PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 22 (36) 1977, pp. 95—108

О ЛИНЕЙНЫХ МЕТОДАХ СУММИРОВАНИЯ РЯДОВ ФУРЬЕ, КОЭФФИЦИЕНТЫ КОТОРОГО ЯВЛЯЮТСЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ ДВУХ ФАКТОРОВ

Миодраг Ж. Ивович

(Сообщено 5 марта 1976)

1. Пусть $f(x) \in C$ (C-пространство непрерывных периода 2π функций) и $U_n(f;\ x)$ тригонометрический многочлен

$$U_n(f;\ x) = \frac{a_0 \lambda_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{1}$$

где $a_0,\ a_k,\ b_k$ коэффициенты Фурье функции $f(x)$ и $\{\lambda_k^n\}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ n=1,\ 2,\ \ldots)$ треугольная матрица.

λ-метод (метод который определяется при помощи (1)) будем называть F-перманентным (или методом типа F) если суммирует ряд Фурье любой непрерывной функции $f(x)$ в каждой точке x, т. е. если

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f:\ x) = f(x) \tag{2}$$

для произвольного x и любой функции $f(x) \in C$.

Для того чтобы финитный (конечный) λ-метод суммирования заданый треугольной матрицей $\{\lambda_k^n\}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ n=1,\ 2,\ ,\ .\ .)$ являлся F-перманентным, неопходимо и достаточно выполнение условий:

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_k^n = 1 \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ ,\ .\ ,). \tag{A}$$

$$\| U_n^\lambda \| = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\lambda_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \cos kt \right| dt = O(1) \quad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{B}$$

Так как условие (A) очень простое, а наоборот условие (B), которое обозначает что норма ограниченна для всех $n=1,\ 2,\ \ldots,$ совершенно ненаглядно то условие (B) было предметом изучения многих математиков (Фейер, С, М. Никольский, Б. Надь, Й. Карамата, М. Томич, С. Б. Стечкин, А. В. Ефимов, А. Ф. Тиман, С. А. Теляковский и др.).

Чаще всего в этих исследованиях изучаются достаточные условия для того чтобы выполнялось (B), так как точное вычисление нормы $\|U_n^\lambda\|$ возможно лишь в специальных случаях.

В настоящей работе изучаются достаточные условия для ограниченности нормы $\|U_n^\lambda\|$, $n=1, 2, \ldots$ (условие (B)) косинусного (чётного) тригонометрического многочлена, коэффициенты которого являются произведениями, т. е. $\lambda_k^n=\alpha_k^n\beta_k^n$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n;\ n=1, 2, \ldots)$. При помощи этих результатов о ограниченности нормы и предполагая что условие (A) имеет место, мы докажем некоторые теоремы в которых даются достаточные условия для того чтобы λ-метод суммирования являлся F-перманентным.

Доказывается что из $\|U_n^\alpha\|=O(1)$ и $\|U_n^\beta\|=O(1)$, $n=1, 2, \ldots$ следует $\|U_n^\lambda\|=O(1)$, $n=1, 2, \ldots$. В работе мы будем интересоваться случаями когда одна из норм $\|U_n^\alpha\|$ или $\|U_n^\beta\|$ неограниченна, В качестве примера мы покажем что λ-метод с коэффициентами $\lambda_k^n=\alpha_k^n\beta_k^n$, где

$$\alpha_k^n=1-\frac{k}{n\ln n},\quad \beta_k^n=\cos\frac{k\pi}{2n}\quad (k=0, 1, 2, \ldots, n;\ n=1, 2, \ldots),$$

имеет норму $\|U_n^\beta\|$ ограниченную, норму $\|U_n^\alpha\|$ неограниченну, а норму $\|U_n^\lambda\|=\|U_n^{\alpha\beta}\|$ ограниченну для всех n.

Об этом λ-методе и ему подобных, мы будем говорить положе в работе, где и покажем что для некоторых из их невазможно применение некоторых из уже известных результатов, а если применение и возможно, то оно будет более сложным чем применение результатов настоящей работы.

2. В начале сформулируем некоторые из известных результатов.

