PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série tome 23 (37) 1978, pp. 95—101

О ЛИНЕЙНЫХ МЕТОДАХ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ

Миодраг Ивович

(Сообщено 5 марта 1976)

Пусть $f(x)\in C_{2\pi}$ ($C_{2\pi}$ — пространство непрерывных периодических функций периода 2π) и

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \tag{1}$$

её ряд Фурье.

При помощи матрици $\{\lambda_k^n\}$ ($k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$; $n=1,\ 2,\ \ldots$) веществе-нных чисел ряд (1) преобразуется в последовательность

$$U_n(f;\ x)=\frac{a_0\lambda_0^n}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^n(a_k\cos kx+b_k\sin kx),\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{2}$$

Если в точке x существует $U_n(f;\ x)$ при всех n и существует $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(f;\ x)$ то мы будем говорить что λ-метод (метод который определяется матрицей $\{\lambda_k^n\}$ суммирует ряд Фурье функции f в точке x.

λ-метод называется F-перманентным если он суммирует ряд Фурье любой функции $f\in C_{2\pi}$ в каждой точке x, т.е. если

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f;\ x)=f(x) \tag{3}$$

при всех x и всех $f\in C_{2\pi}$.

Для того чтобы финитный (конечний) λ-метод суммирования заданый треугольной матрицей $\{\lambda_k^n\}$ ($k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$; $n=1,\ 2,\ \ldots$) являлся F-перманентным, неопходимо и достаточно выполнение условий:

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_k^n=1\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{A}$$

$$\|U_n^\lambda\|=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left|\frac{\lambda_0^n}{2}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^n\cos kt\right|dt=O(1)\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{B}$$

Так как условие (A) несложное для проверки, то при исследованиях F-перманентности λ-метода проблем сводится к исследованию более сложного условия (B), т.е. нужно исследовать ограниченность норм чётних тригонометрических многочленов Проблемами такого рода занимались многие математики (Фейер, С. М. Никольский, Б. Надь, Й. Карамата, М. Томич, С. Б. Стечкин, А. В. Ефимов, А. Ф. Тиман, С. А. Теляковский и др.).

Точное вычисление нормы $\| U_n^\lambda \|$, $n=1, 2, \ldots$ оказывается возможный лишь в некоторых спесиальных случаях; поэтому, мы очень часто будем стремиться к нахождению достаточных условий чтобы она была ограниченной.

Самый простой случай у которого можно точно вычислить норму-это случай неотрицательного ядра $K_n(t)$; т.е.

$$K_n(t) = \frac{\lambda_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \cos kt \geqslant 0 \qquad \text{для всех } t \in [-\pi, \pi].$$

Тогда норма

$$\| U_n^\lambda \| = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left| K_n(t) \right| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi K_n(t)\, dt = \lambda_0^n$$

является ограниченной в случае ограниченного λ_0^n. Если, дополнительно, выполняется и условие (A), то λ-метод является F-перманентным.

Фейер доказал что дла неотрицательности косинусного ряда

$$\frac{\lambda_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^n \cos kt, \qquad \lambda_n^n \to 0, \qquad n \to \infty$$

достаточна двойная монотонность последовательности λ_k^n т.е.

$$\Delta \lambda_k^n = \lambda_k^n - \lambda_{k+1}^n \geqslant 0 \qquad (k=1, 2, \ldots),$$

$$\Delta^2 \lambda_k^n = \lambda - 2\lambda_{k+1}^n + \lambda_{k+2}^n \geqslant 0 \qquad (k=1, 2, \ldots).$$

Для того чтобы теорему Фейера можно применить и к финитным λ-методам суммирования, где $\lambda_k^n = 0$ для всех $k > n$, неопходимо чтобы и последние разности

$$\Delta^2 \lambda_{n-1}^n = \lambda_{n-1}^n - 2\lambda_n^n$$

$$\Delta^2 \lambda_n^n = \lambda_n^n$$

являлись положительными, т.е. чтобы

$$\lambda_0^n, \lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_n^n, 0;$$

$$\lambda_0^n, \lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_n^n, 0, 0$$

являлись выпуклыми последовательностями.

