PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 23 (37) 1978, pp. 129 — 135

ASSOZIATIV-ÄHNLICHE GESETZE

Henner Kröger

(Eingegangen am 6. September 1976)

§ 1 Einleitung. Im Rahmen der Verbandstheorie und verwandter Gebiete sind Modifikationen des gewöhnlichen Assoziativgesetzes

(A) $$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

von vielen Autoren untersucht worden. So gibt A. Pectu in [10] die Axiome

(V) $$(a \cdot b) \cdot c = b \cdot (c \cdot a),$$

(ZA) $$(a \cdot b) \cdot c = (b \cdot c) \cdot a,$$

(KA) $$(a \cdot b) \cdot c = b \cdot (a \cdot c),$$

(IA) $$a \cdot (b \cdot c) = b \cdot (a \cdot c),$$

(BA) $$(a \cdot b) \cdot c = (c \cdot b) \cdot a$$

sowie ihre Spiegelbilder — indem man zu $x \circ y := y \cdot x$ übergeht — als wesentlich verschiedene Modifikationen von (A) an.

Diese Gesetze geben gewisse *Regeln für die Klammernsetzung* aber damit verbunden auch gewisse *Kommutativitätsregeln* wieder. Besonders interessant ist dabei das gewissermaßen kommutativassoziative Gesetz (KA), aus dem sogenannte *innere Assoziativitäts-* und *Kommutativitätseigenschaften* abgeleitet werden. Aus dem gewissermaßen zyklischen Assoziativgesetz (ZA) bzw. aus (V) kann man eine *verschränkte* bzw. *parallele Kommutativitätseigenschaft* ableiten. Aus (BA) folgt die bekannte *Bisymmetriegleichung*. Durch Hinzunahme des Idempotenzgesetzes

(I) $$a \cdot a = a$$

lassen sich diese Eigenschaften noch verschärfen. Gleichzeitig gelingt es mittels (I), Implikationen zwischen verschiedenen assoziativ-ähnlichen Gesetzen herzustellen.

§ 2 Z-Operative, V-Operative. Eine Algebra $(M, \cdot)$ vom Typ $<2>$ — nach F. Klein-Barmen also ein *Operativ* — soll kurz *V-Operativ* bzw. *Z-Operativ* bzw. *K-Operativ* bzw. *I-Operativ* bzw. *B-Operativ* genannt werden, wenn das entsprechende Axiom (V) bzw. (ZA) bzw. (KA) bzw. (IA) bzw. (BA) erfüllt ist. Man erhält nun

Lemma 1: *In Z-Operativen gilt das Gesetz der verschränkten Kommutativität*

$$(a \cdot b) \cdot (x \cdot y) = (y \cdot b) \cdot (a \cdot x).$$

Beweis. $(a \cdot b) \cdot (x \cdot y) = ((x \cdot y) \cdot a) \cdot b = ((a \cdot x) \cdot y) \cdot b = (y \cdot b) \cdot (a \cdot x).$

Satz 1: (R. Padmanabhan [9]) *Das Z-Operativ $(M, \cdot)$ ist genau dann ein Halbverband, wenn das Idempotenzgesetz (I) gilt.*

Beweis: In Idempotenten Z-Operativen gilt

$$a \cdot b = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = (b \cdot b) \cdot (a \cdot a) = b \cdot a,$$

$$(a \cdot b) \cdot c = (b \cdot c) \cdot a = a \cdot (b \cdot c) \cdot$$

Die Gegenrichtung ist trivial.

Lemma 2: *In V-Operativen gilt das Gesetz der parallelen Kommutativität*

$$(a \cdot b) \cdot (x \cdot y) = (b \cdot a) \cdot (y \cdot x) \cdot$$

Beweis: $(a \cdot b) \cdot (x \cdot y) = b \cdot ((x \cdot y) \cdot a) = b \cdot (y \cdot (a \cdot x)) =$
$= ((a \cdot x) \cdot b) \cdot y = (x \cdot (b \cdot a)) \cdot y = (b \cdot a) \cdot (y \cdot x) \cdot$

In V-Operativen definiere man Relationen σ und ρ vermöge

$$a \,\sigma\, b :\Leftrightarrow a = a \cdot b,$$

$$a \,\rho\, b :\Leftrightarrow a = b \cdot a.$$

Wenn man nun zeigt, daß σ *transitiv* und *antisymmetrisch* ist, so gilt dies auch für ρ, da (V) sein eigenes Spiegelbild ist.

