PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 22 (36) 1977, pp. 119—126

COMPLÉMENTS AUX TRAITÉS DE KAMKE ET DE MURPHY. III. QUELQUES CRITÈRES SUFFISANTS DE L'INTÉGRABILITÉ EFFECTIVE DE L'ÉQUATION DE RICCATI AVEC DEUX COEFFICIENTS ARBITRAIRES

Andrzej Kapcia

(Reçu le 13 Janvier 1977)

Résumé. Dans ce travail on donne des remarques sur la méthode de l'obtention de l'équation de Riccati effectivement intégrable avec deux coefficients arbitraires et le troisième dépendant de ces deux et d'une fonction arbitraire. On formule six conditions suffisantes d'intégrabilité de ladite équation. On cite quelques classes d'équations de Riccati qui sont des généralisations des classes particulières de Kamke et de Murphy. Elles sont effectivement intégrables d'après la connaissance de leurs solutions particulières. On montre la possibilité de faire le déplacement des résultats obtenus sur l'équation du second ordre.

Introduction

L'équation de Riccati

$$y' = a(x) y^2 + b(x) y + c(x), \tag{0.1}$$

où $a(x) \not\equiv 0$, $a(x)$, $b(x)$ et $c(x) \in C$ dans l'intervalle X, a été l'objet de nombreuses recherches à différents points de vue. Beaucoup d'auteurs ont donné des critères d'intégrabilité effective de l'équation (0.1). Quelques forts résultats ont été donnés en vertu de la théorie de transformation — par exemple dans les travaux [5], [6], et [7]. On a donné des transformations qui réduisent ladite équation à sa forme canonique

$$y' = \mp y^2 + g(x), \tag{0.2}$$

et inversement l'équation (0.2) à l'équation (0.1), v. par exemple [4] p. 83 et [5] p_p. 130—132. On sait aussi, que ni l'équation (0.1) ni l'équation (0.2) ne peut pas résoudre généralement par quadratures.

D'autre part, il est bien connu le théorème qui donne toujours la possibilité de l'intégration effective des équations (0.1) et (0.2) dans le cas, lorsque une solution particulière est connue (v. par exemple [1] p. 22, [2] p. 45, [3] p. 41, [4] p. 86 et [9] p. 128).

Le but principal de cette note-ci est de donner des classes — possiblement larges de solutions particulières de l'équation (0.1) avec deux coefficients arbitraires qui sont effectivement intégrables en profitant de ledit théorème. Nous remarquons encore que l'équation de Riccati est liée avec l'équation linéaire du second ordre, alors on peut traduire tous les résultats obtenus pour l'équation de Riccati à ladite équation du second ordre.

Dans nos articles qui succédèrent à ce travail, nous donnerons les résultats obtenus pour l'équation du deuxième ordre en confrontation avec les résultats publiés dans les traités de Kamke [1] ou [2] et de Murphy [8], ainsi que de nombreux cas de l'application de la méthode générale de l'obtention des équations de Riccati effectivement intégrables, signalée dans ce travail.

Ici nous donnerons certains cas particuliers obtenus à l'aide de la méthode présentée ci-dessous.

J'exprime mes remerciments à M-me B. Waligóra qui a bien voulue vérifier une partie de nos calculs nécessaires pour écrire cette note.

La pensée d'écrire de ce travail a été née pendant mon séjour scientifique à l'Université de Beograd en 1975.

1. Remarques sur la méthode de l'obtention des classes de l'équation de Riccati effectivement intégrables

Notre idée est suivante. L'équation (0.1) peut être écrite par exemple en forme

$$y' - b(x)y = a(x)y^2 + c(x). \tag{1.1}$$

Posons $y' - b(x)y = \mu(x)$. D'ici et de (1.1), nous avons $a(x)y^2 + c(x) = \mu(x)$, où $\mu(x)$ est pour le moment une fonction inconnue. De ces dernières formules nous obtenons l'équation intégrale non-linéaire en forme

$$\begin{aligned} a(x)\exp\left(2\int b(x)\,dx\right)\left\{\int\left(\mu(x)\exp\left(-\int b(x)\,dx\right)\right)dx + K\right\}^2 - \mu(x) + \\ + c(x) = 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

C'est une condition qui doit satisfaire la fonction $\mu(x)$, pour que de nos substitutions on peut obtenir des solutions particulières.

