

DAS TORSIONSPROBLEM EINES RECHTECKIGEN ROHRS MIT ZWEI RECHTECKIGEN KANÄLEN

W. Basilewitsch

(Communicated May 19, 1976)

Wie aus der Elastizitätstheorie bekannt ist, soll bei Torsion die Spannungsfunktion

$$(1) \quad \Phi(x, y)$$

im Gebiet des Querschnitts die Differentialgleichung

$$(2) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2 G \theta$$

befriedigen, wo mit G das Gleitungsmaß, θ der Torsionswinkel bezeichnet sind, und die Randbedingungen

$$(3) \quad \Phi_s(x, y) = 0$$

am äusseren Rande und, im Falle der Symmetrie des Querschnitts in Bezug auf die Axe x und y

$$(4) \quad \Phi_u(x, y) = K$$

am inneren Rande erfüllt.

Dann wird die Konstante K bestimmt aus der Gleichung

$$(5) \quad \int_s \text{grad } \Phi_v ds = -2 G \theta F_m,$$

wo F_m der Flächeninhalt 3, 4, 4', 3' und S die Länge der Strecke 3—4—4'—3' ist.

Die Formen der Spannungsfunktion werden für jeden Rechteckteil des Querschnittes unter Berücksichtigung der Kontinuitätsbedingungen an der Berührungslinie gesondert gewählt. (Abb. I)

Im Gebiet I, I, 2, 2 wird die Spannungsfunktion in folgender Form angenommen:

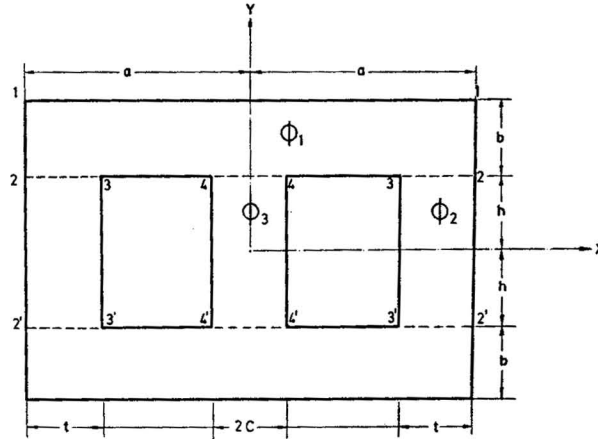


Abb. I.

$$(6) \quad \Phi_1 = G \theta (a^2 - x^2) + \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \left[A_n Ch \frac{n \pi (y-h)}{2a} + B_n Sh \frac{n \pi (y-h)}{2a} \right] \cos \frac{n \pi x_1}{2a} =$$

$$\sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \left[G \theta \frac{32 a^2}{n^3 \pi^3} (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} + A_n Ch \frac{n \pi (y-h)}{2a} + B_n Sh \frac{n \pi (y-h)}{2a} \right] \cos \frac{n \pi x_1}{2a}$$

Diese Funktion befriedigt die Differentialgleichung (2) und die Randbedingungen. (3) auf den Strecken I-2 und 2-I.

Die Randbedingung (3) wird auf der Strecke I-I befriedigt, wenn

$$(7) \quad G \theta \frac{32 a^2}{n^3 \pi^3} (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} + A_n Ch \frac{n \pi b}{2a} + B_n Sh \frac{n \pi b}{2a} = 0$$

wobei folgende Verhältnisse zwischen den Koeffizienten A_n und B_n entstehen

$$(8) \quad A_n = -G \theta \frac{32 a^2 (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{n^3 \pi^3 Ch \frac{n \pi b}{2a}} - B_n Th \frac{n \pi b}{2a}$$

Im Gebiet 2, 3, 3', 2' wird die Spannungsfunktion in folgender Form angenommen:

$$(9) \quad \Phi_2 = G \theta (t x_2 - x_2^2) + K \frac{x_2}{t} + \sum_{m=1, 2, \dots}^{\infty} C_m Ch \frac{m \pi y}{t} \sin \frac{m \pi x_2}{t} =$$

$$= \sum_{m=1, 2, \dots}^{\infty} \left\{ G \theta \frac{4 t^2}{m^3 \pi^3} [1 - (-1)^m] - K \frac{2 (-1)^m}{m \pi} + C_m Ch \frac{m \pi y}{t} \right\} \sin \frac{m \pi x_2}{t}$$

Diese Funktion befriedigt die Differentialgleichung (2) und die Randbedingung (3) auf der Strecke 2-2' und die Randbedingung (4) auf der Strecke 3-3'.

