PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 20 (34) 1976, pp. 29–36

SUR UN THÉORÈME MERCERIEN ASYMPTOTIQUE GÉNÉRAL POUR DES FONCTIONS A COMPORTEMENT RÉGULIER

D. Aranđelović

(Reçu le 22 Avril 1976)

Introduction

Soit G le groupe multiplicatif $\mathbf{R}_+^*$ des nombres réels strictement positifs ou le groupe additif $\mathbf{Z}$ des entiers, ordonné par l'ordre usuel, muni de la topologie usuelle et de la mesure de Haar usuelle notée β. La loi de composition sur G sera notée multiplicativement. On notera $\mathcal{G}$ la base du filtre des „voisinages de $+\infty$" dans G, formée des intervalles $[a, +\infty[\,(a \in G)$ dans G. Les relations de comparaison $\preccurlyeq$, $\prec\!\!\preccurlyeq$[1] et $\sim$ (en particulier la convergence) seront considérées *suivant* $\mathcal{G}$. On désignera par $\hat{G}$ le qroupe des homomorphismes continus de G dans $\mathbf{R}_+^*$.

Une fonction R à valeurs réelles >0, mesurable et définie dans un ensemble X de $\mathcal{G}$, est appellée à *comportement régulier* (sur G) si la limite $\rho(t) = \lim_{x\to+\infty} R(xt)/R(x)$ existe pour tout t de G; la fonction ρ, appartenant alors à $\hat{G}$, est dite *l'indice* de R (Karamata [1, 2]).

Soient f et g deux fonctions complexes dans G satisfaisant aux certaines conditions, telles que $(f*g)(x) = \int_G f(t)\, g(x/t)\, d\beta(t)$ existe pour tout x de G. Soit λ un nombre complexe $\neq 0$ si $G = \mathbf{R}_+^*$, $= 0$ si $G = \mathbf{Z}$[2] et soit $g_\lambda = \lambda g + f*g$. On considère les énoncés merceriens: „*la relation* $g \preccurlyeq R$ *est équivalente à* $g_\lambda \preccurlyeq R$", „*l'existence de* lim g/R *est équivalente à l'existance de* lim g_λ/R".

On voit d'abord, théorèmes (1.1) et (1.2), que les relations „*on a* $f*R \preccurlyeq R$ *pour tout* R *de* $\mathcal{R}(\rho)$" et „lim $(f*R)/R$ *existe pour tout* R *de* $\mathcal{R}(\rho)$", où $\mathcal{R}(\rho)$ désigne une classe convenable des fonctions à comportement régulier d'indice ρ, sont vraies pour les mêmes f; pour ces f on a alors les théorèmes abeliens: „*la relation* $g \prec\!\!\preccurlyeq R$ *entraîne* $f*g \prec\!\!\preccurlyeq R$" et „*si* lim g/R *existe, il en est de même de* lim $(f*g)/R$". Il résulte aussi du théorème (1.2) (ii) que si les relations mentionées sont vraies pour un f, elles sont vraies alors pour tout élément d'une algèbre de Banach commutative $A \ni f$. En résolvant l'équation $g_\lambda = \lambda g + f*g$ (en g) dans A et en appliquant les théorèmes abeliens on obtient alors

---

[1] Notations de Hardy. On écrit aussi (Bachmann--Landau) $f = 0(g)$ au lieu de $f \preccurlyeq g$ et $f = o(g)$ au lieu de $f \prec\!\!\preccurlyeq g$.

[2] Il s'agit donc, dans ces deux cas considérés, des théorèmes merceriens différents.

les théorèmes merceriens: „*la relation* $g_\lambda \leqslant R$ *entraîne* $g \leqslant R$“ et „*si* $\lim g_\lambda/R$ *existe, il en est de même de* $\lim g/R$“ (théorèmes (1.3) et (1.4)).

Remarquons enfin que, si $G=\mathbf{R}_+^*$, on peut trouver des théorèmes abeliens plus généraux (démontrés d'une manière différente) dans [3] et des théorèmes merceriens plus particuliers (démontrés d'une manière semblable) dans [4].