On peut considérer l'équation (1.2) en quatre cas dépendamment de trois fonctions données. Dans les deux cas c'est une équation intégrale (fonctions inconnues: 1) $\mu(x)$, 2) $b(x)$), et dans les deux cas restants c'est une équation algébrique (fonctions inconnues: 3) $a(x)$, 4) $c(x)$).

Dans le cas premier, il ne peut pas résoudre effectivement l'équation (1.2) par rapport à la fonction $\mu(x)$ généralement, mais dans les trois qui restent, cela est possible.

A titre d'exemple considérons le cas 4). Il est évident, que dans ce cas on peut définir par la relation (1.2) un des coefficients de l'équation de Riccati par deux restants et la fonction $\mu(x)$. En le faisant, nous obtenons la classe d'équations:

$$
\begin{aligned}
y' &= a(x)y^2 + b(x)y + \mu(x) - \\
(1.3) \qquad & - a(x)\exp\Big(2\int b(x)\,dx\Big)\Big\{\int \mu(x)\exp\Big(-\int b(x)\,dx\Big)dx + K\Big\}^2,
\end{aligned}
$$

où K-const. arbitraire. Profitant de notre substitution nous pouvons obtenir sa solution particulière sous la forme

$$(1.4) \qquad y_0 = \exp\Big(\int b(x)\,dx\Big)\Big\{\int\Big(\mu(x)\exp\Big(-\int b(x)\,dx\Big)\Big)dx + K\Big\}.$$

De cela et de nos remarques précédents, résulte que nous avons obtenu une classe de l'équation de Riccati effectivement intégrable avec deux coefficients arbitraires et le troisième exprimé par ces deux et une fonction arbitraire $\mu(x)$.

L'équation (1.3) est une généralisation d'un type de l'équation de Riccati résolu par N. H. Abel (v. [1] p. 23) qui l'on obtient en posant dans (1.3) $\mu(x)\equiv 0$. De (1.4) nous obtenons sa solution particulière.

Nous remarquons encore, qu'en écrivant l'équation (0.1) dans autre forme, mais de telle manière qu'à chaque sa part il y a deux ses termes, nous pouvons obtenir d'autres équations intégrales ou différentielles, grâce auxquelles on peut déterminer d'autres formes des coefficients de l'équation (0.1) — différentes de celles citées plus haut.

D'autre part, si nous supposons la forme de la fonction $\mu(x)$ nous pouvons obtenir des conditions sur les coefficients.

Dans ce travail nous nous bornerons à présenter tous tels cas dans lesquels la fonction $\mu(x)$ est égale à zéro dans l'intervalle X. Nous remarquons que dans les traités de Kamke [1] et [2] et de Murphy [8] il y a beaucoup d'équations de Riccati, qui sont des cas très particuliers des équations que nous donnerons dans ce travail à l'exception d'un cas résolu par N. H. Abel.

2. Cas $y' - a(x)y^2 = 0$ et $b(x)y + c(x) = 0$

Théorème 2.1. *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction*

$$(2.1) \qquad y_0 = -\Big(\int a(x)\,dx + K\Big)^{-1},$$

où K-const. arbitraire, soit une solution particulière de l'équation de Riccati (0.1) *avec les coefficients $a(x)$, $b(x)$ et $c(x) \in C$ et $a(x) \neq 0$ dans l'intervalle X, est que les fonctions $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$ satisfassent à la condition*

$$(2.2) \qquad b(x)\Big(\int a(x)\,dx + K\Big)^{-1} - c(x) = 0$$

pour $x \in X$.