С. М. Никольский [1] доказал что если последовательность $\lambda_0^n, \lambda_1^n, \lambda_2^n, \ldots, \lambda_n^n$, 0 выпукла или вогнута, т. е, если

$$\Delta^2\lambda_k^n=\lambda_k^n-2\lambda_{k+1}^n+\lambda_{k+2}^n\quad (k=0, 1, 2, \ldots, n-1;\ n=1, 2, \ldots)$$

постоянного знака, то для выполнения условия (B) неопходимо и достаточно выполнение условий:

$$(\alpha)\qquad \lambda_k^n=O(1)\qquad (k=0, 1, 2, \ldots, n;\ n=1, 2, \ldots),$$

$$(\beta)\qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k^n}{n-k+1}=O(1)\qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Если кроме того выполнено и условие (A), то λ-метод будет F-перманентным.

Б. Надь [2] обобщил результат С. М. Никольского не предполагая выпуклость (вогнутость) последовательности λ_k^n. Им показано что достаточным условием для того чтобы λ-метод был методом типа F является (A) и

$$(\gamma)\qquad \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\ln\frac{n}{n-k}\,|\Delta^2\lambda_k^n|=O(1)\qquad (n=1, 2, \ldots).$$

Й. Карамата и М. Томич [3] доказали что условия (A), (α) и (β) С. М. Никольского вместе с условием

$$\sum_{k=0}^{n-2} \theta_k^n \left| \Delta^2 \lambda_k^n \right| = O(1) \qquad (n=1,\ 2\ \ldots), \tag{3}$$

где

$$\theta_k^n = \begin{cases} (n-k) \ln \dfrac{n}{n-k} & \text{для} \quad 0 \leqslant k \leqslant n - \sqrt{n}, \\ (n-k) \ln n - k & \text{для} \quad n - \sqrt{n} \leqslant k \leqslant n-2, \end{cases}$$

достаточны для того чтобы λ-метод являлся F-перманентным. Этот результат обобщает результаты С. М. Никольского и Б. Надя.

М. Томичем [4] доказано что если последовательность $\lambda_k{}^n$ ($k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n;\ n=1,\ 2, \ldots;\ \lambda_0^n = 1,\ \lambda_k^n = 0,\ k > n$) квази-выпукла, т. е.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left| \Delta^2 \lambda_k^n \right| = O(1) \qquad (n=1,\ 2, \ldots),$$

то для того чтобы норма

$$\left\| \lambda_n^\lambda \right\| = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^n \cos kt \right| dt = O(1), \qquad n=1,\ 2, \ldots,$$

(была ограниченной), неопходимо и достаточно что

$$\lambda_n^n \ln n = O(1), \qquad n \to \infty.$$

Если выполнено и условие (A), то λ-метод является F-перманентным.

Дальнейщие обобщения в этом направлении исследовались А. В. Ефимовым и С. А. Теляковским.

Так как эти условия в некоторых случаях являются довольно сложным, то задачей настоящей работы и будет изучение новых методов, которые в уже известных, а также и в новых случаях дают возможность просто устанавливать будет ли λ-метод F-перманентным, где коэффициенты λ_k^n имеют вид $\lambda_k^n = \alpha_k^n \beta_k^n$.

3. В теоремах настоящей работы утверждаются достаточные условия об ограничености нормы $\left\| U_n^\lambda \right\|$, $n=1,\ 2, \ldots$, а также и достаточные условия чтобы λ-метод являлся F-перманентным.

В начале мы докажем следующий результат:

Пусть $\lambda_k^n = \alpha_k^n \beta_k^n$ ($k=0,\ 1,\ 2, \ldots, n;\ n=1,\ 2, \ldots$). Тогда

$$\left\| U_n^\lambda \right\| \leqslant \left\| U_n^\alpha \right\| \cdot \left\| U_n^\beta \right\|. \tag{4}$$

Это обозначает что из ограниченности норм $\|U_n^\alpha\|$ и $\|U_n^\beta\|$ следует ограниченность нормы $\|U_n^\lambda\|=\|U_n^{\alpha\beta}\|$ и если методы α и β F-перманентны то и $\alpha\beta$-метод F-перманентный. Этот результат можно обобщить и в случае когда одна из норм $\|U_n^\alpha\|$ и $\|U_n^\beta\|$ неограниченна.