Im Gebiet 4, 4, 4', 4' wird die Spannungsfunktion in folgender Form angenommen:

$$\begin{aligned} \Phi_3 &= G\theta(c^2 - x_1^2) + K + \sum_{p=1,3..}^{\infty} D_p Ch \frac{p\pi y}{2c} \cos \frac{p\pi x_1}{2c} = \\ (10) \quad &= \sum_{p=1,3..}^{\infty} \left\{ G\theta \frac{32c^2}{p^3\pi^3} (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} + K \frac{4(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}}{p\pi} + D_p Ch \frac{p\pi y}{2c} \right\} \cos \frac{p\pi x_1}{2c} \end{aligned}$$

Diese Funktion befriedigt die Differentialgleichung (2) und die Randbedingungen (4) auf den Strecken 4-4' und 4-4'.

Auf den Berührungslinien der Gebiete 2-3 und 3-2 müssen die Funktionen Φ_1 und Φ_2 denselben Wert haben, und ebenso auch auf der Berührungslinie der Gebiete 4-4 müssen die Funktionen Φ_1 und Φ_3 denselben Wert haben und die Funktion Φ_1 ausserdem noch die Randbedingung (4) auf den Strecken 3-4 und 4-3 erfüllen.

Das wird stattfinden, wenn:

1) Der Multiplikator der Funktion Φ_2

$$f_1(x_1) = \begin{cases} \sin \frac{m\pi x_2}{t} & \text{für } -a < x_1 < -a + t \\ 0 & \text{für } -a + t < x_1 < +a - t \\ -\sin \frac{m\pi x_2}{t} & \text{für } +a - t < x_1 < +a \end{cases}$$

in Fourierreihe entwickelt

$$(11) \quad f_1(x_1) = -(-1)^m \frac{2mt}{a\pi} \sum_{n=1,3..}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \sin \frac{n\pi t}{2a}}{m^2 - \left(\frac{nt}{2a}\right)^2} \cos \frac{n\pi x_1}{2a}$$

und in (9) eingesetzt wird

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= \sum_{m=1,2..}^{\infty} \left\{ G\theta \frac{4t^2}{m^3\pi^3} [1 - (-1)^m] - K \frac{2(-1)^m}{m\pi} + C_m Ch \frac{m\pi h}{t} \right\} \\ (12) \quad &\cdot [-(-1)^m] \frac{2mt}{a\pi} \sum_{n=1,3..}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \sin \frac{n\pi t}{2a}}{m^2 - \left(\frac{nt}{2a}\right)^2} \cos \frac{n\pi x_1}{2a} \end{aligned}$$

2) Die Randbedingung (4) auf der Strecke 3-3

$$f_2(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{für } -a < x_1 < -a+t \\ K & \text{für } -a+t < x_1 < +a-t \\ 0 & \text{für } +a-t < x_1 < +a \end{cases}$$

in Fourierischer Reihe entwickelt wird

$$(13) \quad f_2(x_1) = K \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \cos \frac{n\pi t}{2a}}{n} \cos \frac{n\pi x_1}{2a}$$

