PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 22 (36), 1977, pp. 215—221

PROCEDE POUR LA SOLUTION DU PROBLEME DIRECT D'ECOULEMENT A TRAVERS LA GRILLE DU PROFIL

Predrag Popovski

(Communiqué le 26 Février 1975)

Résumé: Ce travail traite de l'abord de la solution du problème direct dans la théorie de l'écoulement à travers la grille du profil, par la méthode de la représentation conforme. Au lieu de la méthode de solution par procédé graphoanalitique connue jusqu'à présent — l'auteur adapte la méthode de r. c. et propose un procédé numérique pour la solution du problème posé. Le procédé numérique développé a un caractère général, c'est-à-dire qu'il permet de résoudre le problème direct pour des grilles de géométries différentes et dans les diverses conditions de l'écoulement. La forme d'algorithme du calcul est adaptée au calcul numérique au moyen de calculateurs électroniques. A titre d'illustration, l'auteur donne un exemple du calcul pour une grille de turbine hydraulique.

1. *Introduction.* En vue de la solution du problème direct d'écoulement à travers les grilles du profil, il a été développé plusieurs méthodes différentes [1] [2]. En raison des difficultés que pose l'étude théorique d'écoulement autour d'une grille réelle (dont les profils sont le plus souvent de caractère empirique), on procède à la représentation de la grille réelle du profil en une forme plus simple, propre à l'étude théorique (par ex. un cerle). L'essentiel du problème, dans ce procédé, consiste en détermination de la fonction de représentation qui a un caractère empirique. L'application de la méthode de représentation conforme à la solution d'un problème concret permet de définir les paramètres fondamentaux du courant tels que: distributions des vitesses le long du profil de la grille, vitesse et angle du courant à la sortie de la grille.

2. *Application de la méthode de représentation conforme à la solution d'un problème donné.* La méthode de représentation conforme de la grille du profil permet de simplifier les expressions pour le potentiel complexe d'écoulement, qui a une forme beaucoup plus simple dans le domaine représenté. De plus, elle ramène l'écoulement périodique à travers la grille du profil à une forme plus simple d'écoulement dans une infinité de feuillets. Le but de ce calcul est de trouver la forme de représentation conforme qui transcrira la grille en un domaine plus simple (canonique).

Etant donné que la vitesse complexe d'écoulement est dérivée du potentiel complexe, on peut appliquer les relations:

$$\bar{V}(z)=\frac{dW(z)}{dz}=\frac{dW(Z)}{dZ}\cdot\frac{dZ}{dz}=\frac{dW(Z)}{dZ}\cdot\frac{1}{\frac{dz}{dZ}} \tag{2.1}$$

La grandeur $\frac{dW(Z)}{dZ}$ représente la vitesse complexe d'écoulement dans le domaine représenté, $\frac{dZ}{dz}$ étant la dérivée de la fonction de représentation $Z=Z(z)$.

Le procédé de résolution consiste en ce qui suit: a) domaine d'écoulement dans la grille donnée du profil transcrire d'une manière conforme en un contour plus simple dans un plan auxiliaire, b) déterminer l'expression pour le potentiel complexe d'écoulement dans le plan auxiliaire, c) utiliser les relations du type (2.1) pour définir la vitesse complexe $V(z)$ d'écoulement dans le plan fondamental.

2.1. *Calcul d'écoulement dans le plan auxiliaire.* Si l'on utilise comme domaine de représentation un cercle unitaire $|Z|\leqq 1$, la formule (2.1) se simplifie encore. En utilisant la proprieté de la représentation conforme que les potentiels complexes de deux plans sont égaux mutuellement, nous pouvons écrire:

$$\begin{gathered}\Phi(x,y)+i\Psi(x,y)=\Phi(X,Y)+i\Psi(X,Y)\\ \Phi(x,y)=\Phi(X,Y)\quad \Psi(x,y)=\Psi(X,Y)\end{gathered} \tag{2.2}$$

Vu que le rayon du cercle est égal à l'unité, l'expression pour la vitesse potentielle n'est la fonction que de la variable θ.

$$W(Z)=W(e^{i\theta})=\Phi(\theta)\qquad Z=\rho e^{i\theta} \tag{2.3}$$

Dans ce cas, l'expression pour la détermination de la vitesse le long du profil prend la forme:

$$V(s)=\frac{d\Phi}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{ds} \tag{2.4}$$

L'expression $\frac{d\theta}{ds}$ est la dérivée de la fonction de représentation de la grille sur le cercle unitaire.

