PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 23 (37) 1978, pp. 9—12

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СТАНДАРТНОГО ВИДА С ИМПУЛЬСАМИ

Д. Д. Байнов и С. Д. Милушева

(Получено 6 января 1976).

Метод усреднения для обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсами был обоснован А. М. Самойленко [1], [2]. В настоящей работе обоснован метод усреднения для систем — дифференциальных уравнений с импульсами вида [3]

$$\frac{dx}{dt}=\varepsilon X\Big(t,\, x,\, \int_0^t \varphi\Big(t, s, x(s),\, \int_0^s f\big(t,\, s,\, \sigma,\, x(s),\, x(\sigma)\big)\, d\sigma\Big)\, ds\Big)\,, \tag{1}$$

где $x, X\in R_n$, $\varphi\in R_m$, $f\in R_p$, а $\varepsilon>0$ — малый параметр.

Пусть в пространстве (t, x) заданы гиперповерхности

$$t=t_i(x),\ \ t_i(x)<t_{i+1}(x), \qquad i=1, 2, \ldots . \tag{2}$$

Предположим, что вне гиперповерхностей (2) движение происходит согласно уравнениям (1), а на каждой гиперповерхности $t=t_i(x)$ в точке x траектория системы (1) претерпевает мгновенный разрыв по закону

$$\Delta x\,|_{t=t_i(x)}=x_+-x_-=\varepsilon I_i(x), \tag{3}$$

где x_- и x_+ — точки, в которых траектория соответственно встречает и покидает гиперповерхность $t=t_i(x)$.

Системе (1) ставим в соответствии усредненную систему

$$\frac{d\bar{x}}{dt}=\varepsilon\,[X_0(\bar{x})+I_0(\bar{x})], \tag{4}$$

где

$$\begin{gathered} X_0(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_t^{t+T} X\Big(\theta,\, x, \int_0^\theta \varphi\Big(\theta,\, s,\, x, \int_0^s f(\theta,\, s,\, \sigma,\, x,\, x)\, d\sigma\Big)\, ds\Big)\, d\theta, \\ I_0(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\sum_{t<t_i<t+T} I_i(x). \end{gathered} \tag{5}$$

$$\frac{\partial t_i(\bar{x}(\varepsilon t, x_0))}{\partial x} I_i(\bar{x}(\varepsilon t, x_0)) \leq \beta < 0, \quad \beta = \text{const}, \quad t_i' < t < t_i'',$$

(7)

$$t_i' = \inf_{x \in D} t_i(x), \quad t_i'' = \sup_{x \in D} t_i(x), \quad i = \overline{2, d}, \quad t_d < L\varepsilon^{-1} < t_{d+1},$$

или условию $\dfrac{\partial t_i(x)}{\partial x} \equiv 0.$

Тогда для любого $\eta > 0$ *и любого* $L > 0$ *можно указать такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *система уравнений (1) имеет решение* $x_t(x_0)$, $x_0(x_0) = x_0$, *определенное для всех* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *и такое, что*

(8) $$\| x_t(x_0) - \bar{x}(\varepsilon t, x_0) \| < \eta \quad \text{при} \quad t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$$

Предположим, что усредненная система (4) имеет изолированное положение равновесия $\bar{x} = x^0$:

$$X_0(x^0) + I_0(x^0) = 0.$$

Следующие две теоремы выясняют вопрос качественного соответсвия между точными решениями системы (1), (3) и ее приближениями $\bar{x}$ — решениями системы (4).

Т е о р е м и 2. *Пусть выполнены условия 1—5 теоремы 1. Тогда если положение равновесия* $\bar{x} = x^0$ *усредненной системы асимптотически устойчиво и*

(9) $$\frac{\partial t_i(x)}{\partial x} I_i(x) \leq \beta < 0, \qquad \left(\text{либо} \ \frac{\partial t_i(x)}{\partial x} \equiv 0\right)$$

для всех $i = 1, 2, \ldots$ *и всех* x *из некоторой* ρ_0 — *окрестности точки* x^0, *то существует такая* ρ — *окрестность* D_ρ $(\rho \leq \rho_0)$ *точки* x^0 *и такое* $\varepsilon^0 > 0$, *что при всех* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *и всех* $x \in D_\rho$ *решения* $x_t(x)$, $x_0(x) = x$ *системы (1) равномерно ограничены при* $t \in (0, \infty)$.

Т е о р е м а 3. *Пусть система (1) удовлетворяет условиям 1—3 теоремы 1 как при* $t > 0$, *так и при* $t < 0$. *Положим*

$$I_0(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{t < t_i < t+T} I_i(x) \qquad \text{при} \ t \geq 0,$$

$$I^0(x) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{t-T < t_i < t} I_t(x) \qquad \text{при} \ t \leq 0.$$

Предположим, что усредненная при $t \geq 0$ *система*

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \varepsilon [X_0(\bar{x}) + \bar{I}_0(\bar{x})]$$

Имеет место следующая теорема о близости решений системы (1) и (4) с начальным условием $x_0(x_0) = \bar{x}(0, x_0) = x_0$:

Теорема I. *Пусть:*

1. Функция $X(t, x, u)$ *определена и непрерывна в области* $\{t \geq 0, x \in D \subset R_n, u \in R_m\}$.