3) Der Multiplikator der Funktion Φ_3

$$f_3(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{für } -a < x_1 < -c \\ \cos \frac{p\pi x_1}{2c} & \text{für } -c < x_1 < +c \\ 0 & \text{für } +c < x_1 < +a \end{cases}$$

in Fourierischer Reihe entwickelt

$$f_3(x_1) = \frac{4pc}{\pi a} (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi c}{2a}}{p^2 - \left(\frac{nc}{a}\right)^2} \cos \frac{n\pi x_1}{2a}$$

und in (10), ohne Glieder mit K , eingesetzt wird

$$(14) \quad \Phi_3 = \sum_{p=1,3,\dots}^{\infty} \left\{ G\theta \frac{32c^2}{p^3\pi^3} (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} + D_p Ch \frac{p\pi y}{2c} \right\} \cdot \frac{4pc}{\pi a} (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi c}{2a}}{p^2 - \left(\frac{nc}{a}\right)^2} \cos \frac{n\pi x_1}{2a}$$

Sodann wird (6) für $y=h$ mit der Summe von (12), (13) und (14) ausgeglichen, woraus die Verhältnisse zwischen den Koeffizienten A_n , C_m , D_p und K entstehen:

$$(15) \quad \begin{aligned} & \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left[G\theta \frac{32a^2}{n^3\pi^3} (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} + A_n \right] \cos \frac{n\pi x_1}{2a} = \\ & = \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \left\{ G\theta \frac{4t^2}{m^3\pi^3} [1 - (-1)^m] - K \frac{2(-1)^m}{m\pi} + C_m Ch \frac{m\pi h}{t} \right\} \\ & \cdot [-(-1)^m] \frac{2mt}{a\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \sin \frac{n\pi t}{2a}}{m^2 - \left(\frac{nt}{2a}\right)^2} \cos \frac{n\pi x_1}{2a} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + K \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3..}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \cos \frac{n \pi t}{2a}}{n} \cos \frac{n \pi x_1}{2a} + \\
 (15) \quad & + \sum_{p=1,3..}^{\infty} \left\{ G \theta \frac{32 c^2}{p^3 \pi^3} (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} + D_p Ch \frac{p \pi h}{2c} \right\} \cdot \\
 & \cdot \frac{4 p c}{a \pi} (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)} \sum_{n=1,3..}^{\infty} \frac{\cos \frac{n \pi c}{2a}}{p^2 - \left(\frac{nc}{a}\right)^2} \cos \frac{n \pi x_1}{2a}
 \end{aligned}$$

Ausserdem müssen an den Berührungslinien 2-3 und 3-2 der Gebiete die Werte der partiellen Ableitungen der Funktionen Φ_1 und Φ_2 :

$$(16) \quad \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right)_{y=h} = \sum_{n=1,3..}^{\infty} \frac{n \pi}{2a} B_n \cos \frac{n \pi x_1}{2a}$$

und

$$(17) \quad \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} \right)_{y=h} = \sum_{m=1,2..}^{\infty} \frac{m \pi}{t} C_m Sh \frac{m \pi h}{t} \sin \frac{m \pi x_2}{t}$$

gleich sein.

Das wird stattfinden, wenn der Multiplikator der Funktion (16)

$$f_4(x_2) = \cos \frac{n \pi x_1}{2a} \quad \text{für } 0 < x_2 < t$$

in Fourierischer Reihe entwickelt,

$$f_4(x_2) = -(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{2 \sin \frac{n \pi t}{2a}}{\pi} \sum_{m=1,2..}^{\infty} \frac{m (-1)^m}{m^2 - \left(\frac{nt}{2a}\right)^2} \sin \frac{m \pi x_2}{t}$$

in (16) eingesetzt und mit (17) ausgeglichen wird

$$\begin{aligned}
 (18) \quad & - \sum_{n=1,3..}^{\infty} \frac{n \pi}{2a} B_n (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{2 \sin \frac{n \pi t}{2a}}{\pi} \sum_{m=1,2..}^{\infty} \frac{m (-1)^m}{m^2 - \left(\frac{nt}{2a}\right)^2} \sin \frac{m \pi x_2}{t} = \\
 & = \sum_{m=1,2..}^{\infty} \frac{m \pi}{t} C_m Sh \frac{m \pi h}{t} \sin \frac{m \pi x_2}{t}
 \end{aligned}$$

woraus die Verhältnisse zwischen den Koeffizienten C_m und B_n entstehen.