Démonstration. Nécessité. Si la fonction (2.1) est la solution de l'équation (0.1) nous avons l'identité

$$a(x)\Big(\int a(x)\,dx + K\Big)^{-2} = a(x)\Big(\int a(x)\,dx + K\Big)^{-2} - b(x)\Big(\int a(x)\,dx + K\Big)^{-1} + c(x)$$

dans l'intervalle X. D'ici résulte la condition (2.2).

Suffisance. Si la condition (2.2) est satisfaite, alors par exemple le coefficient $c(x)$ est défini par la formule

$$c(x) = b(x)\left(\int a(x)\,dx + K\right)^{-1}.$$

D'ici, et de (0.1) nous obtenons l'équation

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + b(x)\left(\int a(x)\,dx + K\right)^{-1}.$$

Il est évident, que la fonction (2.1) satisfait cette équation dans l'intervalle X.

On voit que cette démonstration est très facile. Donc, nous omettrons les démonstrations des théorèmes que nous donnerons dans ce travail car elles sont analogiques.

Théorème 2.2. *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction*

$$y_0 = -c(x)/b(x) \tag{2.3}$$

soit une solution particulière de léquation de Riccati (0.1) *avec les coefficients* $a(x) \in C$, $b(x)$ *et* $c(x) \in C^1$ *et* $b(x)c(x) \neq 0$ *dans l'intervalle* X, *est que les fonctions* $a(x)$, $b(x)$ *et* $c(x)$ *satisfassent à la condition*

$$a(x) - (b(x)/c(x))'_x = 0 \tag{2.4}$$

pour $x \in X$.

Le corollaire suivant résulte des théorèmes 2.1. et 2.2:

Corollaire 2.1. *Les sous-classes de la classe de l'équation de Riccati* (0.1) *en forme:*

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + b(x)\left(\int a(x)\,dx + K\right)^{-1}, \tag{2.5}$$

$$y' = a(x)y^2 + c(x)\left(\int a(x)\,dx + K\right)y + c(x), \tag{2.6}$$

$$y' = \left(\frac{b(x)}{c(x)}\right)'_x y^2 + b(x)y + c(x) \tag{2.7}$$

sont effectivement intégrables (*K-const. arbitraire*). *La solution particulière dans les cas* (2.5) *et* (2.6) *a la forme* (2.1), *et dans le cas* (2.7) *la forme* (2.3).

Les équations (2.5), (2.6) et (2.7) sont des généralisations des équations (1.16) de Kamke [1] et (51) de Murphy [8], mais l'équation (2.5) on peut obtenir de l'équation (7.12) du travail [10] p. 82, en posant $f(x) \equiv 1$.

3. Cas $y' - b(x)y = 0$ et $a(x)y^2 + c(x) = 0$

Lemme 3.1. *Si la fonction*

$$y_0 = if(x), \tag{3.1}$$

où i-unité imaginaire, $f(x)$-fonction réelle, $f(x) \in C^1$ dans l'intervalle X, est la solution de l'équation de Riccati (0.1) *avec la fonction $a(x) \in C^1$, alors les fonctions*

(3.2.1) $$y_{01} = f(x) \operatorname{tg}\left(\int a(x) f(x)\, dx\right)$$

et

(3.2.2) $$y_{02} = -f(x) \operatorname{ctg}\left(\int a(x) f(x)\, dx\right)$$

sont ses solutions particulières réelles.