1. Résultats

Théorème (1.1) *Soient R une fonction à comportement régulier sur G d'indice* ρ, *f et g deux fonctions complexes mesurables dans G dont g est localement bornée. Supposons qu'il existe un* $\sigma \lll \rho$ *et un* $\tau \ggg \rho$ *dans* $\hat{G}$ *tels que la fonction* $f \max(\check{\sigma}, \check{\tau})$ *soit intégrable et* $\check{g} \leqslant \check{\sigma}$[3]. *Alors*

(i)
$$\lim\cdot\sup |g|/R = c < +\infty \quad \textit{entraîne}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\cdot\sup \left| \int_G f(t)\{g(x/t)/R(x)\}\, d\beta(t)\right| \leqslant c\int_G |f(t)|\, \check{\rho}(t)\, d\beta(t).$$

(ii)
$$\lim g/R = c \quad \textit{entraîne}$$
$$\lim_{x\to+\infty} \int_G f(t)\{g(x/t)/R(x)\}\, d\beta(t) = c\int_G f(t)\, \check{\rho}(t)\, d\beta(t).$$

Théorème (1.2) *Soit* $\mathcal{R}(\rho)$ *l'ensemble de toutes les fonctions R à comportement régulier sur G d'indice* ρ, *mesurables,* >0 *et localement bornées dans G et telles que* $\check{R} \leqslant \check{\rho}$. *Soit f une fonction complexe dans G.*

(i) *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) *Pour tout R de* $\mathcal{R}(\rho)$ *il existe un x dans G tel que la fonction* $t \mapsto f(t)\, R(x/t)$ *soit intégrable.*

b) *Il existe un* $\tau \ggg \rho$ *dans* $\hat{G}$ *tel que la fonction* $f \max(\check{\rho}, \check{\tau})$ *soit intégrable.*

c) *La fonction* $t \mapsto f(t)\, R(x/t)$ *est intégrable pour tout R de* $\mathcal{R}(\rho)$ *et tout x de G.*

(ii) *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

d) $\int_G f(t)\, R(x/t)\, d\beta(t) \lll R(x)$ *pour tout R de* $\mathcal{R}(\rho)$.

e) *Il existe un* $\sigma \lll \rho$ *et un* $\tau \ggg \rho$ *dans* $\hat{G}$ *tels que la fonction* $f \max(\check{\sigma}, \check{\tau})$ *soit intégrable.*

Théorème (1.3) *Soit R une fonction à comportement régulier sur G d'indice* ρ. *Soient f et g deux fonctions mesurables complexes dans G. Supposons que, pour un* $\sigma \lll \rho$ *et un* $\tau \ggg \rho$ *de* $\hat{G}$ *et pour un nombre complexe* $\lambda\, (\neq 0$ *si* $G=\mathbf{R}_+^*$, $=0$ *si* $G=\mathbf{Z})$, *on a*

a) *La fonction* $f \max(\check{\sigma}, \check{\tau})$ *est intégrable.*

b) *La fonction* $g/\max(\sigma, \tau)$ *est bornée.*

c) $\lambda + \int_G f \check{\chi}\, d\beta \neq 0$ *pour tout homomorphisme continu* χ *de G dans le groupe multiplicatif* $\mathbf{C}^*$ *des nombres complexes* $\neq 0$ *tel que* $\sigma \leqslant \chi \leqslant \tau$.

---

[3] Si h est une application de G dans un ensemble quelconque E, on note $\check{h}$ l'application de G dans E définie par $\check{h}(x) = h(1/x)$.

Si l'on pose $g_\lambda(x)=\lambda g(x)+\int_G f(t)\,g(x/t)\,d\beta(t)$ *pour* x *de* G, *alors*

(i) $g_\lambda \preccurlyeq R$ *entraîne* $g \preccurlyeq R$.

(ii) $\lim g_\lambda/R=c$ *entraîne* $\lim g/R=c\left(\lambda+\int_G f\check{\rho}\,d\beta\right)^{-1}$.