$$(19) \quad C_m = - \frac{(-1)^m}{a \pi Sh \frac{m \pi h}{t}} \sum_{n=1,3..}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} n \sin \frac{n \pi t}{2a}}{m^2 - \left(\frac{nt}{2a}\right)^2} B_n$$

Auch müssen an der Berührungslinie 4-4 der Gebiete die Werte der partiellen Ableitungen der Funktionen Φ_1 und Φ_3

$$(20) \quad \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right)_{y=h} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{n\pi}{2a} B_n \cos \frac{n\pi x_1}{2a}$$

und

$$(21) \quad \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial y} \right)_{y=h} = \sum_{p=1,3,\dots}^{\infty} \frac{p\pi}{2c} D_p \operatorname{Sh} \frac{p\pi h}{2c} \cos \frac{p\pi x_1}{2c}$$

gleich sein.

Das wird stattfinden, wenn der Multiplikator der Funktion (20)

$$f_5(x_1) = \cos \frac{n\pi x_1}{2a} \quad \text{für} \quad -c < x_1 < +c$$

in Fourierreihe entwickelt,

$$f_5(x) = \frac{4}{\pi} \cos \frac{n\pi c}{2a} \sum_{p=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}}{p^2 - \left(\frac{nc}{a}\right)^2} p \cos \frac{p\pi x_1}{2c}$$

in (20) eingesetzt und mit (21) ausgeglichen wird

$$(22) \quad \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{n\pi}{2a} B_n \frac{4}{\pi} \cos \frac{n\pi c}{2a} \sum_{p=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}}{p^2 - \left(\frac{nc}{a}\right)^2} p \cos \frac{p\pi x_1}{2c} = \\ = \sum_{p=1,3,\dots}^{\infty} \frac{p\pi}{2a} D_p \operatorname{Sh} \frac{p\pi h}{2c} \cos \frac{p\pi x_1}{2c}$$

woraus die Verhältnisse zwischen den Koeffizienten D_p und B_n entstehen.

$$(23) \quad D_p = \frac{4c(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}}{a\pi \operatorname{Sh} \left(\frac{p\pi h}{2c} \right)} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{n \cos \frac{n\pi c}{2a}}{p^2 - \left(\frac{nc}{a}\right)^2} B_n$$

Werden in (19) und (23) die Indices i statt n eingesetzt, so ergibt sich, wenn aus (15), (8), (19) und (23) die Koeffizienten A_n , C_m und D_p eliminiert werden, ein lineares unendliches Gleichungssystem

$$(24) \quad B_n + \frac{2t^2}{a^2\pi^2} (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \sin \frac{n\pi t}{2a} \operatorname{Cth} \frac{n\pi b}{2a} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{1}{2}(i-1)} i \sin \frac{i\pi t}{2a} \cdot B_i \\ + \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{m \operatorname{Cth} \frac{m\pi h}{t}}{\left[m^2 - \left(\frac{it}{2a} \right)^2 \right] \left[m^2 - \left(\frac{nt}{2a} \right)^2 \right]} + \frac{16c^2}{a^2\pi^2} \cos \frac{n\pi c}{2a} \operatorname{Cth} \frac{n\pi b}{2a}.$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} i \cos \frac{i \pi c}{2 a} B_i \sum_{p=1,3,\dots}^{\infty} \frac{p C t h \frac{p \pi h}{2 c}}{\left[p^2 - \left(\frac{i c}{a} \right)^2 \right] \left[p^2 - \left(\frac{n c}{a} \right)^2 \right]} = \\
 (24) \quad & = - (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} G \theta \frac{32 a^2}{\pi^3} \left[\frac{t^3 \sin \frac{n \pi t}{2 a} C t h \frac{n \pi b}{2 a}}{2 a^3 \pi} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 \left[m^2 - \left(\frac{n t}{2 a} \right)^2 \right]} + \right. \\
 & \left. + \frac{1 - C h \frac{n \pi b}{2 a}}{n^3 S h \frac{n \pi b}{2 a}} \right] - K (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{4}{\pi} C t h \frac{n \pi b}{2 a} \left[\frac{t}{a \pi} \sin \frac{n \pi t}{2 a} \cdot \right. \\
 & \left. \cdot \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 - \left(\frac{n t}{2 a} \right)^2} + \frac{\cos \frac{n \pi t}{2 a}}{n} \right] - \frac{128 c^2}{a \pi^4} G \theta \cos \frac{n \pi c}{2 a} \cdot \\
 & \cdot C t h \frac{n \pi b}{2 a} \cdot \sum_{p=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{p^2 \left[p^2 - \left(\frac{n c}{a} \right)^2 \right]}
 \end{aligned}$$