Если обозначим

$$\varphi^\beta(m, n)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left|\frac{\beta_0^n}{2}+\sum_{k=1}^m \beta_k^n \cos kt\right|dt, \tag{5}$$

где при $m=n$, $\varphi^\beta(m, n)=\varphi^\beta(n, n)\equiv\|U_n^\beta\|$, $n=1, 2, \ldots$, тогда имеет место следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть* $\lambda_k^n=\alpha_k^n\beta_k^n$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n; n=1, 2, \ldots)$. *Тогда условия*

(I) $$\sum_{k=0}^{n-1}|\Delta\alpha_k^n|^{*}\varphi^\beta(k, n)=O(1) \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

(II) $$\alpha_n^n\varphi^\beta(n, n)=\alpha_n^n\|U_n^\beta\|=O(1) \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

достаточны для того чтобы $\|U_n^\lambda\|=O(1)$, $n=1, 2, \ldots$. *В случае выполнения и условия* (A), λ-*метод является* F-*перманентным.*

Из теоремы 1 следует что бывают случаи когда норма $\|U_n^\lambda\|$ ограниченна несмотря на то что $\|U_n^\beta\|$ неограниченна. Это возможно даже и в случаях когда $\varphi^\beta(m, n)$ неограниченна для всех $m\leqslant n=1, 2, \ldots$.

Если предположим что $\varphi^\beta(m, n)=O(1)$ для всех $m\leqslant n=1, 2, \ldots$, тогда из теоремы 1 вытекают следствия 1 и 2.

Следствие 1. *Пусть* $\lambda_k^n=\alpha_k^n\beta_k^n$ $(k=0, 1, 2, \ldots: n;\ n=1, 2, \ldots)$. *Тогда условия*

(I) $$\sum_{k=0}^{n-1}|\Delta\alpha_k^n|=O(1) \quad \text{и} \quad \alpha_n^n=O(1), \quad n=1, 2, \ldots,$$

(II) $$\varphi^\beta(m, n)=O(1) \text{ для всех } m\leqslant n=1, 2, \ldots$$

достаточны для того чтобы $\|U_n^\lambda\|=O(1)$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Следствие 2. *Пусть* $\lambda_k^n=\alpha_k^n\beta_k^n$ $(k=0, 1, 2, \ldots;\ n;\ n=1, 2, \ldots)$. *Тогда условия*

(I) $$\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)|\Delta^2\alpha_k^n|=O(1) \text{ и } n|\Delta\alpha_{n-1}^n|=O(1), \; n=1, 2, \ldots,$$

(II) $$\varphi^\beta(m, n)=O(1) \text{ для всех } m\leqslant n=1, 2, \ldots$$

достаточны для того чтобы $\|U_n^\lambda\|=O(1)$ $(n=1, 2, \ldots)$.

---

* $\Delta\alpha_k^n=\alpha_k^n-\alpha_{k+1}^n$

Если коеффициенты β_k^n выполняют несложные условия, то получается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\lambda_k^n=\alpha_k^n\,\beta_k^n$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ n=1,\ 2,\ \ldots)$. *Тогда условия*

(I) $$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\Delta\alpha_k^n\right|\ln(k+1)=O(1),\qquad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

(II) $$\alpha_n^n\ln(n+1)=O(1),\qquad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

(III) $$\beta_k^n=O(1),\ \sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\beta_k^n\right|=O(1)\ \text{для всех}\ m\leqslant n=1,\ 2,\ \ldots$$

достаточны для того чтобы $\left\|U_n^\lambda\right\|=O(1)$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$. *В случае выполнения и условия* (A), λ*-метод является* F*-перманентным.*

Так как при $m=n$, $\varphi^\beta(m,\ n)$ может быть ограниченным, а при $m<n$ необязательно ограниченным, то мы можем сформулировать теорему удобную в применениях.

Теорема 3. *Пусть* $\lambda_k^n=\alpha_k^n\,\beta_k^n$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ n=1,\ 2,\ \ldots)$. *Тогда*

(I) $$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\Delta\alpha_k^n\right|\ln(k+1)=O(1),\qquad \alpha_n^n=O(1),\qquad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

(II) $$\varphi^\beta(n,\ n)\equiv\left\|U_n^\beta\right\|=O(1),\qquad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

(III) $$\sum_{k=0}^{n}\left|\Delta\beta_k^n\right|=O(1),\qquad n=1,\ 2,\ \ldots,$$

достаточно для того чтобы $\left\|U_n^\lambda\right\|=O(1)$ $(n=1,\ \ldots)$. *В случае выполнения и условия* (A), λ*-метод является* F*-перманентным.*

Напомним что теорему 3. можно интерпретировать и следующим способом.

Пусть T_n чётный тригонометрический многочлен с коэффициентами $\lambda_k^n(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ n=1,\ 2,\ \ldots)$ норма которого $\left\|U_n^\lambda\right\|$ ограниченна и $\sum\limits_{k=0}^{n}\left|\Delta\lambda_k^n\right|=O(1)$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$. Тогда ограниченна и норма любого тригонометрического многочлена получивщегося из T_n умножением коэффициентов λ_k^n (по k) членами последовательности γ_k^n при условии что γ_k^n удовлетворяет (I) теоремы 3.

