PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 21 (35), 1977, pp. 207–211

ОДНА ЗАМЕТКА О АССОЦИАТИВНЫХ В ЦЕЛОМ СИСТЕМАХ n-КВАЗИГРУПП НА $Q=\{1, 2, 3, 4\}$

Добривой Жарков

(Сообщено 20 декабря 1974)

1. Введение

Пусть Q непустое множество, $A, B, C, \ldots$ бинарные квазигрупповые операции и Ω_Q множество всех квазигрупповых операций, определенных на Q. В работе [2] даны определения:

Определение 1. Систему квазигрупп $\Sigma \subseteq \Omega_Q$ назовем слабо ассоциативной в целом слева (кратко $\overline{LA}$-системой), если

$$(\forall A, B \in \Sigma)\ (\exists A_1, B_1 \in \Omega_Q)\ (\forall x, y, z \in Q)\ (A[B(x, y), z] = A_1[x, B_1(y, z)]),$$

Систему квазигрупп $\Sigma \subseteq \Omega_Q$ назовем слабо ассоциативной в целом справа (кратко $\overline{RA}$-системой), если

$$(\forall A, B \in \Sigma)\ (\exists A_1, B_1 \in \Omega_Q)\ (\forall x, y, z \in Q)\ (A[x, B(y, z)] = A_1]B_1(x, y), z])$$

Определение 2. Систему квазигрупп $\Sigma \subseteq \Omega_Q$ назовем ассоциативной в целом слева (LA-системой) если

$$(\forall A, B \in \Sigma)\ (\exists A_1, B_1 \in \Sigma)\ (\forall x, y, z \in Q)\ (A[B(x, y), z] = A_1[x, B_1(y, z)])$$

Систему квазигрупп $\Sigma \subseteq \Omega_Q$ назовем ассоциативной в целом справа (RA-системой), если

$$(\forall A, B \in \Sigma)\ (\exists A_1, B_1 \in \Sigma)\ (\forall x, y, z \in Q)\ (A[x, B(y, z)] = A_1[B_1(x, y), z]).$$

Если Σ сразу ассоциативна в целом и слева и справа, то Σ называется ассоциативной в целом, кратко A-системой.

В работе [7] A-система обобщена на n-арный случай, следующим определениям.

Определение 3. Пусть $\Sigma \subseteq \Omega_Q$, где Ω_Q множество всех n-арных квазигрупповых операций, определенных на Q. Систему Σ назовем i слабо ассоциативной в целом (кратко $\overline{iA}$-системой), если для любых $A_m, A_{m+1} \in \Sigma$, где m фиксированное число вида $m=2i-1$, $i\in\{1, 2, \ldots, n\}$, существуют такие A_t, $A_{t+1}\in\Omega_Q$ для всех $t\in\{2s-1|s\neq i\wedge s\in N_n\}$ что

$$(1)\quad A_1[A_2(a_1^n), a_{n+1}^{2n-1}]=A_{2j-1}[a_1^{j-1}, A_{2j}(a_j^{j+n-1}), a_{j+n}^{2n-1}], j\in\{2, 3, \ldots, n\}.$$

Определение 4. Пусть $\Sigma\subseteq\Omega_Q$, где Ω_Q множество всех n-арных квазигрупповых операций оппредленных на Q. Систему Σ назовем i ассоциативной в целом (i A-системой), если для любых A_m, $A_{m+1}\in\Sigma$, где m фиксированное число вида $m=2i-1$, $i\in N_n$, существуют такие A_t, $A_{t+1}\in\Sigma$ для всех $t\in\{2s-1\mid s=|=i\wedge s\in\{1, 2, \ldots, n\}\}$ что имеет место равенства (1).

Определение 5. Пусть $\Sigma\subseteq\Omega_Q$, где Ω_Q множество всех n-арных квазигрупповых операций, определенных на Q. Σ назовем A-системой, если она iA-система для каждого $i\in\{1, 2, \ldots, n\}$.

Приводим сводку некоторых вспомагательных результатов:

P.1. [2] Пусть $Q(\cdot)$ группа. Система

$$\Sigma_{\{\cdot\}}=\{A\mid A(x, y)=\alpha x\cdot t\cdot\beta y\wedge t\in Q\wedge\alpha, \beta\in A_{\{\cdot\}}\},$$

$A_{\{\cdot\}}$ — множество всех автоморфизмов группы $Q(\cdot)$, является максимальной ассоциативной в целом системой.

P.2. Максимальные ассоциативные в целом системы $\Sigma_{\{\cdot\}}$ и $\Sigma_{\{0\}}$ или совпадают, или их пересечение является пустым множеством.