С. М. Никольский [1] рассматрывал финитные λ-методы суммирования независимо от изменения знака ядра. Он показал что если последовательность

$$\lambda_0^n,\ \lambda_1^n,\ \lambda_2^n,\ \ldots,\ \lambda_n^n,\ 0 \tag{4}$$

выпукла или вогнута, т.е. если разности

$$\Delta^2 \lambda_k^n = \lambda_k^n - 2\,\lambda_{k+1}^n + \lambda_{k+2} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

знакопостоянные, то выполнение условий

$$\lambda_k^n = \mathcal{O}(1) \qquad \text{для всех } k \text{ и } n, \tag{α}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^n}{n-k+1} = \mathcal{O}(1), \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{β}$$

неопходимо и достаточно чтобы норма $\| U_n^\lambda \|$ выла ограниченной. Если кроме того, выполняется и условие (A), то λ-метод F-перманентный.

Теорема С. М. Никольского обобщает теорему Фейера так как кроме выпуклости последовательности (4) не требует ее монотоность, а также не требует выпуклость последовательности $\lambda_0^n,\ \lambda_1^n,\ \lambda_2^n,\ \ldots,\ \lambda_n^n,\ 0,\ 0$.

В настоящей статье исследуются достаточнйе условия ограниченности нормы четного (косинусного) тригонометрического многочлена, а также и достаточные условия F-перманентности λ-метода суммирования.

Теорема 1 нашей статьи применима, как это будет показанно, и к одному известному λ-методу суммирования и мы будем показать что он является F-пермаментным. Этот метод привели Й. Карамата и М. Томич ([2], стр. 124), и на этот метод невазможно применить теоремы их статьи, а тоже и другие известные теоремы.

Теорема 2 нашей статьи в некотором смысле улучшает результат С. М. Никольского так как не предполагает выпуклость последовательности $\lambda_0^n,\ \lambda_1^n,\ \lambda_1^n,\ \ldots,\ \lambda_n^n,\ 0$ а предполагется лишь выпуклость последовательности $\lambda_0^n,\ \lambda_1^n,\ \lambda_2^n,\ \ldots,\ \lambda_n^n$.

Пользуясь результатами настоящй работы и работы [3], легко найти достаточные условия для того чтобы метод задан матрицей

$$\lambda_k^n = \alpha_k^n\,(\xi_k^n)^m + \beta_k^n\,(\xi_k^n)^{m-1}$$

где ($k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ n=1,\ 2,\ \ldots$) и m-натуральное, конечное, число, был методом F-перманентним.

В доказательствах теорем мы делаем изменения (поправки коэффициентов, а своjство ограниченности или неограниченности нормы $\| U_n^\alpha \|$ косинусного тригонометрического многочлена остается неизменимым если к коэффициентам α_k^n ($k,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ n=1,\ 2,\ \ldots$) прибавим или из них вычислим коэффициенты β_k^n ($k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ n=1,\ 2,\ \ldots$) при условии что норма $\| U_n^\beta \|$ ограничена. Это следует из

$$\big|\, \| U_n^\alpha \| - \| U_n^\beta \| \,\big| \leqslant \| U_n^{\alpha \pm \beta} \| \leqslant \| U_n^\alpha \| + \| U_n^\beta \|.$$

Лемма 1. *Пусть норма* $\| U_n^\beta \|$ *косинусного тригонометрическоге многочлена заданного коэффициентами* β_k^n $(k=0, 1, 2, \ldots, n;\ n=1, 2, \ldots)$ *ограниченна. Тогда ограниченна и норма* $\| U_n^\alpha \|$ *косинусного многочлена заданного коэффициентами* α_k^n $(k=0, 1, 2, \ldots, n;\ n=1, 2, \ldots)$ *если*

(I) $\lambda_k^n = \alpha_k^n - \beta_k^n$ *невозрастающая выпуклая последовательность по к для всех* n,

(II) $$\lambda_n^n = \alpha_n^n - \beta_n^n = 0, \qquad \lambda_0^n = \alpha_0^n - \beta_0^n = O(1) \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Доказательство. Норма $\| U_n^\lambda \| = \| U_n^{\alpha-\beta} \|$ будет

$$\| U_n^{\alpha-\beta} \| = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi | K_n(t) |\, dt$$

где

$$K_n(t) = \frac{\alpha_0^n - \beta_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k^n - \beta_k^n) \cos kt$$

ядро.