Dieses unendliche Gleichungssystem kann in zwei Systeme zerlegt werden.

$$(25) \quad B_n = b_n + b_{nk} K$$

Das erste

$$\begin{aligned}
 & b_n + \frac{2 t^2}{a^2 \pi^2} (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \sin \frac{n \pi t}{2 a} C t h \frac{n \pi b}{2 a} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{1}{2}(i-1)} i \sin \frac{i \pi t}{2 a} \cdot \\
 & \cdot b_i \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{m C t h \frac{m \pi h}{t}}{\left[m^2 - \left(\frac{i t}{2 a} \right)^2 \right] \left[m^2 - \left(\frac{n t}{2 a} \right)^2 \right]} + \frac{16 c^2}{a^2 \pi^2} \cos \frac{n \pi c}{2 a} C t h \frac{n \pi b}{2 a} \cdot \\
 & \cdot \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} i \cos \frac{i \pi c}{2 a} b_i \sum_{p=1,3,\dots}^{\infty} \frac{p C t h \frac{p \pi h}{2 c}}{\left[p^2 - \left(\frac{i c}{a} \right)^2 \right] \left[p^2 - \left(\frac{n c}{a} \right)^2 \right]} = \\
 & = - (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} G \theta \frac{32 a^2}{\pi^3} \left[\frac{t^3 \sin \frac{n \pi t}{2 a} C t h \frac{n \pi b}{2 a}}{2 a^3 \pi} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 \left[m^2 - \left(\frac{n t}{2 a} \right)^2 \right]} + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1 - Ch \frac{n\pi b}{2a}}{n^3 Sh \frac{n\pi b}{2a}} \left[- \frac{128 c^2}{a \pi^4} G \theta \cos \frac{n\pi c}{2a} Cth \frac{n\pi b}{2a} \cdot \sum_{p=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{p^2 \left[p^2 - \left(\frac{nc}{a} \right)^2 \right]} \right]$$

bestimmt die Koeffizienten b_n $n=1, 3, \dots, \infty$

Das zweite

$$b_{nk} + \frac{2t^2}{a^2 \pi^2} (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \sin \frac{n\pi t}{2a} Cth \frac{n\pi b}{2a} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} (-1)^{\frac{1}{2}(i-1)} i \cdot \sin \frac{i\pi t}{2a} b_{ik} \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{m Cth \frac{m\pi h}{t}}{\left[m^2 - \left(\frac{it}{2a} \right)^2 \right] \left[m^2 - \left(\frac{nt}{2a} \right)^2 \right]} + \frac{16c^2}{a^2 \pi^2} \cos \frac{n\pi c}{2a} \cdot Cth \frac{n\pi b}{2a} \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} i \cos \frac{i\pi c}{2a} b_{ik} \sum_{p=1,3,\dots}^{\infty} \frac{p Cth \frac{m\pi h}{2c}}{\left[p^2 - \left(\frac{ic}{a} \right)^2 \right] \left[p^2 - \left(\frac{nc}{a} \right)^2 \right]} =$$

$$= -K (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{4}{\pi} Cth \frac{n\pi b}{2a} \left[\frac{t}{a\pi} \sin \frac{n\pi t}{2a} \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^2 - \left(\frac{nt}{2a} \right)^2} + \frac{\cos \frac{n\pi t}{2a}}{n} \right]$$

bestimmt die Koeffizienten b_{nk} $n=1, 3, \dots, \infty$

Die Konstante K wird mittels (5), (6), (9), (19), (23) und (25) berechnet.