Beweis: Mit $a = a \cdot b$ und $b = b \cdot c$ gilt

$$a = a \cdot b = (a \cdot b) \cdot (b \cdot c) = (b \cdot a) \cdot (c \cdot b) = (b \cdot (b \cdot a)) \cdot c =$$

$$= ((a \cdot b) \cdot b) \cdot c = (a \cdot b) \cdot c = a \cdot c.$$

Mit $a = a \cdot b$ und $b = b \cdot a$ gilt

$$a = a \cdot b = (a \cdot b) \cdot (b \cdot a) = (b \cdot a) \cdot (a \cdot b) = b \cdot a = b.$$

Aber (V) ist für idempotente Verallgemeinerungen des Verbandsbegriffes ebenso wenig geeignet wie (ZA), es gilt nämlich wiederum

Satz 2: *Das V-Operativ $(M, \cdot)$ ist genau dann ein Halbverband, wenn das Idempotenzgesetz (I) gilt.*

Beweis: In idempotenten V-Operativen gilt

$$a \cdot b = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = (b \cdot a) \cdot (b \cdot a) = b \cdot a,$$

$$(a \cdot b) \cdot c = (b \cdot a) \cdot c = a \cdot (c \cdot b) = a \cdot (b \cdot c).$$

Die Gegenrichtung ist wieder trivial.

Wenn $(M, \wedge)$, $(M, \vee)$ zwei V-Operative bzw. zwei Z-Operative sind, ja sogar wenn eines ein Z-Operativ und das andere ein V-Operativ ist, so ist $(M, \wedge, \vee)$ schon dann ein Verband, falls zwei geeignete Absorptionsaxiome erfüllt sind; geeignet sind etwa die Paare der in [8] genannten Klassen 1/2, 1/4, 1/7 — also zwölf verschiedene Möglichkeiten (vgl. auch [10]). Diese Axiomensysteme sind für Verbände minimal im Sinne von [10] S. 343/4. Besonders schön sind natürlich die Axiomensysteme aus denn das Dualitätsprinzip direkt ablesbar ist.

§ 3 K-Operative. In K-Operativen gilt die Gleichungskette

$$((a\cdot b)\cdot c)\cdot d=c\cdot((a\cdot b)\cdot d)=c\cdot(b\cdot(a\cdot d))=$$
$$=(b\cdot c)\cdot(a\cdot d)=(a\cdot(b\cdot c))\cdot d=((b\cdot a)\cdot c)\cdot d=$$
$$=c\cdot((b\cdot a)\cdot d)=c\cdot(a\cdot(b\cdot d))=(a\cdot c)\cdot(b\cdot d)=$$
$$=(b\cdot(a\cdot c))\cdot d=((a\cdot b)\cdot c)\cdot d.$$

Daraus erhält man sofort die Eigenschaften der *inneren Assoziativität* und der *inneren Kommutativität.*

Satz 3. *In K-Operativen gilt*

$$((a\cdot b)\cdot c)\cdot q=(a\cdot(b\cdot c))\cdot q,$$
$$q\cdot((a\cdot b)\cdot c)=q\cdot(a\cdot(b\cdot c)).$$

Demnach kann man in K-Operativen im Inneren der Faktoren eines Produktes auf die Klammerung verzichten, für den Wert der einzelnen Faktoren ist sie zwar noch relevant, aber nicht mehr für den Wert des Produktes selbst. Der Wert des Produktes ändert sich nicht einmal, wenn man — allerdinges weit genug im Inneren des Produktes — die Operanden vertauscht im Sinne von

Satz 4: *In K-Operativen gilt*

$$(a\cdot b\cdot p)\cdot q=(b\cdot a\cdot p)\cdot q=$$
$$=p\cdot(a\cdot b\cdot q)=p\cdot(b\cdot a\cdot q).$$

Für idempotente K-Operative soll sogar die volle Assoziativität gezeigt werden. Dagegen kann man die innere Kommutativität in idempotenten K-Operativen zwar verbessern, jedoch ist eine volle Kommutativität nur in Sonderfällen gültig.