Преимущество теоремы 3. в отношении к некоторым уже известным теоремам проилустроуем несколькими примерами.

Пример 1. Пусть λ-метод суммированния задан коэффициентами $\lambda_k^n=\alpha_k^n\,\beta_k^n$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ n=1,\ 2,\ \ldots)$, где

$$\alpha_k^n=1-\frac{k}{n\ln n},\qquad \beta_k^n=\cos\frac{k\pi}{2n}.$$

Применение теоремы 3 сразу показывает что λ-метод является F-перманентным, а применение некоторых из уже известных критериев оказывается очень сложным, если вообще и возможно. Норма $\|U_n^\alpha\|$ неограниченна, так как α_k^n не удовлетворяет условию (β) С. М. Никольского. Все таки нормы $\|U_n^\beta\|$ и $\|U_n^{\alpha\beta}\|$ ограниченны.

Пример 2. Пусть λ-метод задан коэффициентами $\lambda_k^n = \alpha_k^n\,\beta_k^n$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$; $n = 1, 2, \ldots$), где

$$\alpha_k^n = \begin{cases} 1, & k\text{-нечетное}, \\ \cos\dfrac{\pi}{n}, & k\text{-чётное}, \end{cases} \qquad \beta_k^n = \cos\frac{k\pi}{2n}.$$

Этот метод получается из метода Рогозинского заменяя коэффициенты λ_k^n при четных $k \geqslant 2$ арифметическими средними ближайщих чётных коэффициентов, т.е.

$$\lambda_k^n = \alpha_k^n\,\beta_k^n = \frac{1}{2}\left[\cos(k-2)\frac{\pi}{2n} + \cos(k+2)\frac{\pi}{2n}\right].$$

К этом методу суммирования теорема Никольского неприменима, а применение теоремы 3 простое.

Пример 3. Пусть λ-метод задан коэффициентами $\lambda_k^n = \alpha_k^n\,\beta_k^n$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, n$; $n = 1, 2, \ldots$), где

$$\alpha_k^n = 1 + \frac{(-1)^k}{\psi(n)}, \quad \psi(n) \to \infty, \quad n \to \infty; \quad \beta_k^n = 1 - \frac{k}{n+1}.$$

Применяя теорему 3 легко установить что λ-метод является F-перманентным в случае

$$\psi(n) \geqslant C_1 n^\theta \ln n \quad \text{для} \quad \theta \geqslant 1.$$

Критерием М. Томича [4] можно пользоваться в случае

$$\psi(n) \geqslant C_2 n^\theta \quad \text{при} \quad \theta \geqslant 2.$$

Видно что результат Б. Надя [2] в случае

$$\psi(n) = O(n^\theta), \quad \theta < 2$$

не дает ответ, а в случае

$$\psi(n) \geqslant C_3 (n^\theta \ln n), \quad \theta \geqslant 2$$

λ-метод является F-перманентным. Критерий С. М. Никольского неприменим. Теорема 3 оказывается найболее подходящей.

Если кроме условия $\|U_n^\beta\| = O(1)$ предположим что последовательность λ_k^n выпукла или вогнута при $k = 0, 1, 2, \ldots$, теорему 3 можно уточнить.

Теорема 4. *В случае выпуклости или вогнутости* последовательности* $\lambda_k^n = \alpha_k^n \beta_k^n$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n;\ n=1, 2, \ldots)$, *условие*

$$\text{(I)} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta \alpha_k^n| = O(1), \qquad \alpha_k^n = O(1) \quad (n=1, 2, \ldots),$$

и

$$\text{(II)} \qquad \varphi^{\beta}(n, n) \equiv \left\| U_n^{\beta} \right| = O(1) \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

достаточно для того чтобы $\left\| U_n^{\lambda} \right\| = O(1)$ $(n=1, 2, \ldots)$. *Если выполняется и условие* (A), λ-*метод является* F-*перманентным.*

Замечания к теореме 4. Пусть последовательность $\lambda_k^n = \alpha_k^n \beta_k^n$ $(k=0, 1, 2, \ldots, n;\ n=1, 2, \ldots)$ выпукла или вогнута.

1° Если β-метод F-перманентный, а α-метод перманентный**, тогда $\alpha\beta$-метод F-перманентный.

2° Если методы α и β F-перманентны, тогда из (4) следует что метод $\alpha\beta$ F-перманентный.