$$(26) \quad 2 \int_{+c}^{a-t} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \right)_{y=h} dx + \int_{-h}^{+h} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial x} \right)_{x=-t} dy - \int_{-h}^{+h} \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial x} \right) dy = -2 G \theta F_m;$$

$$2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} (b_n + b_{nk}) K \left(\sin \frac{n\pi(a-t)}{2a} - \sin \frac{n\pi c}{2a} \right) + 2 G \theta th -$$

$$- K \frac{2h}{t} + \frac{2t}{a\pi} \sum_{m=1,2,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} n \sin \frac{n\pi b}{2a}}{m^2 - \left(\frac{nt}{2a} \right)^2} (b_n + b_{nk}) K +$$

$$+ 4 G \theta hc + \frac{8c}{a\pi} \sum_{p=1,3,\dots}^{\infty} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{n \cos \frac{n\pi b}{2a}}{p^2 - \left(\frac{nc}{a} \right)^2} (b_n + b_{nk}) K = -4 G \theta (a-c-t) h$$

Mittels (25), (8), (19) und (23) werden die Koeffizienten B_n , A_n , C_m und D_p berechnet.

Auf diese Weise werden die gesuchten Funktionen Φ_1 , Φ_2 , und Φ_3 bestimmt.

Der Spannungszustand kann jetzt nach dem bekannten Verfahren der Elastizitätstheorie bestimmt werden.

Dieses Problem ist nach der Methode gelöst, welche der Autor in seinem Arbeiten [1], [2], [3], [4], [5] und [6] entwickelte.

Beispiel: $a \cdot = 4$, $b = 2$, $h = 2$, $t = 2$, $c = I$.

Lineares Gleichungssystem (24)

	1	3	5	7	9
B_1	+ 1,209	+ 0,022	+ 0,107	+ 0,042	- 0,001
B_3	+ 0,100	+ 1,665	- 0,107	+ 0,141	+ 0,123
B_5	+ 0,816	- 0,181	+ 1,697	- 0,065	+ 0,123
B_7	+ 0,447	+ 0,336	- 0,091	+ 1,673	- 0,142
B_9	- 0,018	+ 0,377	+ 0,222	- 0,183	+ 1,688
	+ 5,287 $G \theta$	- 0,255 $G \theta$	- 0,504 $G \theta$	- 0,081 $G \theta$	+ 0,006 $G \theta$
	- 1,727 K	+ 0,116 K	+ 0,031 K	- 0,010 K	+ 0,000 K

wird durch sukzessive Approximationen gelöst

$B_1 = + 4,889 G \theta - 1,531 K$
$B_3 = - 0,268 G \theta + 0,102 K$
$B_5 = - 0,639 G \theta + 0,125 K$
$B_7 = - 0,167 G \theta + 0,027 K$
$B_9 = + 0,059 G \theta - 0,015 K$

Aus (26) ergibt sich

$$K = + 6,893 G \theta$$

Die Werte der Koeffizienten

$B_1 = - 5,667 G \theta$	$A_1 = - 8,750 G \theta$	$C_1 = - 0,068 G \theta$
$B_3 = + 0,433 G \theta$	$A_3 = - 0,311 G \theta$	$C_2 = - 0,001 G \theta$
$B_5 = + 0,221 G \theta$	$A_5 = - 0,226 G \theta$	$D_1 = - 0,102 G \theta$
$B_7 = + 0,021 G \theta$	$A_7 = - 0,021 G \theta$	$D_3 = + 0,000 G \theta$
$B_9 = - 0,047 G \theta$	$A_9 = + 0,047 G \theta$	