Lemma 3. *In idempotenten K-Operativen gilt*

(B 1) $$a\cdot b=(a\cdot b)\cdot b.$$

Beweis. $a\cdot b=(a\cdot b)\cdot(a\cdot b)=(a\cdot(a\cdot b))\cdot b=(a\cdot a\cdot b)\cdot b=(a\cdot b)\cdot b.$

Satz 5: *In idempotenten K-Operativen gilt das gewöhnliche Assoziativgesetz (A).*

B e w e i s: $(a\cdot b)\cdot c=((a\cdot b)\cdot c)\cdot((a\cdot b)\cdot c)=(a\cdot b\cdot c)\cdot(a\cdot(b\cdot c))=$

$$=(a\cdot(a\cdot b\cdot c))\cdot(b\cdot c)=((a\cdot a)\cdot(b\cdot c))\cdot(b\cdot c)=$$

$$=(a\cdot(b\cdot c))\cdot(b\cdot c)=a\cdot(b\cdot c).$$

K o r o l l a r: *In idempotenten K-Operativen gilt*

$$a\cdot b\cdot q=b\cdot a\cdot q. \tag{Q}$$

Man beachte dabei, daß man von (KA, A) wohl kaum auf (I) aber sehr wohl von (KA, A) auf (Q) schließen kann.

K-Operative, besonders idempotente K-Operative, liegen offenbar in nächster Nachbarschaft der kommutativen Halbgruppen bzw· der Halbverbände. Diese Ähnlichkeit soll nun noch unter dem Gesichtspunkt geordneter Mengen und Verbände verfolgt werden. Zunächst kann man in K-Operativen eine Relation σ vermöge

$$a\,\sigma\, b:\ \overset{\times}{\times}\ a=a\cdot b$$

definieren. Dann erkennt man aber leicht die *Transitivitätseigenschaft.*

$$a\,\sigma\, b,\quad b\,\sigma\, c\ \Rightarrow\ a\,\sigma\, c,$$

denn mit $a=a\cdot b$ und $b=b\cdot c$ folgt

$$a=a\cdot b=(a\cdot b)\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b\cdot b)\cdot c=(a\cdot b)\cdot c=a\cdot c.$$

Weiter gilt

$$a\,\sigma\, b\ \Rightarrow\ a\cdot b=b\cdot a$$

und deshalb auch die *Antisymmetrieeigenschaft*

$$a\,\sigma\, b,\quad b\,\sigma\, a\ \Rightarrow\ a=b.$$

Und über gemeinsame Schranken gilt

$$x\,\sigma\, a,\quad x\,\sigma\, b\ \Rightarrow\ x\,\sigma\,(a\cdot b),$$

denn mit $x=x\cdot a$ und $x=x\cdot b$ erhält man

$$x=x\cdot b=(x\cdot a)\cdot b=(a\cdot x)\cdot b=x\cdot(a\cdot b).$$

S a t z 6: *In dem K-Operativ $(M,\ \cdot)$ ist die Relation σ genau dann eine Ordnungsrelation wenn die Operation $\cdot$ idempotentent ist. Man schreibt dann $\leqslant$ statt σ. Außerdem ist die Ordnungsrelation $\leqslant$ in idempotenten K-Operativen mit der Operation$\cdot$ verträglich im Sinne von*

$$a\leqslant b\ \Rightarrow\ a\cdot x\leqslant b\cdot x,$$

$$a\leqslant b\ \Rightarrow\ x\cdot a\leqslant x\cdot b.$$

In idempotent K-Operativen gilt mit (B 1) auch

$$a\cdot b\leqslant b.$$

Folglich ist ein idempotentes K-Operativ genau dann ein Halbverband, wenn auch

$$(*) \qquad a \cdot b \leqslant a$$

gilt. Da sich (*) umformen läßt zu

$$(\mathrm{S}\ 1) \qquad a \cdot b = (a \cdot b) \cdot a$$

und weil sich (B 1) umformen läßt zu

$$(\mathrm{S}\ 3) \qquad a \cdot b = b \cdot (a \cdot b),$$

erhält man mit dem *Transitivitätssatz für Absorptionsaxiome* (vgl. [8]) und mit den in [8, 10] genannten Beziehungen zwischen Absorptionsaxiomen und Idempotenzgesetzen schließlich analog zu den V- und Z-Operativen den

Satz 7: *Zu den beiden K-Operativen* $(M, \wedge)$ *und* $(M, \vee)$ *bilde man die Algebra* $(M, \wedge, \vee)$. *Dann ist* $(M, \wedge, \vee)$ *genau dann ein Verband, wenn die Absorptionsaxiome*

$$a = a \wedge (a \vee b) \quad \textit{und} \quad a = a \vee (a \wedge b)$$

gelten.