P.3. [2] Системы $\Sigma_{\{\cdot\}}$ и $\Sigma_{\{0\}}$, полученные в том же порядке через группы $Q(\cdot)$ $Q(\circ)$, совпадают тогда, и только тогда, когда их изоморфизм имеет вид $a\circ b=a\cdot k\cdot b$, где $k=e^{-1}$, e — единица группы $Q(\circ)$, e^{-1} обратный от e в группе $Q(\cdot)$.

P.4. [2] [7]. Если A-система содержит n-лупу, то она должна быть n-группой: $n\in N\setminus\{1\}$.

P.5. [4]. Если n-лупа $Q(A)$ изотопна n-группе $Q(B)$ обладающей единицей, то $Q(A)$ изоморфна $Q(B)$, и поэтому n-группа.

P.6. [2]. Пусть $Q(\cdot)$ группа, $kQ=n\in N$, $kA_{\{\cdot\}}=f\in N$, $A_{\{\cdot\}}$ — множество всех автоморфизмов группы $Q(\cdot)$, $\Sigma_{\{\cdot\}}$ максимальна A-система, порождено группой $Q(\cdot)$. Тогда $k\Sigma_{\{\cdot\}}=n\cdot f^2$.

P.7. [6]. Если $Q(A)$ n-группа обладающая единицей, то существует бинарная группа $Q(B)$, такая, что

$$A(x_1^n)=B[B(\ldots(B(x_1^2), x_3), \ldots), x_n]^*.$$

2. Формулировка задачи

В [1] доказана первая часть следующего положения: если Ω_Q множество всех квазигрупп на Q, то Ω_Q является A-системой, тогда и только тогда когда $kQ\leqslant 3$ [2]. В [8] это положение обобщенно на n-арный случай. Из доказательств этих утверждений (в [2] и [8]) следует, что для $kQ>4$ объединение максимальных A-систем является собственным подмножеством

*) В сжатом виде $\overset{n-1}{B}(x_1^n)$ [7].

множества Ω_Q**. Эти доказательства не позволяют ответа на этот вопрос для $kQ=4$. Задача настоящей работы — получение ответа на упомянутый вопрос, т.е. доказательство следующей теоремы.

Теорема. *Если $Q=\{1, 2, 3, 4\}$, то объединение максимальных A-систем n-арных квазигрупп, $n \in N \setminus \{1\}$, является собственным подмножеством множества Ω_Q.*

3. Доказательство теоремы

Впервые расмотрим случай A-систем для n-арных квазигрупп, где $n \geqslant 3$. Отдельно рассмотрим случай $n=2$.

а) $n \geqslant 3$

На $Q=\{1, 2, 3, 4\}$ можно определить 3-лупу $Q(A)$ обладающую единицей 1, следующим образом ([4] стр. 115).

(1)

A_1	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2
4	4	1	2	3

A_2	1	2	3	4
1	2	1	4	3
2	1	2	3	4
3	4	3	2	1
4	3	4	1	2

A_3	1	2	3	4
1	3	4	1	2
2	4	1	2	3
3	1	2	3	4
4	2	3	4	1

A_4	1	2	3	4
1	4	3	2	1
2	3	4	1	2
3	2	1	4	3
4	1	2	3	4

Как утверждается в [4] на стр. 115, $Q(A)$ не является приводимой. Поэтому, учитывая Р. 7., $Q(A)$ 3-лупа не являющаяся 3-группой.

Пусть сейчас $Q(B)$ бинарная группа на $Q=\{1, 2, 3, 4\}$, обладающая единицей 1. Определим n-лупу $Q(L)$, обладающую единицей 1 следующим образом

(2) $$L(x_1^n)=A[x_1, x_2, \overset{n-3}{B}(x_3^n)],$$

где A 3-лупа, определена через (1).

Предполагая, что n-группа, на основании Р. 7., получаем, что существует группа $\overline{B}$, такая что

(3) $$L(x_1^n) = \overset{n-1}{\overline{B}}(x_1^n).$$

Из (2) и (3) получаем равенство.

$$A[x_1, x_2, \overset{n-3}{B}(x_3^n)] = \overset{n-1}{\overline{B}}(x_1^n), \text{ т.е. равенство}$$

(4) $$A\{x_1, x_2, B[x_3, \overset{n-4}{B}(x_4^n)]\}=\overset{2}{\overline{B}}\{x_1, x_2, \overline{B}[x_3, \overset{n-4}{\overline{B}}(x_4^n)]\}.$$

Если в [4] положим $x_4=\cdots=x_n=\bar{e}$, где $\bar{e}$ единица группы $\overline{B}$, учитывая обозначение $B(x_3, \bar{e})=R_{\bar{e}}^{-}x_3$, получаем, что справедливо равенство.