Das Torsionsmoment

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{M} &= 8 \left\{ \int_0^a \int_h^{h+b} \Phi_1 dx dy + \int_0^h \int_0^t \Phi_2 dx dy + \int_0^h \int_0^c \Phi_3 dx dy \right\} + 4 K \bar{F}_m = \\
 &= 8 \left\{ \frac{2}{3} G \theta a^3 b + \frac{4 a^2}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{n^2} \left[A_n Sh \frac{n \pi b}{2 a} + B_n \left(Ch \frac{n \pi b}{2 a} - 1 \right) \right] \right\} + \\
 &\quad + G \theta \frac{t^3 h}{6} + K \frac{t h}{2} - \frac{2 t^2}{\pi^2} \sum_{m=1,3}^{\infty} C_m \frac{1}{m^2} Sh \frac{m \pi h}{t} + G \theta \frac{2}{3} c^3 h + K c h + \\
 &\quad + 4 \frac{c^2}{\pi^2} \sum_{p=1,3,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(p-1)}}{p^2} D_p Sh \frac{p \pi h}{2 c} \left. \right\} + 4 K (a - t - c) 2 h = 555 G \theta
 \end{aligned}$$

Die Spannungslinien sind auf Abb. 2 dargestellt.

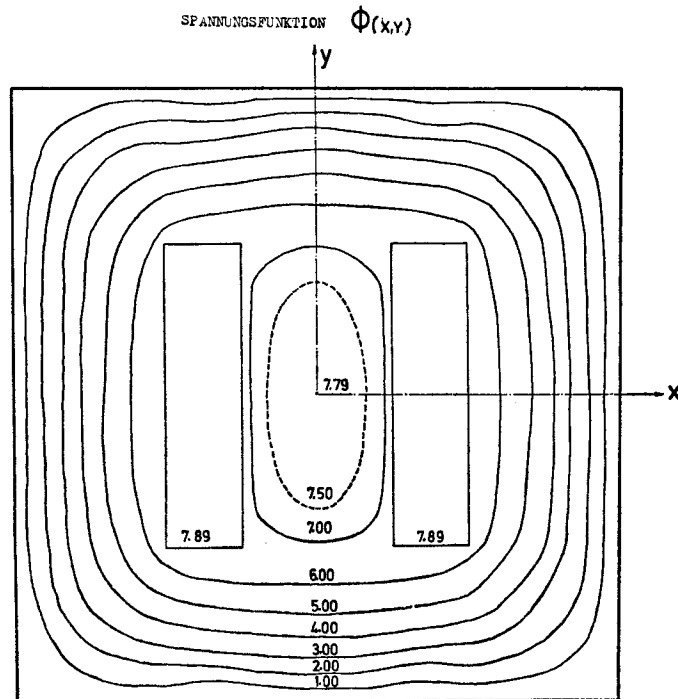


Abb. 2

L I T E R A T U R

- [1] W. Basilewitsch, *Das Torsionsproblem der T, J und z Profile*: 8-th International Congress Theoretical and Applied Mechanics. Istanbul 1952.
- [2] V. Basilevich, *Shearing stress in bending of I beams*, Publication de L'Institut Mathématique de l'Académie Serbe des Sciences. Beograd 1953.
- [3] V. Basilevich, *Shearing stress in bending of beam with a crosssection composed of rectangular pieces*, Zbornik radova Geološkog i Rudarskog Fakulteta Beograd 1953—1954.
- [4] V. Basilevitch, *La flexion d'une poutre en double I de section variable*, 9-th. International Congress Theoretical and Applied Mechanics Bruxelles 1956.
- [5] V. Basilevich, *Shearing stress in bending of T beams*, Publications de l'Institut Mathématique de l'Académie serbe des Sciences. Beograd 1956.
- [6] V. Baziljević, *Torzija pravougaone cevi*, 13 Jugoslovenski kongres racionalne i primenjene mehanike. Sarajevo 1976.

W. Basilewitch
Institut Mathématique
11000 Belgrade