§ 4 I-Operative, B-Operative. Da man von (I, KA) auf (A) schließen kann, ist jedes idempotente K-Operativ auch ein idempotentes I-Operativ. (IA) erlaubt gewissermaßen das Vertauschen linker Operanden. Bei der Charakterisierung der sogenannten *Implikationsalgebren* [1, 3] spielt (IA) eine wesentliche Rolle.

Satz 8: *In B-Operativen gilt die Bisymmetriegleichung* (vgl [2] § 6.4)

$$(\mathrm{B}) \qquad (a \cdot b) \cdot (x \cdot y) = (a \cdot x) \cdot (b \cdot y).$$

Beweis: $(a \cdot b) \cdot (x \cdot y) = ((x \cdot y) \cdot b) \cdot a = ((b \cdot y) \cdot x) \cdot a = (a \cdot x) \cdot (b \cdot y)$.

Da aus der Bisymmetriegleichung (B) mit dem Idempotenzgesetz (I) sofort die *Autodistributivgesetze* (vgl. [2] § 6.5, [3, 4, 5])

$$(\mathrm{AD}) \qquad (a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot (b \cdot c),$$

$$(\mathrm{DA}) \qquad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot (a \cdot c)$$

folgen, erhält man das

Korollar: *In idempotenten B-Operativen gilt das Autodistributivgesetz* (*AD*) *und sein Spiegelbild* (*DA*).

§ 5 Ausblick. Bei einer Spiegelung vermöge $x \circ y := y \cdot x$ gehen die Axiome (A), (B), (V) in sich selbst über, was eine gewisse Auszeichnung dieser Axiome bedeutet. Dagegen haben (ZA), (KA), (IA), (BA) als Spiegelbilder

$$(\mathrm{AZ}) \qquad a \cdot (b \cdot c) = b \cdot (c \cdot a),$$

$$(\mathrm{AK}) \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (c \cdot b),$$

$$(\mathrm{AI}) \qquad (a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b,$$

$$(\mathrm{AB}) \qquad a \cdot (b \cdot c) = c \cdot (b \cdot a).$$

Für die Spiegelbilder gelten analoge (spiegelbildliche) Aussagen wie für die Urbilder.

Ein ganz anderer Typ eines assoziativ-ähnlichen Gesetzes ist durch das *Zwerch-Assoziativgesetz*

(ZWA) $$(a\cdot b)\cdot c=(a\cdot b)\cdot(b\cdot c)$$

und sein Spiegelbild

(AWZ) $$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot(b\cdot c)$$

gegeben. Gegenüber den zuvor genannten assoziativ-ähnlichen Gesetzen hat (ZWA) den Vorteil, daß die Reihenfolge der Variablen auf beiden Seiten der Gleichung bis auf Verdopplung die gleiche ist, durch (ZWA) allein werden noch keine echten Vertauschungsregeln eingeschleppt. Stattdessen bringt (ZWA) — ähnlich wie die Autodistributivität — eine kleine Prise Idempotenz mit. (ZWA) gilt in jeder idempotenten Halbgruppe und ist daher für Verallgemeinerungen des Verbandsbegriffes gut geeignet [6, 7]. Dies führt etwa zur Definition der *Booleschen Zwerchverbände* — einer weder kommutativen noch assoziativen Darstellung der *orthomodularen Verbände.* Aber auch in gewissen *diskreten zeitabhängigen Logiken* (vgl. [12]) gilt (ZWA) statt (A). Selbstverständlich kann man aus (ZWA) durch entsprechende Vertauschungen eine weitere Serie assoziativ-ähnlicher Gesetze erzeugen.

Mit den bis hier genannten Eigenschaften erhält man Fig. 1 und Fig. 2, wobei $\rightarrow$ als logische Implikation $\Rightarrow$ zu lesen ist. Mit K ist das Kommutativgesetz