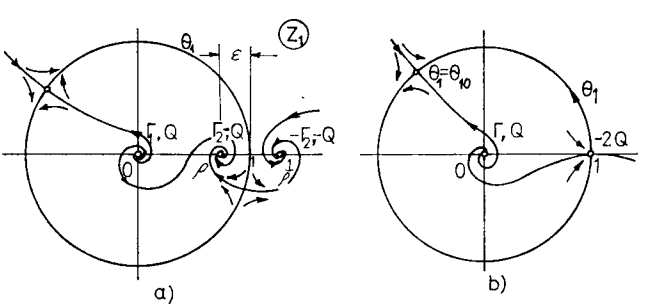

Fig. 1

Le potentiel complexe d'écoulement dans le plan du cercle se présente comme suit [1].

$$W(Z_1, \rho) = \frac{\Gamma_1 + iQ}{2\pi i} \ln Z_1 + \frac{\Gamma_2 - iQ}{2\pi i} \ln(Z_1 - \rho) + \frac{-\Gamma_2 - iQ}{2\pi i} \ln\left(Z_1 - \frac{1}{\rho}\right) \tag{2.5}$$

Le calcul se simplifie grâce au fait que la valeur du paramètre ρ est proche de l'unité. Dans le cas donné nous obtiendrons l'écoulement dans le plan du cercle qui est indiqué au figure 1. Le potentiel complexe de cet écoulement sera:

$$\Phi(\theta_1) = \frac{\Gamma_1}{2\pi}\theta_1 - \frac{Q}{\pi} \ln\sin\frac{\theta_1}{2} = \frac{V_1 t \cos\alpha_1}{\pi}\left(\operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \frac{\theta_1}{2} - \ln\sin\frac{\theta_1}{2}\right) \tag{2.6}$$

La dérivée du potentiel de la vitesse sur le cercle sera:

$$\frac{d\Phi}{d\theta_1} = \frac{\Gamma_1}{2\pi} - \frac{Q}{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\theta_1}{2} = \frac{V_1 t \cos\alpha_1}{2\pi}\left(\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{ctg}\frac{\theta_1}{2}\right) \tag{2.7}$$

L'équation (2.7) est égale à zéro seulement dans le cas où:

$$\theta_1 = \theta_{10} = \pi - 2\alpha_1 \tag{2.8}$$

L'équation (2.8) détermine le point d'arrêt sur le cercle auquel se transcrit le point d'arrêt amont du profil. Le point d'arrêt en aval du profil se transcrit au point $Z_1 = 1$.

2.2. *Détermination de la fonction de transcription.* Le potentiel dans le plan du cercle est donné par l'équation (2.6), tandis que le potentiel de la vitesse le long du profil est présenté comme suit:

$$\Phi(s) = \int_0^s V(s)\, ds \qquad (s_{01} = 0) \tag{2.9}$$

En comparant des valeurs correspondantes des potentiels de la vitesse dans les deux plans, et vu l'équation.

$$\Phi(s) = \Phi(\theta_1) - \Phi(\theta_{01}) \tag{2.10}$$

la fonction de représentation est alors déterminée $\theta = \theta(s)$. Etant donné que la distribution de la vitesse est inconnue, nous pouvons supposer en première approximation la fonction $V(s)$, en utilisant les différentes méthodes approximatives.

2.3. *Détermination de la circulation dans le plan de la grille du profil.* On ne peut pas obtenir les valeurs exactes de la distribution de vitesse $V(s)$ aux environs du point d'arrêt aval et cela représente le défaut d'un tel procédé. Pour ces raisons on applique la représentation inverse, c'est-à-dire le point d'arrêt aval se transcrit au point $\theta = \theta_{10}$, tandis que le point d'arrêt amont se transcrit au point $Z_1 = 1$.

L'angle α_2 de la vitesse à la sortie de la grille, sous conditions posées par une telle tâche, se détermine en utilisant les équations de continuité et de circulation.

$$\alpha_2 = \operatorname{arctg}\frac{\Gamma + V_1 t \sin\alpha_1}{V_1 t \cos\alpha} \qquad \Gamma = \int_L V(s)\, ds \tag{2.11}$$

3. *Procédé numérique pour la solution d'une tâche posée.* La tâche, théoriquement posée de la façon exposée ici, a été traitée, jusqu'à présent, à l'aide des procédés graphoanalitiques (vu qu'il n'existait pas une forme analitique pour les fonctions des divers paramètres [1]. Tout cela a conditionné le développement des différentes méthodes pour calculer les valeurs des grandeurs en question [3]. Les défauts de ces procédés sont multiples. Avant tout (et vu que ces procédés graphoanalitiques sont approximatifs) l'exactitude du calcul est discutable, c'est-à-dire nous n'avons pas de critères d'exactitude et très souvent les valeurs des paramètres particuliers sont approximatives. Au cours des calculs il apparait très souvent une dissipation de valeurs des grandeurs calculées. Tracement d'une courbe lisse entre les points, ainsi dissipés, amène à la grande divergence et au arrondissement du résultat. A part de cela, un calcul ainsi fait, est valable seulement pour un cas donné d'écoulement de la grille. Pour les divers cas d'écoulements et de géométries différents de la grille — les calculs doivent être faits à nouveau.