3° Если методы α и β перманентны, тогда и метод $\alpha\beta$ перманентный, в случае ограничености коэффициентов α_k^n и β_k^n. Это следует из

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k^n \beta_k^n - \alpha_{k+1}^n \beta_{k+1}^n| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |\beta_k^n|\, |\Delta \alpha_k^n| +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_{k+1}^n|\, |\Delta \alpha_k^n| \leqslant \max_k |\beta_k^n| \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta \alpha_k^n| +$$
$$+ \max_k |\alpha_k^n| \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta \beta_k^n| = O(1), \quad n=1, 2, \ldots .$$

β \ α	П	F
П	П	F
F	F	F

На основании 1°, 2° и 3° мы получаем таблицу:

Покажем теперь возможности и простоту теоремы 4 в применениях к некоторым методам.

1. Суммы Чезаро m-ого порядка $\sigma_n^m(f; x)$ определенные коэффициентами

$$\lambda_k^n = \left(1 - \frac{k}{n+1}\right)\left(1 - \frac{k}{n+2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{k}{n+m}\right), \quad (n=0, 1, 2, \ldots, n;\ n=1, \ldots).$$

Последовательность λ_k^n выпукла для всех n и удовлетворяет (A).

---

* Выпуклость или вогнутость можно заменить условием А. В. Ефимова [5]

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(k+1)(n-k)}{n+1} |\Delta^2 \lambda_k{}^n| = O(1), \quad 1, 2, \ldots .$$

** Перманентность в смисле Теплиц-Шура, те условия (A) и $\sum |\Delta \alpha_n{}^n| = O(1)$ $n = 1, 2, \ldots$ неопходимы и достаточны.

Обозначим при помощи $\beta_k^n = 1 - \dfrac{k}{n+1}$. Это известный метод Рогозинского, который является F-перманентным и у которого $\|U_n^\beta\| = O(1)$, $n = 1, 2, \ldots$ Так как методы определенные коэффициентами

$$1 - \frac{k}{n+2}, \qquad 1 - \frac{k}{n+3}, \ldots, \qquad 1 - \frac{k}{n+m}$$

удовлетворяют (I) теоремы 4, следует что и метод $\sigma_n^m(f;\, x)$ F-перманентный.

2. Сумми Валле-Пуссена $\nu_n(f)$ заданы коэффициентами

$$\lambda_k^n = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant k \leqslant n \\ 2 - \dfrac{k}{n}, & n \leqslant k \leqslant 2n. \end{cases}$$

Последовательность λ_k^n вогнута и удовлетворяет (A) и F-перманентность этого метода следует из того факта что λ_k^n можно написать в виде произведения членов последовательостей

$$\alpha_k^n = \begin{cases} \dfrac{2n}{2n-k}, & 0 \leqslant k \leqslant n, \\ 2, & n \leqslant k \leqslant 2n, \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \beta_k^n = 1 - \frac{k}{2n},$$

где $\|U_n^\beta\| = O(1)$, $n = 1, 2, \ldots.$ и $\sum\limits_{k=0}^{2n-1} |\Delta \alpha_k^n| = 1$. Значит, условия теоремы 4 выполнены.

3. Рассмотрым суммы Валле-Пуссена $\nu_{n,p}(f)$ заданы коэффициентами

$$\lambda_k^n = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant n \leqslant n-p, \\ \dfrac{n-k+1}{p+1}, & n-p \leqslant k \leqslant n. \end{cases}$$

Если члены последовательности (которий вогнутой) λ_k^n напишем в виде произведения членов последовательностей α_k^n и β_k^n, где

$$\alpha_k^n = \begin{cases} \dfrac{n+1}{n-k+1}, & 0 \leqslant k \leqslant n-p, \\ \dfrac{n+1}{p+1}, & n-p \leqslant k \leqslant n, \end{cases} \qquad \beta_k^n = 1 - \frac{k}{n+1},$$

у которых $\|U_n^\beta\| = O(1)$ для всех $n = 1, 2, \ldots$, достаточно показать что имеет место (A) и что

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta\alpha_k^n| = O(1), \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Так как

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta\alpha_k^n| = \left|\frac{n+1}{p+1} - 1\right| = \frac{n-p}{p+1} = \frac{1-\frac{p}{n}}{\frac{p}{n}+\frac{1}{n}}, \tag{6}$$

видно что ограниченность этого выражения зависит от поведения частного $\frac{p}{n}$ при $n \to \infty$. Пусть

$$\frac{p}{n} \to l, \qquad n \to \infty$$

1° При $l = 0$, выражение в (6) неограниченно и F-перманентность не видна.