Démonstration. D'après la forme de la fonction (3.1) et du fait que la fonction (3.1) est la solution de l'équation (0.1) résulte que les conditions

(3.3) $$f'(x) - b(x) f(x) = 0 \quad \text{et} \quad a(x) f^2(x) - c(x) = 0$$

sont satisfaites dans l'intervalle X. On sait que la substitution

(3.4) $$y = -u'/a(x)\, u$$

transforme l'équation (0.1) à l'équation correspondante du second ordre

(3.5) $$u'' - \frac{a'(x) + a(x) b(x)}{a(x)} u' + a(x) c(x) u = 0,$$

et qu'elle transforme chaque solution de l'équation de Riccati à la solution de l'équation du second ordre et inversement. En l'appliquant à la solution (3.1) nous obtenons la fonction complexe

(3.6) $$u_0 = \exp\left(-i \int a(x) f(x)\, dx\right),$$

qui d'après (3.3) est la solution de l'équation (3.5). (La const. d'intégration nous pouvons omettre.) On sait aussi, que ses solutions réelles ont maintenant les formes

(3.7) $$u_{01} = \cos\left(\int a(x) f(x)\, dx\right), \quad u_{02} = \sin\left(\int a(x) f(x)\, dx\right).$$

En profitant encore une fois de la substitution (3.4), et des solutions réelles (3.7) nous obtenons les solutions réelles de l'équation de Riccati (0.1) pour laquelle les conditions (3.3) sont satisfaites, sous les formes (3.2.1) et (3.2.2).

Nous remarquons que telle manière de la démonstration de ce lemme, donne la méthode de la construction des solutions réelles de l'équation de Riccati, quand sa solution imaginaire est connue.

Théorème 3.1. *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction*

(3.8) $$y_0 = K^* \exp\left(\int b(x)\, dx\right),$$

où $K^* = K$, K-const. arbitraire réelle (ou K^*-const. imaginaire pure: $K^* = iK$), $K \neq 0$, soit une solution particulière de l'équation (0.1) *dans laquelle $a(x)$, $b(x)$ et*

$c(x) \in C$, $a(x)\,c(x) < 0$ *(ou* $a(x)\,c(x) > 0$*) dans l'intervalle* X, *est que les fonctions* $a(x)$, $b(x)$ *et* $c(x)$ *satisfassent convenablement à la condition*

$$c(x) \pm K^2 a(x) \exp\left(2 \int b(x)\,dx\right) = 0 \tag{3.9}$$

pour $x \in X$. *(Le signe plus pour* K^* *réelle, le signe moins pour* K^* *imaginaire.)*

Remarque 3.1. Si K^* est imaginaire $K^* = iK$ et $a(x)\,c(x) > 0$, alors d'après le lemme 3.1, les solutions réelles ont les formes

$$y_{01} = K \exp\left(\int b(x)\,dx\right) \operatorname{tg}\left(K \int \left(a(x) \exp\left(\int b(x)\,dx\right) dx\right)\right), \tag{3.8.1}$$

$$y_{02} = -K \exp\left(\int b(x)\,dx\right) \operatorname{ctg}\left(K \int \left(a(x) \exp\left(\int b(x)\,dx\right) dx\right)\right), \tag{3.8.2}$$

où K-const. réelle.

Les conditions (3.9) ont été données par N. H. Abel (v. [1] p. 23) Les solutions générales des équations de Riccati correspondantes, qu'on obtient à l'aide des solutions particulières, sont identiques avec celles obtenues par Abel. Nous remarquons encore que dans le chapitre I nous avons donné une généralisation des conditions (3.9).

Théorème 3.2. *La condition nécessaire et suffisante pour que les fonctions*

$$y_0 = (-c(x)/a(x))^{1/2}, \tag{3.10.1}$$

$$y_0 = -(-c(x)/a(x))^{1/2} \tag{3.10.2}$$

soient des solutions particulières de l'équation (0.1) *dans laquelle* $a(x)$, $c(x) \in C^1$, $b(x) \in C$ *et* $a(x)\,c(x) \neq 0$ *dans l'intervalle* X, *est que les fonctions* $a(x)$, $b(x)$ *et* $c(x)$ *satisfassent à la condition*

$$b(x) - \frac{a(x)}{2\,c(x)} \left(\frac{c(x)}{a(x)}\right)'_x = 0 \tag{3.11}$$

dans l'intervalle X.