En tenant compte de tout, l'auteur aborde un procédé numérique pour la solution d'une tâche donnée et fait son adaptation pour le calcul sur les calculateurs électroniques. On utilise encore, des méthodes de la mathématique numérique pour calculer certaines grandeurs.

3.1. *Calcul du potentiel de la vitesse le long du contour du profil.* Vu que la fonction $V = V(s)$ n'est pas définie mathématiquement par une fonction, et pour qu'elle soit adaptée au calcul numérique, nous devons la faire approximative en la représentant par une autre fonction connue. Tenant compte de la forme de la fonction $V(s)$ d'une part, et des calculs numériques d'autre, il est opportun que la courbe $V(s)$ soit approximativement représentée par un polynome.

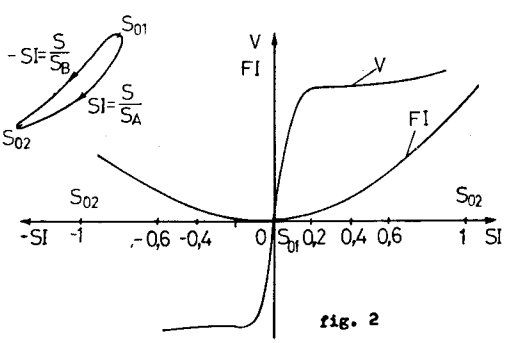

Fig. 2

La courbe $V(s)$ est approximativement représentée par une équation de type Lagrange de 2ème degré. Le potentiel de la vitesse défini à l'aide de l'équation (2.9) est calculé, sur le ségment donné, comme l'intégrale de la vitesse.

$$\Phi(s) = \left\{ \frac{V(s_0)}{(s_0 - s_1)(s_0 - s_2)} \left[\frac{s^3 - s_0^3}{3} - \frac{s_1 + s_2}{2}(s^2 - s_0^2) + s_1 s_2 (s - s_0) \right] + \cdots \right\} \tag{3.1}$$

Les valeurs données de la vitesse ne doivent pas être équidistantes, c'est-à-dire la densité des points donnés est choisie en fonction de la forme de la courbe donnée

$VU(I)$. Les calculs s'effectuent sur le ségment jusqu'à la moitié de la distance des noeuds voisins d'interpolation.

3.2. *Détermination de la fonction de représentation.* Pour chaque point arbitraire s, la solution de l'équation (2.10) donne le point qui correspond à la représentation conforme sur le cercle θ. En appliquant le même procédé pour d'autres points choisis d'avance, nous obtenons leurs images θ sur le cercle, c'est-à-dire, la fonction de représentation conforme $\theta=\theta(s)$.

Les solutions de l'équation transcendantale (2.10) nous obtenons par une méthode numérique. En ce cas, les solutions sont cherchée par la méthode de sécante, i.e. la méthode, soi-disant, «regula falsi».

3.3. *Calcul de la dérivée de la fonction de représentation.* Pour la fonction de transcription $\theta=\theta(s)$ nous n'avons pas une forme analitique, mais nous connaissons ses valeurs dans les points particuliers (en forme de tableau — synoptique). Pour qu'elle soit adoptée au calcul numérique, nous la représentons approximativement pour un ségment donné, en forme du polynome Lagrange. En ce cas là, l'expression pour la première dérivée de la fonction donnée est suivante:

$$\theta'(s)=\theta(s_0)\frac{2s-(s_1+s_2)}{(s_0-s_1)(s_0-s_2)}+\theta(s_1)\frac{2s-(s_0+s_2)}{(s_1-s_0)(s_1-s_2)}+ \tag{3.2}$$
$$+\theta(s_2)\frac{2s-(s_0+s_1)}{(s_2-s_0)(s_2-s_1)}$$

Calcul numérique de la dérivée $d\theta/ds$ nous effectuons alors pour chaque point désiré s le long du profil.