2° При $0 < l \leqslant 1$, выражение (6) является ограниченным и поэтому метод $\nu_{n,p}(f)$ F-перманентный. Условие (A) тоже имеет место, так как и $p \to \infty$ при $n \to \infty$. Пусть $k \in [n-p, n]$ фиксированно. Тогда $k = n - p + k_0$ и поэтому

$$\lambda_k^n = 1 - \frac{k_0}{p+1} \quad \text{при} \quad n - p \leqslant k \leqslant n.$$

Из этого следует что $\lambda_k^n \to 1$ при $p \to \infty$ для любого $k \in [n-p, n]$.

В случае $l = 1$ видно что $\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta\alpha_k^n| = 0$ и поэтому метод $\nu_{n,p}(f) \equiv \nu_{n,n}(f)$ является F-перманентным. В этом случае суммы Валле-Пуссена ведут себя образом сумм Фейера.

В предыдущих теоремах мы о коэффоциентах β_k^n предполагали всегда ограниченность нормы $\|U_n^\beta\|$. В следующей теореме о β_k^n будем предполагать что-то иное.

Теорема 5. *Пусть* $\lambda_k^n = \alpha_k^n \beta_k^n$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$. *Тогда*

$$\text{(I)} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta\alpha_k^n| = O(1), \qquad \alpha_k^n = O(1) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\text{(II)} \qquad \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)\, |\Delta^2\beta_k^n| = O(1), \qquad n\, |\Delta\beta_{n-1}^n| = O(1) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\text{(III)} \qquad \lambda_n^n \ln n = O(1) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\text{(IV)} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} |\beta_k^n \Delta\alpha_k^n| \ln(2k+1) = O(1) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

достаточно для того чтобы $\|U_n^\lambda\| = O(1)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. *В случае выполнения условия* (A), λ-*метод является* F-*перманентным.*

Примечания:

1° При $\alpha_k^n \equiv 1$, из теоремы 5 получается теорема М. Томича [4].

2° При $\beta_k^n \equiv 1$, теорема 5 переходит в теорему 2 настоящей статьи.

3° При $\beta_k^n = O(\ln(2k+1)^{-p})$, $p > 1$ в теореме 5 из (I) следует (IV). В остаьных случаях из (IV) следует (I). Значит, условия (I) и (IV) существенны.

4° Если пример 3 интерпретировать по теореме 5, доказывается что метод будет F-перманентным при

$$\psi(n) > C(n^\theta \ln n), \qquad \theta \geqslant 1.$$

4. Доказательства

Доказательство неравенства (4): Если

$$K_n(t) = \frac{\alpha_0^n \beta_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^n \beta_k^n \cos kt \tag{7}$$

преобразуем по формуле Парсеваля

$$K_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\alpha_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^n \cos k(x-t) \right) \left(\frac{\beta_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \beta_k^n \cos kx \right) dx,$$

тогда мы получим что норма $\| U_n^\lambda \|$

$$\| U_n^\lambda \| = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |K_n(t)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\alpha_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^n \cos k(x-t) \right| \left| \frac{\beta_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \beta_k^n \cos kx \right| dx \right\} dt.$$

По теореме о среднем значении получается

$$\| U_n^\lambda \| \leqslant \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \left| \frac{\alpha_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^n \cos k(\xi - t) \right| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\beta_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \beta_k^n \cos kx \right| dx \right\} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\beta_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \beta_k^n \cos kx \right| dx \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \frac{\alpha_0^n}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^n \cos k(\xi - t) \right| dt = \| U_n^\beta \| \cdot \| U_n^\alpha \|.$$

Доказательство теоремы 1. Применаяя преобразовани Абеля к (7), получается

$$K_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta \alpha_k^n \left(\frac{\beta_0^n}{2} + \sum_{\nu=1}^{k} \beta_\nu^n \cos \nu t \right) + \alpha_n^n \left(\frac{\beta_0^n}{2} + \sum_{\nu=1}^{k} \beta_\nu^n \cos \nu t \right).$$

Используя (5) получается норму

$$\|U_n^\lambda\| = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |K_n(t)|\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta\alpha_k^n|\,\varphi^\beta(k, n) + |\alpha_n^n|\,\varphi^\beta(n, n) \tag{8}$$

и если выполнены условия (I) и (II) теоремы 1 она будет ограниченной.