Из (I) и $\alpha_n^n - \beta_n^n = 0$ и результатов Фейера следует $K_n(t) \geqslant 0$ и поэтому норма

$$\| U_n^{\alpha-\beta} \| = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi | K_n(t) |\, dt = \alpha_0^n - \beta_0^n .$$

Так как

$$\| U_n^{\alpha-\beta} \| \geqslant \big|\, \| U_n^\alpha \| - \| U_n^\beta \| \,\big|,$$

то при предположении $\alpha_0^n - \beta_0^n = O(1)$ $(n=1, 2, \ldots)$ следует

(5) $$\big|\, \| U_n^\alpha \| - \| U_n^\beta \| \,\big| \leqslant \| U_n^{\alpha-\beta} \| = \alpha_0^n - \beta_0^n = O(1) \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Из (5) и ограниченности нормы $\| U_n^\beta \|$ следует что и норма $\| U_n^\alpha \|$ ограничена при всех n.

В качестве следствий леммы 1 можно привести достаточные условия F-перманентности λ-метода суммирования.

Теорема. 1. *Пусть λ-метод задан коэффициентами* λ_k^n $(k=0, 1, 2, \ldots, n;\ n=1, 2, \ldots)$. *Для того чтобы метод являлся F-перманентным, достаточно выполнение следующих трех условий:*

(A) $$\lim_{n\to\infty} \lambda_k^n = 1, \qquad k=0, 1, 2, \ldots,$$

(I) *существует последовательность* α_k^n $(k=0, 1, 2, \ldots, n;\ n=1, 2, \ldots)$ *с ограниченной нормой* $\| U_n^\alpha \|$, *такая что последовательность* $\lambda_k^n - \alpha_k^n$ *невозрастающая, выпукла по* k.

(II) $$\lambda_n^n - \alpha_n^n = 0, \qquad \lambda_0^n - \alpha_0^n = O(1) \qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Доказательство теореми 1 немедлено следует из леммы 1, так как выполнено условие (A).

Тепер мы приведем пример метода Й. Караматы и М. Томича [2] о котором мы говорили в начале статьи. Этот метод задается кеэффициентами

$$(6)\qquad \lambda_{2k-1}^{n}=\lambda_{2k}^{n}=1-\frac{k}{n+1}\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n+1;\ n=1,\ 2,\ \ldots;\ \lambda_{-1}^{n}=0)$$

Теоремы С. М. Никольского и Б. Надя неприменимы. F-перманентность этого метода легко установливается применяя теорему 1 нашей статьи.

Коеффициенты (6) можно привести к виду

$$\lambda_k^{2n+1}=1-\frac{\left[\frac{k+1}{2}\right]}{n+1}\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n+1;\ n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Обозначим

$$\alpha_k^{2n+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{2\,(n+1)} & k\text{-четное}\\ 0 & k\text{-нечетное}\end{cases}\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n),\ \alpha_k^{2n}=0 \text{ для }\quad k>2n.$$

Вычитая коэффициенты α_k^n из λ_k^n мы получим коэффициенты

$$\lambda_k^{\overline{2n+1}}=\lambda_k^{2n+1}-\lambda_k^{2n+1}=1-\frac{k+1}{2\,(n+1)}\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ 2n+1).$$

Так как норма $\|U_u^{\alpha}\|$ ограничена, а последовательность $\lambda_k^{2n+1}-\alpha_k^{2n+1}$ удовлетворяет (I) и (II) теореми 1, то и норма $\|U_n^{\lambda}\|$ будет ограниченной. Так как выполняется и условие (A), то λ-метод будет F-перманентным.

Теорема 2. *Для того чтоби λ-метод задан коэффициентами λ_k^n $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ n=1,\ 2,\ \ldots)$ являлся F-перманентным, достаточно выполнение следующих условий:*

$$(\mathrm{A})\qquad \lim_{n\to\infty}\lambda_k^n=1,\qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