3.4. *Procédé itératif pour calcul de la vitesse dans les points particuliers au long du profil.* Pour calculer la vitesse dans les points particuliers nous utilisons la formule (2.4). Le procédé numérique pour la détermination des paramètres $\theta(s)$ et $d\theta/ds$ est déjà expliqué. La vitesse d'écoulement $V(\theta)=d\Phi/d\theta$ sur le cercle est définie par l'équation (2.7). Pour le calcul numérique de la circulation Γ nous utilisons les valeurs du potentiel $\Phi(s)$, déjà calculées autour des points d'arrêt amont et aval. En additionnant les valeurs de l'intégrale de la vitesse, déjà calculées dans les points de liaison, on obtient la valeur de la circulation au long du profil.

Au moyen de la valeur calculée de la circulation nous trouvons la valeur exacte de l'angle α_2 de la vitesse à la sortie de la grille. Pourtant en première approche, la valeur de l'angle doit être supposée. A cause de cela on effectue le procédé itératif pour la détermination de l'angle α_2 en dépendence de la circulation, déjà calculée dans les opérations particulières itératives.

4. *Sur un exemple calculé par la méthode exposée.* A la base du procédé numérique, pour la solution d'un problème direct par la méthode de représentation conforme, exposé ci-avant, on a composé un programme de calcul numérique sur le calculateur. Le programme est d'un caractère général, c' est-à-dire, la forme du programme permet le calcul numérique de la tâche posée pour les grilles de géométrie différante et pour les conditions différantes d'écoulement autour de la grille.

Comme le critère de la terminaison de l'opération itérative sert la coïncidence de la distribution de la vitesse calculée (c'est-à-dire de circulation Γ) au long du profil avec la précision choisie. Cela veut dire aussi la coïncidence de la valeur calculée

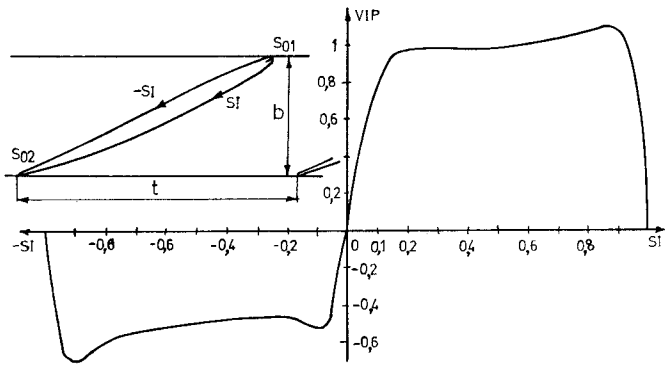

Fig. 3

de l'angle α_2 de la vitesse à la sortie de la grille avec la précision par rapport à ce critère est prise comme une grandeur à l'entrée du programme.

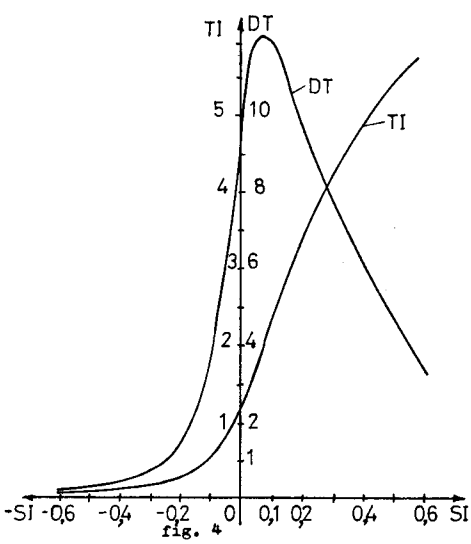

Fig. 4

Comme exemple du calcul par l'intérmediaire du programme exposé on donne des résultats du calcul pour une grille d'une roue de la turbine hidraulique, qui porte la désignation *PLG*—21—2. La géométrie de la grille du profil, pour une coupe centrale de la roue, est donnée par le fig. 3.

A la base des résultats obtenus par la dernière (troisième) opération itérative, on a dessiné la forme de la courbe de la distribution de vitesse au long du profil, voire fig. 3. A la fig. 4 on a donné aussi les courbes de la fonction de représentation $TI(I)$ et de sa dérivée $DT(I)$ autour du point d'arrêt amont du profil (résultats de la dernière opération itérative).

Le programme composé pour le calcul numérique est exprimé par FORTRAN. Les testes du programme et tous les calculs numériques l'auteur a effectué au Centre calculatrice du Faculté Electromécanique à Skopje.

LITERATURE

[1] Stepanov G. O., *Gidrodinamika rešetok turbomašin*, 1962 Moskva.
[2] Kirillov I. I., *Teorija turbomašin*, 1972 Leningrad.
[3] Krsmanović Lj., Doktorska disertacija, 1966 Beograd.
[4] Popovski P., Magistarski rad, 1974. Beograd.

Mašinski fakultet
Karpoš II
91000 Skopje