Следствие 1. получается если в (8) предположить $\varphi^\beta(k, n) = O(1)$ для всех $k \leqslant n = 1, 2, \ldots$, так что норма

$$\|U_n^\lambda\| \leqslant \max_k \varphi^\beta(k, n) \sum_{k=0}^{n-1} |\Delta\alpha_k^n| + |\alpha_n^n|\,\varphi^\beta(n, n), \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

и если выполняются условия (I) и (II) следствия 1 она будет ограниченной.

Следствие 2. получается из того факта что

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta\alpha_k^n| = \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)\left(|\Delta\alpha_k^n| - |\Delta\alpha_{k+1}^n|\right) + n\,|\Delta\alpha_{n-1}^n| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)\,|\Delta^2\alpha_k^n| + n\,|\Delta\alpha_{n-1}^n|$$

и если выполнястя (I) следствия 2, то выражение с правой стороны ограниченно. Ограниченость нормы $\|U_n^\lambda\|$ очевидна.

Доказательство теоремы 2. Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Если*

$$\beta_k^n = O(1) \quad \text{и} \quad \sum_{k=n} |\Delta\beta_k^n| = O(1) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

то

$$\varphi^\beta(m, n) = O(\ln(m+1)).$$

Доказательство Применаяя преобразование Абеля к (5), мы получаем

$$\varphi^\beta(m, n) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left| \sum_{k=0}^{m-1} \Delta\beta_k^n \frac{\sin\frac{2k+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}} + \beta_m^n \frac{\sin\frac{2m+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}} \right| dt \leqslant \tag{9}$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{m-1} |\Delta\beta_k^n|\,L_k + |\beta_m^n|\,L_m,$$

где L_k константы Лебега, для которых П. В. Галкин [6] доказал что

$$L_k = O(\ln(m+1))$$

и заменяя в (9) мы получаем

$$\varphi^{\beta}(m, n) = O\left(\sum_{k=0}^{m-1} |\Delta\beta_k^n| \ln(k+1) + \ln(m+1)\right),$$

т.е.

$$\varphi^{\beta}(m, n) = O\left(\sum_{k=0}^{m-2} \ln\frac{k+1}{k+2} \sum_{\nu=0}^{k} |\Delta\beta_\nu^n| + \ln m \sum_{\nu=0}^{m-1} |\Delta\beta_\nu^n| + \ln(m+1)\right).$$

Поэтому

$$\varphi^{\beta}(m, n) = O(\ln(m+1)). \tag{10}$$

Доказательсто теоремы 2 следует из (8) и (10), так как

$$\|U_n^{\lambda}\| \leqslant C\left(\sum_{k=0}^{n-1} |\Delta\alpha_k^n| \ln(k+1) + |\alpha_n^n| \ln(n+1)\right).$$

Доказательство теоремы 3. Сразу получается из леммы 1 и теоремы 1, так как из $\|U_n^{\beta}\| = O(1)$, используя неопходимые условия теоремы С. М. Никольского [1], следует что $\beta_k^n = O(1)$ для всех k и n.

Доказательство теоремы 4. Из (II) видно что в β-методе выполнены условия С. М. Никольского

(α) $\beta_k^n = O(1)$ для всех k и n,

(β) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k^n}{n-k+1} = O(1) \quad (n = 1, 2, \ldots).$

Так как последовательность λ_k^n выпукла или вогнута, для того чтобы норма $\|U_n^{\lambda}\|$ была ограниченной достаточно выполнение следующих условий:

(α′) $\lambda_k^n = O(1)$ для всех k и n,

(β′) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^n}{n-k+1} = O(1) \quad (n = 1, 2, \ldots).$

Условие (α′) следует из (I) и (α), а (β′) из

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k^n \beta_k^n}{n-k+1}\right| = \left|\sum_{k=1}^{n-1} \Delta\alpha_k^n \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\beta_\nu^n}{n-\nu+1} + \alpha_n^n \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\beta_\nu^n}{n-\nu+1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |\Delta\alpha_k^n| \left|\sum_{\nu=1}^{k} \frac{\beta_\nu^n}{n-\nu+1}\right| + |\alpha_n^n| \left|\sum_{\nu-1}^{n} \frac{\beta_\nu^n}{n-\nu+1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sum_{k=1}^{n-1} |\Delta\alpha_n^n| + C_2 |\alpha_n^n| = O(1) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где мы в конце использовали (β) и (I).