(K) $$a\cdot b=b\cdot a$$

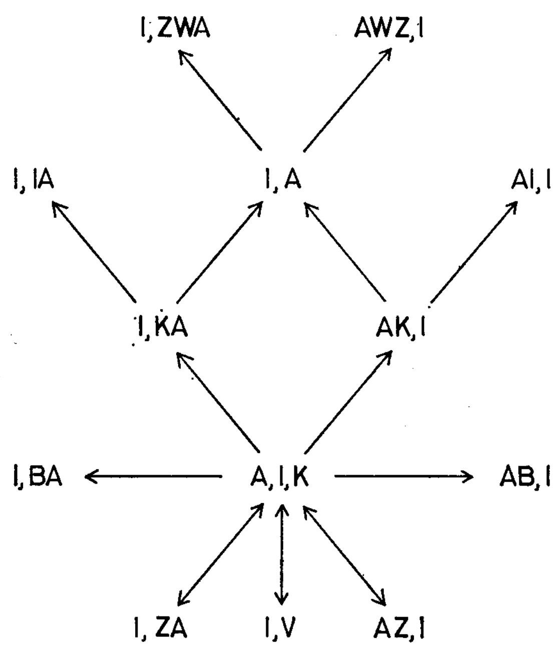

Fig. 1

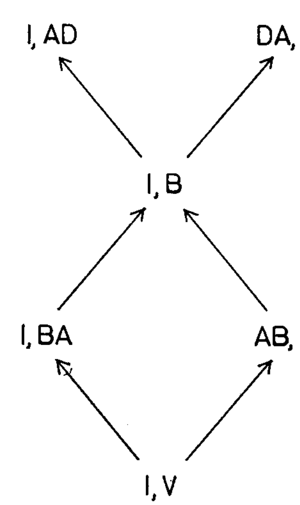

Fig. 2

bezeichnet. Vollständigkeit der $\rightarrow$-Beziehungen konte nicht erreicht werden. Beziehungen der Art non ($X \Rightarrow Y$) wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit fortgelassen. Man kann sich aber zahlreiche Beziehungen dieser Art mittels einfacher logischer Überlegungen und an Gegenbeispielen klar machen. Für die Verknüpfungstafel

$\cdot$	a	b	c
a	a	a	c
b	a	b	c
c	a	b	c

$$(a \cdot c) \cdot b = c \cdot b = b,$$
$$a \cdot (c \cdot b) = a \cdot b = a,$$
$$c \cdot (a \cdot b) = c \cdot a = a,$$
$$(b \cdot c) \cdot a = c \cdot a = a,$$

gelten etwa (ZWA) und (IA), jedoch sind weder (A) noch (KA) erfüllt. Auch $x \cdot y := y$ und $x \cdot y := x$ sind zu diesem Zweck gut zu gebrauchen.

Es stellt sich abschließend die Frage, ob es geeignete Abgrenzungen des Begriffes *assoziativ-ähnlich* gibt, so daß für spezielle Klassen die Frage nach einem schwächsten assoziativ-ähnlichen Gesetz in idempotenten Operativen sinnvoll wird.

LITERATUR

[1] J. C. Abbott, "*Semi -Boolean algebra*", Matematički vesnik **4** (1967), 177—198

[2] J. Aczél, "*Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen*", Birkhäuser Verlag, Basel, Stuttgart, 1961

[3] L. A. Cammack, "*A new characterization of orthomodular partially ordered sets*", Matematički vesnik **12** (1975), 319—328

[4] W. Felscher, "*Ein unsymmetrisches Assoziativgesetz in der Verbandstheorie*", Archiv d. Math. **8** (1957), 171—174

[5] M. D. Gerhardts, "*Ein unsymmetrisches Kommutativgesetz in der Verbandstheorie*", Math. Nachrichten **35** (1967), 305—310

[6] H. Kröger, "*Zwerch-Assoziativität und verbandsähnliche Algebren*", Bayerische Akademie der Wissenschaften, Math.—Nat. Klasse, Sitzungsberichte 1973, 23—48

[7] H. Kröger, "*Das Assoziativgesetz als Kommutativitätsaxiom in Booleschen Zwerchverbänden*", Journal für die reine und angewandte Mathematik 285 (1976), 53—58

[8] H. Kröger, "*Zu einer Arbeit von J.A. Kalman über Absorptionsgesetze in verbandsähnlichen Algebren*", (zur Veröffentlichung eingereicht)

[9] R. Padmanabhan, "*On axioms for semi-lattices*", Canadian Math. Bull. **9** (1966), 357—358

[10] A. Pectu, "*Short definitions of lattices using the associative and absorption laws*", Revue Roumaine Math. Pures et Appl. **10** (1965), 339—355

[11] H. L. Skala, "*Trellis theory*", Algebra Universalis **1** (1971), 218—233

[12] G. H. v. Wright, "*And next*", Acta Philosophia Fennica **18** (1965), 293—304

Anschrift des Verfassers: Dr. Henner Kröger
Am Dorfplatz 24
23 Kiel-Meimersdorf
Germany