Функция $\varphi(t, s, x, v)$ *определена и непрерывна в области* $\{t \geq 0, s \geqslant 0, x \in D, v \in R_p\}$.

Функция $f(t, s, \sigma x, y)$ *определена и непрерывна в области* $\{t \geq 0, s \geqslant 0, \sigma \geq 0, x, y \in D\}$.

2. Существуют положительные постоянные M, C, K, M^*, N *и функции* $\mu(t, s)$ *и* $\nu(\theta, s, \sigma)$ *такие что*

$$\left\| \frac{\partial t_i(x)}{\partial x} \right\| + \| X(t, x, u) \| + \| I_i(x) \| \leq M, \quad \left\| \frac{\partial^2 t_i(x)}{\partial x^2} \right\| \leq C,$$

$$\left\| \frac{\partial t_i(x)}{\partial x} - \frac{\partial t_i(x')}{\partial x} \right\| + \| I_i(x) - I_i(x') \| \leq K \| x - x' \|,$$

$$\| X(t, x, u) - X(t, x', u') \| \leq K [\| x - x' \| + \| u - u' \|],$$

$$\| \varphi(t, s, x, v) - \varphi(t, s, x', v') \| \leq \mu(t, s) [\| x - x' \| + \| v - v' \|], \tag{6}$$

$$\| f(t, s. \sigma, x, y) - f(t, s, \sigma, x', y') \| \leq \nu(t, s, \sigma) [\| x - x' \| + \| y - y' \|],$$

$$t \int_0^t \mu(t, s) \left[1 + 2 \int_0^s \nu(t, s, \sigma) \, d\sigma \right] ds \leqslant N,$$

$$\int_0^t \mu(t, s) \left[1 + 2 \int_0^s \nu(t, s, \sigma) \, d\sigma \right] ds \leq N^*,$$

для всех $t \geq 0$, $s \geq 0$, $\sigma \geq 0$, $x, x', y, y' \in D$, $u, u' \in R_m$, $v, v' \in R_p$, $\quad i = 1, 2, \ldots$

3. Равномерно относительно $t \geq 0$ *и* $x \in D$ *существуют конечные пределы (5) и*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{t < t_i < t + T} 1 = d_0, \quad d_0 = \text{const}.$$

4. Система (1) имеет единственное решение $x_t(x^*)$ *и при любом* $t^* > 0$ *и любом фиксированном* x^* *из области* D, $x_{t^*}(x^*) = x^*$.

5. Усредненная система (4) имеет решение $\bar{x} = \bar{x}(\varepsilon t, x_0)$, $\bar{x}(0, x_0) = x_0$, *которое при* $\varepsilon = 1$ *принадлежит области* D *для всех* $t \in [0, L]$, $0 < L = \text{const}$, *вместе с некоторой* ρ *— окрестностью* $(0 < \rho = \text{const})$ *и удовлетворяет неравенствам*

$$\frac{\partial t_1(x_0)}{\partial x} I_1(x_0) \leq \beta < 0,$$

имеет асимптотически устойчивое положение равновесия $x = x^0$, *удовлетворяющее неравенству (9) для всех* x *из некоторой* ρ_0 — *окрестностью. Пусть в* ρ — *окрестности* D_ρ *решения* x^0, *указанной в теореме 2, усредненная при* $t \leq 0$ *система*

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \varepsilon [X_0(\bar{x}_1) + I^0(\bar{x}_1)] \tag{10}$$

имеет положение равновесия $\bar{x}_1 = x_1{}^0$, *для которого*

$$\frac{\partial t_i(x)}{\partial x} I_i(x) \leq \beta < 0 \qquad \left(\text{либо } \frac{\partial t_i(x)}{\partial x} \equiv 0\right)$$

для всех $i = -1, 2, \dots$ *и всех* x *из некоторой* $\rho_0{}'$ — *окрестностью положения равновесия* $x_1{}^0$.

Тогда:

1. Если положение равновесия $x_1{}^0$ *системы (10) асимтотически устойчиво при* $t < 0$, *то найдется такое* $\varepsilon^0 > 0$ *и такая область* D_{ρ_1}, *содержащая* x^0 *и* $x_1{}^0$, *что при* $\varepsilon < \varepsilon^0$ *все решения* $x_t(x)$ *системы (1), (3), для которых* $x \in D_{\rho_1}$, *равномерно ограничены при* $t \in (-\infty, +\infty)$.

2. Если положение равновесия $x_1{}^0$ *системы (10) асимптотически устойчиво, то найдется такое* $\varepsilon_0 > 0$ *и такое* x^*, *что решение* $x_t(x^*)$ *системы (1), (3) ограничено при* $t \in (-\infty, +\infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. Самойленко А. М., *Обоснование принципа усреднения для дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. В сб. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений*, Изд-во „Наукова думка", Киев, 1963.

[2] Самойленко А. М., *К вопросу обоснования метода усреднения для исследования колебаний с системах, подверженных импульсному воздействию*. Украинский математический журнал, 1967, т. 19, № 5.

[3] Шарова Л. В., *Усреднение одного специального класса интегро — дифференциальных уравнений*. Дифференциальные уравнения, 1974, т. 10, № 8.

Пловдивский университет
имени П. Хилендарского

Высший машинно — электротехнический
институт имени „В. И. Ленина" — София