Доказательство теоремы 5. Если ядро $K_n(t)$ в (7) преобразовать по Абелю, то

$$K_n(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k^n\,\Delta\alpha_k^n\,D_k(t)+\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_{k+1}^n\,\Delta\beta_k^n\,D_k(t)+\alpha_n^n\,\beta_n^n\,D_n(t), \tag{11}$$

где

$$D_k(t)=\frac{\sin\frac{2k+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Если снова преобразовать по Абелю сумму в (11), то

$$\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_{k+1}^n\,\Delta\beta\,D_k(t)=\sum_{k=0}^{n-2}\left(\alpha_{k+1}^n\,\Delta^2\beta_k^n+\Delta\alpha_{k+1}^n\,\Delta\beta_{k+1}^n\right)F_k(t)+ \tag{12}$$
$$+\alpha_n^n\,\Delta\beta_{n-1}^n\,F_{n-1}(t),$$

где

$$F_k(t)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{k+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$$

ядро Фейера.

Интегрируя $K_n(t)$ и используя (11) и (12), мы получим

$$\|U_n^\lambda\|=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi|K_n(t)|\,dt\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}|\beta_k^n\,\Delta\alpha_k^n|\,\frac{2}{\pi}\int_0^\pi|D_k(t)|\,dt+ \tag{13}$$
$$+\sum_{k=0}^{n-2}|\alpha_{k+1}^n\,\Delta^2\beta_k^n+\Delta\alpha_{k+1}^n\,\Delta\beta_{k+1}^n|\,\frac{2}{\pi}\int_0^\pi|F_k(t)|\,dt+$$
$$+|\alpha_n^n\,\Delta\beta_{n-1}^n|\,\frac{2}{\pi}\int_0^\pi|F_{n-1}(t)|\,dt+|\alpha_n^n\,\beta_n^n|\,\frac{2}{\pi}\int_0^\pi|D_n(t)|\,dt.$$

Так как из результатов П. В. Галкина [6] следует

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi|D_k(t)|\,dt\leqslant\frac{4}{\pi^2}\ln(2k+1)+1,$$

а о ядре Фейера известно что

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi|F_k(t)|\,dt=k+1,$$

то заменяя в (13) мы получим

$$\left\|U_n^\lambda\right\| \leqslant \frac{4}{\pi^2}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left|\beta_k^n \Delta\alpha_k^n\right| \ln(2k+1) + \left|\alpha_n^n \beta_n^n\right| \ln(2n+1)\right\} + \tag{14}$$

$$+\left\{\sum_{k=0}^{n-2}(k+1)\left(\left|\alpha_{k+1}^n \Delta^2 \beta_k^n + \Delta\alpha_{k+1}^n \Delta\beta_{k+1}^n\right|\right) + n\left|\alpha_n^n \Delta\beta_{n-1}^n\right|\right\} +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}\left|\beta_k^n \Delta\alpha_k^n\right| + \left|\alpha_n^n \beta_n^n\right|.$$

Из условий (III) и (IV) следует что выражение в первой фигурной скобке в (14) является ограниченным. Из (II) следует что $k\left|\Delta\beta_k^n\right| = O(1)$, а тоже и $k\left|\Delta\beta_k^n\right| \to 0$ по k, так что вместе с (I) и (II) обеспечивает ограниченность выражения во второй фигурной скобке. Из (IV) следует и

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left|\beta_k^n \Delta\alpha_k^n\right| = O(1) \quad (n = 1,\ 2, \ldots),$$

а из (III) ограниченность $\left|\alpha_n^n \beta_n^n\right|$ для всех n. Теорема 5 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Никольский, *О линейных методах суммирования рядов Фурье.* Изв. АН СССР. серия матем., 12, No 3, 1948, 259—278.

[2] B. Nagy, *Méthodes de sommation des séries de Fourier.* I. Acta scient. math. Szeged, 12, pars B, 1950, 204—210.

[3] J. Карамата и М. Томић, *О збирљивости Фуриер-ових редова.* Глас Српске акад. наука, 206, Од прир-мат. наука, 5, 1953, 89—126.

[4] M. Tomić, *Sur les facteurs de convergence des séries de Fourier des fonctions continues.* Pub. Inst, math. Acad. serbe sci. 8, 1955, 23—32.

[5] А. В. Ефимов, *О линейных методах суммирования рядов Фурье.* Изв. АН СССР, серя матем., 24, No 5, 1960, 743—756.

[6] П. В. Галкин. *Оценки дла констат Лебега.* Труды МИ АН СССР, 1971, том 109, стр. 3—5.