Remarque 3.2. Si $a(x)\,c(x) < 0$ les solutions (3.10.1) et (3.10.2) sont réelles; si $a(x)\,c(x) > 0$ les solutions (3.10.1) et (3.10.2) sont imaginaires. Dans ce dernier cas les solutions réelles ont les formes

$$y_{01} = (c(x)/a(x))^{1/2} \operatorname{tg}\left(\int (a(x)\,c(x))^{1/2}\,dx\right), \tag{3.10.3}$$

$$y_{02} = -(c(x)/a(x))^{1/2} \operatorname{ctg}\left(\int (a(x)\,c(x))^{1/2}\,dx\right). \tag{3.10.4}$$

Cela résulte de notre lemme 3.1.

Corollaire 3.1. *Les sous-classes de la classe de l'équation de Riccati* (0.1) *en forme:*

$$y' = a(x)\,y^2 + b(x)\,y \mp K^2 a(x) \exp\left(2 \int b(x)\,dx\right), \tag{3.12}$$

$$y' = \mp c(x)\left(K^{-2} \exp\left(-2 \int b(x)\,dx\right)\right) y^2 + b(x)\,y + c(x), \tag{3.13}$$

$$y' = a(x)\,y^2 + \frac{a(x)}{2\,c(x)} \left(\frac{c(x)}{a(x)}\right)'_x y + c(x), \tag{3.14}$$

sont effectivement intégrables (K-const. arbitraire réelle, $K \neq 0$). *Les solutions particulières réelles dans les deux premiers cas ont les formes:* (3.8) *si* $a(x)\,c(x)<0$, *et* (3.8.1), (3.8.2) *si* $a(x)\,c(x)>0$ *dans l'intervalle X; et dans le dernier cas les formes:* (3.10.1) *et* (3.10.2) *si* $a(x)\,c(x)<0$; (3.10.3) *et* (3.10.4) *si* $a(x)\,c(x)>0$ *dans l'intervalle X.*

Nous remarquons que par exemple: pour l'équation (3.14) l'expression $a(x)\,c(x)$ peut changer son signe. Dans ce cas nous construisons successivement la solution générale dans les intervalles de même signe.

Les formes particulières des équations (3.12), (3.13) et (3.14) ont les équations suivantes de Kamke [1] ou [2]: (1.97), (1.98), (1.102), (1.106), (1.110), (1.163), (1.180), (1.201); et de Murphy [8]: (167), (170), (171), (178), (184) pour $a=(n-m)/2$, (249), (271) dans le cas $b=-1$, (272) dans le cas $b=-2$, (324) dans le cas $k=-1/2$, (371). Quelques d'elles ont été résolues par d'autres méthodes — sans la connaissance de leurs solutions particulières par exemple: (1.97), (1.98), (1.106), (167), (170), (171).

4. Cas $y'-c(x)=0$ et $a(x)\,y^2+b(x)\,y=0$

Théorème 4.1. *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction*

$$y_0=\int c(x)\,dx+K, \tag{4.1}$$

où K-const. arbitraire, soit une solution particulière de l'équation (0.1) *dans laquelle* $a(x)$, $b(x)$ *et* $c(x)\in C$ *et* $a(x)\,c(x)\not\equiv 0$ *dans l'intervalle X, est que les fonctions* $a(x)$, $b(x)$ *et* $c(x)$ *satisfassent à la condition*

$$a(x)\left(\int c(x)\,dx+K\right)+b(x)=0 \tag{4.2}$$

pour $x\in X$.

Théorème 4.1. *La condition nécessaire et suffisante pour que la fonction*

$$y_0=-b(x)/a(x) \tag{4.3}$$

soit une solution particulière de l'équation (0.1) *dans laquelle* $a(x)$, $b(x)\in C^1$, $c(x)\in C$ *et* $a(x)\neq 0$ *dans l'intervalle X, est que les fonctions* $a(x)$, $b(x)$ *et* $c(x)$ *satisfassent à la condition*

$$c(x)+\left(\frac{b(x)}{a(x)}\right)'_x=0 \tag{4.4}$$

pour $x\in X$.