(I) $\lambda_0^n=\mathcal{O}(1)$; λ_k^n *невозрастающая последовательность по k, т.е. последовательность $\lambda_0^n,\ \lambda_1^n,\ \lambda_2^n,\ \ldots,\ \lambda_n^n$ выпукла,*

$$(\mathrm{II})\qquad \lambda_n^n\ \ln n=\mathcal{O}(1)\qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Доказательство. Пусть

$$\gamma_k^n=\lambda_k^n-\delta_k^n$$

где

$$\delta_k^n=\frac{\lambda_n^n}{n}\cdot k$$

Так как последовательность λ_k^n невозрастающая выпукла, и последовательность γ_k^n будет выпуклой. Так как и $\gamma_n^n=0$, нз теоремы Фейера следует что норма многочлена заданного коэффициентами будет

$$\| U_n^\gamma \| = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\gamma_0^n}{2} + \sum_{k=1}^n \gamma_k^n \cos kt \right| dt = \gamma_0^n$$

Кроме того

$$\gamma_0^n = \| U_u^\gamma \| = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\lambda_0^n - \delta_0^n}{2} + \sum_{k=1}^n (\lambda_k^n - \delta_k^n) \cos kt \right| dt \Bigg| \geqslant$$

$$\geqslant \left| \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\lambda_0^n}{2} \sum_{k=1}^n \lambda_k^n \cos kt \right| dt - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\delta_0^n}{2} + \sum_{k=1}^n \delta_k^n \cos kt \right| dt \right| = \Big| \| U_n^\lambda \| - \| U_n^\delta \| \Big| .$$

Мы получаем

$$\| U_n^\delta \| = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\delta_0^n}{2} + \sum_{k=1}^n \delta_k^n \cos kt \right| dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\lambda_n^n}{n} \left| \sum_{k=1}^n k \cos kt \right| dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{\lambda_n^n}{n} \int_0^\pi \left| \frac{(n+1) \sin \frac{2n+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{2 \sin^2 \frac{n+1}{2} t}{4 \sin^2 \frac{t}{2}} \right| dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2 \lambda_n^n}{\pi n} \left\{ (n+1) \int_0^\pi \left| \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}} \right| dt + \int_0^\pi \left| \frac{\sin^2 \frac{n+1}{2} t}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} \right| dt \right\} =$$

$$= \frac{2 \lambda_n^n}{\pi n} \left\{ (n+1) \left[\frac{2}{\pi} \ln n + O(1) \right] + \frac{\pi n}{2} \right\} = O(1)$$

где ограниченность следует из того что $\lambda_n^n \ln n = O(1)$ $(n=1,\ 2, \ldots)$.

Из

$$\delta_0^n \geqslant \big| \| U_n^\lambda \| - \| U_n^\delta \| \big|$$

и ограничености δ_0^n и $\| U_n^\delta \|$ следует

$$\| U_n^\lambda \| = O(1) \qquad (n=1,\ 2, \ldots).$$

а тоже и F-перманентность λ-метода.

Заметим что в теореме 2 нужно чтоби последовательность λ_0^n, λ_1^n, λ_2^n $\ldots$, λ_n^n была выпуклой, т.е. вторые разности должны быть положительными лишь до $\Delta^2\lambda_{n-2}^n$. Разности $\Delta^2\lambda_{n-1}^n=\lambda_{n-1}^n-2\lambda_n^n$ и $\Delta^2\lambda_n^n=\lambda_n^n$ не должни быть знакопостоянными. Напомним что в теореме С. М. Никольского последовательность $\lambda_0^n, \lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_n^n, 0$, должна бить выпуклой.

Наша теорема 2 в случае невозрастающей положитетьной выпуклой последовательности содержит результат С. М. Никольского, так как

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k^n}{n-k+1}>\lambda_n^n\ln n$$

и поэтому в случае выполнения условия (β) С. М. Никольского следует выполнение условия (II) теоремы 2. Обратное утверждение не имеет место.

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Никольский, *О линейных методах суммирования рядов Фурье*, Изв. АН СССР. серия матем., 12, № 3, 1948, 259—278.

[2] J. Карамата. и М. Томић. *О збирљивости фуриер-овиx редова*. Глас Српске акад. наука 206. Од. прир-мат, наука, 5, 1953, 89—126.

[3] М. Ивовић, *О линейных методах суммирования рядов фурье, коэффициенти которого являются произведениями двух факторов*, *Publications de l'Institut Mathématique*, Nouvelle série, tome 22 (36) 1977, pp. 95—108.

Stevana Sremca 2 — A
11000 Beograd (Yugoslavia)