(5) $$A(x_1, x_2, R_{\bar{e}}^{-}x_3)=\overset{2}{\overline{B}}(x_1, x_2, x_3)$$

**) Для $n>4$ существует лупа (n-лупа) не являющийся группой (n-группой).

т.е. что A, на основании Р. 5., является 3-группой. Так как A 3-лупа не являющаяся 3-группой, то $Q(L)$ n-лупа, не являющаяся n-группой. Отсюда, учитывая Р. 4., находим, что положение теоремы доказано для $n > 3$.

b) $n=2$

Как известно, на $Q=\{1, 2, 3, 4\}$ существуют две неизоморфные группы: циклическая и группа Клайна. Группа Клайна с единицей 1 определена однозначно. Если эту групп обозначим через $Q(A_1)$, можно увидеть, что группы Клайна с единицами 2, 3 и 4-обозначим их через A_2, A_3 и A_4 — — выражаются через A_1, образом из Р. 3. Отсюда, на основании Р. 3., находим, что группы A_1, E_2, A_3 и A_4 порождают одну и ту же максимальную A-систему.

Циклические группы, обладающие единицей 1, являются следующими группами

B_1	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	2	1
4	4	3	1	2

C_1	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	3	4	1
3	3	4	1	2
4	4	1	2	3

D_1	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

Группы B_1, C_1 и D_1 являются изоморфными, но изоморфизмы не имеют вид из Р. 3. Поэтому, на основании Р. 3. и Р. 2., группы B_1, C_1 и D_1 порождают непересекающиеся между собой максимальные A-системы.

Если к группам B_1, C_1 и D_1, отдельно, построим изоморфные групы, обладающие единицами 2, 3 и 4 образом из Р. 3., получаем все возможные группы на $Q=\{1, 2, 3, 4\}$ и факт что все максимальные непересекающиеся системы циклических группы порождают уже группы B_1, C_1 и D_1.

Таким образом все максимальные A-системы на $Q=\{1, 2, 3, 4\}$ порождают поодному уже группы A_1, B_1, C_1 и D_1.

Проверкой находим, что группа A_1 имеет 6 автоморфизмов, а группы B_1, C_1 и D_1 отдельно два автоморфизма. Отсюда, учитывая Р. 6, получаем, что $k\,\Sigma_{A_1} + k\,\Sigma_{B_1} + k\,\Sigma_{C_1} + k\,\Sigma_{D_1} = 192$.

На $Q=\{1, 2, 3, 4\}$ можно определить 4 между собой нетождественные лупы обладающие одной и той же единицей. Такими лупами являются группы A_1, B_1, C_1 и D_1. Исходя, на пример, из A_1, перестановкой столбцов получаем 4! квазигрупп (среди которых находится и A_1). Из каждой из полученных (перестановками столбцов) квазигрупп можно получить перестановками строк отличающих от первой еще 3! квазигрупп.

Описанным способом, так как упомянутые лупы невозможно перевести одну в другую подстановками строк и столбцов, получено $4.4!\ 3! = 576$ квазигрупп. Теорема доказана.

Выражем благодарность Янезу Ушану за полезные сугестии и помощь при осуществлении настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Schauffler R., *Die Assoziativität im Ganzen besonders bei Quasigruppen*, Math. Zeischr. 67, No 5 (1957), 428—435.

[2] Белоусов В. Д., *Ассоциативные в целом системы квазигрупп*, Матем. сб. 55. (97) Но 2 (1961), 221—236.

[3] Белоусов В. Д., *Основы теории квазигрупп и луп*, Наука, Москва, 1967.

]4] Белоусов В. Д., *n-Арные квазигруппы*, Штиница, Кишинев, 1972.

[5] Čupona G., *Finitarne asocijativne operacije*, MB, sv. 39, 1969, 135—149.

[6] Трпеновски Б., *Полигруппи што можат да се пополнат со неутрални елементи*, Билтен на Друшт. на мат. и физ. од СРМ, км. 10 (1964), 23—26.

[7] Ушан Янез., *Ассоциативные в целом системы n-арных квазигрупп*, Publications de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 19 (33), 1975.

[8] Ушан Янез, Жижович М., *n-Арный аналогон теоремы Шауфлера*, Publications de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 19 (33), 1975.

Dobrivoj Žarkov
ul. Tamiška br. 31
23 000 Zrenjanin, Jugoslavija