p(R(y))}\leq\left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N}+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=N+1}^{\infty}\right)2^{\frac{j}{p}}\|\xi_{ij}(x, y+$$

$$+h)-\xi_{ij}(x, y))\|_{L_pR_2}.$$

Если используемся неравенством [4], 4.4.4 (3) получаем

$$\Sigma_1=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{N}\leq C_3|h|\,2^{N\left(1+\frac{1}{p}\right)}\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} i^{-1}j^{\frac{1}{p}-1}\,Y_{ij},$$

откуда, учитивая, что N конечное число, следует $\Sigma_1\to 0$, $h\to 0$. Тоже используя неравенство (1) получим $\Sigma_2=0(1)$. Этим соотношение (4) доказано.

Аналогично, для доказательства, что функция $K_{2\infty}f(x, 0)$ есть след функции $K_{2\infty}f(x, y)$ пользуемся представлением функции $K_{2\infty}f(x, y)$, неравенством [4], 3.4.2 (1), и неравенством (2). При помощи неравенства (3) теоремы, доказывается, что функция $K_{\infty 2}f(x, 0)$ есть след функции $K_{\infty 2}f(x, y)$.

Теорема доказана.

Замечание 3. При помощи разультатов этой работы можно получить конструктивные характеристики классов функций с доминорующим смешаниным модулем гладкости, в частности для классов $s_p^r H$ и $s_{p\theta}^r b$ рассмотренных С. М. Никольским [3] и Т. И. Амановым [2]. Кроме того, для этих классов функций можно получить теоремы о представлении, теоремы вложения и теорэмы о следах.

В заключении этой работы, я выражаю глубокую благодарность Михаилу Константиновичу Потапову, профессору Московского государственного университета за постоянное внимание и советы, данные при написании работы.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Ахиезер Н. И., *Лекции по теории апроксимации*, М., 1965, 1—407.

[2]. Аманов Т. И., *Теоремы представления и вложения для функциональных пространств* $S^{(r)}_{p\theta}B(R_n)$ *и* $S^{(r)}_{p\theta}*B(0\le x_j\le 2\bar{u},\ j=1,\dots,n)$, Труды МНАНСССР, 77 (1965), 5—34.

[3]. Никольский С. М., *Функции с доминирующей смешанной производной, удовлетворяющей кратному условию Гёльдера*, Сибирский математический Ж. IV, 6, (1963), 1342—1364.

[4]. Никольский С. М., *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.*, М. 1969, 1—480.

[5]. Потапов М. К., *О приближении „углом"*, Proc Conference on Constructive Theory of Functions, Издатьелство АН Венгрии, 1969, 371—399.

[6]. Потапов М. К., *Вложение классов функций с доминирующим смешанным модулем гладкости*, Труды МИАН СССР, 1974, Т. 131, 199—210.

[7]. Потапов М. К. *Изучение некоторых классов функций при помощи приближения „углом"* Труды МИАН СССР, 1972, Т. 117, 256—300.

[8]. Тиман А. Ф. *Теория приближения функций действительного переменного*, М., 1960, 1—624.

[9]. Ульянов П. Л., *Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках*. Мат. сб. Т. 81, (123), № I, 1970, 104—131.

[10]. Терехин А. П., *Многопараметрическая полугруппа операторов, смешанные модули и приближение*, ИАН СССР, сер. мат. Т. 39. № 4, 1975, 937—960.

М. Томић
ул. Браће Рибара 49
71000 Сарајево