Le corollaire suivant résulte des théorèmes 4.1 et 4.2:

Corollaire 4.1. *Les sous-classes de la classe de l'équation de Riccati* (0.1) *en forme:*

$$y'=a(x)\,y^2-\left(a(x)\left(\int c(x)\,dx+K\right)\right)y+c(x), \tag{4.5}$$

$$y'=-b(x)\left(\int c(x)\,dx+K\right)^{-1}y^2+b(x)\,y+c(x), \tag{4.6}$$

$$y'=a(x)\,y^2+b(x)\,y-\left(\frac{b(x)}{a(x)}\right)'_x, \tag{4.7}$$

où K-const. arbitraire, sont effectivement intégrables. La solution particulière dans les cas (4.5) *et* (4.6) *a la forme* (4.1) *et dans le cas* (4.7) *la forme* (4.3).

Les formes particulières des équations (4.5), (4.6) et (4.7) ont les équations suivantes du traité de Kamke [1] ou [2]: (1.20), (1.21), (1.27), (1.28); et du traité de Murphy [8]: (46), (49), (62), (66).

Dans ce travail nous avons donné 28 équations des traités de Kamke et de Murphy (où 4 avec des restrictions), qui sont des cas particuliers des équations ici citées, mais certaines d'elles sont les mêmes.

Remarquons encore que la solution générale de l'équation de Riccati (0.1), lorsque sa solution particulière est connue, est donnée par la formule

$$y = y_0 + \exp \int (2\,a\,y_0 + b)\,dx \left\{ C - \right. \tag{4.8}$$
$$\left. - \int \left(a \exp \int (2\,a\,y_0 + b)\,dx \right) dx \right\}^{-1},$$

où $a \equiv a(x)$, $b \equiv b(x)$, $y_0 \equiv y_0(x)$ — la solution particulière, C-const. arbitraire (v. p. e.: [3] p. 41). Les solutions générales des classes d'équations citées dans notre travail, on obtient donc à l'aide de la formule (4.8), en posant convenablement leurs coefficients et leurs solutions particulières.

Nous présenterons aussi toutes les équations différentielles du second ordre effectivement intégrables par ladite méthode dans un autre travail.

LITTERATURE

[1] E. Kamke, *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen I, Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Leipzig 1959.

[2] Е. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Москва 1965.

[3] E. Kamke, *Differentialgleichungen I*, Leipzig 1962.

[4] N. M. Matwiejew, *Metody całkowania równań różniczkowych zwyczajnych*, Warszawa 1970.

[5] D. S. Mitrinović, *Quelques propositions relatives à l'équation différentielle de Riccati*, Acad. Royale Serbe, Bull. Acad. Sc. math., nat., (A) Sc. math. phys. 6 (1939), pp. 121—156.

[6] D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Compléments au traité de Kamke*. XII. *Des critères d'intégrabilité de l'équation différentielle de Riccati*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № 175 — № 179 (1967), pp. 15—21.

[7] D. S. Mitrinović, P. M. Vasić, *Dopune Kamkeovom delu*. XIII. *O kriterijumima integrabilnosti Riccatieve jednačine*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № 210 — № 228, (1968), pp. 43—48.

[8] G. M. Murphy, *Ordinary Differential Equations and Their Solutions*, Princeton, New Jersey, New York 1960.

[9] W. Nikliborc, *Równania różniczkowe*, Część I, Warszawa-Wrocław 1951,

[10] Н. Х. Розов, Л. М. Беркович, А. М. Эйшинский, *О самосопряженных и приводимых линейных дифференциальных уравнениях высших порядков и о некоторых уравнениях второго порядка, интегрируемых в конечном виде*, Univ. Beograd, Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. № 230 — № 241 (1968), pp. 61—87.

INSTITUT MATHÉMATIQUE
L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, 42—202 CZĘSTOCHOWA, Pologne