Théorème (1.4) *Soient* $\sigma_\infty=+\infty\varphi_{]\leftarrow,1[}+\varphi_{\{1\}}$, $\tau_\infty=\varphi_{\{1\}}+(+\infty)\varphi_{]1,\rightarrow[}$[4]. *Le théorème* (1.3) *reste valable si l'on y remplace ou* σ *par* σ_∞ *ou bien* τ *par* τ_∞ (*en supposant, dans le deuxième cas, la fonction* g *localement bornée dans* G). *Le théorème* (1.3) *et ceux obtenus par les substitutions précédentes restent valables si l'on remplace dans leurs hypothèses* b) *et* c) : $\sigma\,(\sigma_\infty\preccurlyeq\sigma\prec\rho)$ *ou* $\tau\,(\rho\prec\tau\preccurlyeq\tau_\infty)$ (*ou tous les deux*) *par* ρ.

Exemple (1.5) Soit $G=\mathbf{R}_+^*$. Identifions un homomorphisme continu χ de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{C}^*$ au nombre complexe z tel que $\chi(t)=t^z$ pour tout $t>0$ et remarquons que l'on a $t^z\preccurlyeq t^{z'}$ (resp. $t^z\prec t^{z'}$) si et seulement si $\mathcal{R}z\leqslant\mathcal{R}z'$ (resp. $\mathcal{R}z<\mathcal{R}z'$). Si σ est un homomorphisme continu de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}_+^*$, nous désignerons par σ le nombre réel obtenu par l'identification précédente. Alors le théorème (1.4), dans le cas où $\tau=+\infty$ et σ est remplacé par ρ dans b) et c), prend la forme

(1.5.1) *Soient* R *une fonction à comportement régulier sur* $\mathbf{R}_+^*$ *d'indice* ρ, f *une fonction mesurable complexe dans l'intervalle* $[1,+\infty[$ *et* g *une fonction complexe mesurable et localement bornée dans* $\mathbf{R}_+^*$. *Supposons que, pour un nombre réel* $\sigma<\rho$ *et un nombre complexe* $\lambda\neq 0$, *on a*

a) *la fonction* $f(t)\,t^{-\sigma}$ *est* $t^{-1}dt$*-intégrable dans* $[1,+\infty[$[5],

b) $g(t)\preccurlyeq t^\rho$ *lorsque* $t\to 0+$,

c) $\hat{f}(z)=\displaystyle\int_1^\infty f(t)\,t^{-z}\frac{dt}{t}\neq-\lambda$ *pour tout nombre complexe* z *vérifiant* $\mathcal{R}z\geqslant\rho$.

Si l'on pose $g_\lambda(x)=\lambda g(x)+\displaystyle\int_1^\infty f(t)\,g\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t}$ *pour* $x>0$, *alors*

(i) $g_\lambda\preccurlyeq R$ *entraîne* $g\preccurlyeq R$.

(ii) $\lim g_\lambda/R=c$ *entraîne* $\lim g/R=c\left(\lambda+\displaystyle\int_1^\infty f(t)\,t^{-\rho}\frac{dt}{t}\right)^{-1}$.

Les cas particuliers de (1.5.1), $f(t)=(\log t)^{k-1}/\Gamma(k)\,t$ et $f(t)=k\,(t-1)^{k-1}t^{-k}$ pour un $k=1,2,3,\ldots$ et tout $t>1$, ont été considérés dans [4].

1. Démonstrations

Compte tenu de l'égalité $\int_G f(t)\,g(x/t)\,d\beta(t)=\int_G\check{f}(t)\,g(xt)\,d\beta(t)$ obtenue par le changement de variables $t\mapsto 1/t$, on voit que (1.1) est une conséquence immédiate de [5, Théorème (2.1)].

Démonstration de (1.2.). Il est clair que c) $\Rightarrow$ a) $\cdot$ e) $\Rightarrow$ d) découle immédiatement de (1.1) (i) car on a $\check{R}\preccurlyeq\check{\rho}\preccurlyeq\check{\sigma}$ pour tout R de $\mathcal{R}(\rho)$ et tout $\sigma\prec\rho$ de $\hat{G}$. Pour obtenir b) $\Rightarrow$ c), il suffit de montrer que l'application

---

[4] On note φ_E la fonction caractéristique de l'ensemble $E\subset G$.

[5] dt désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$.

$t \mapsto R(x/t)/\max(\check{\rho}(t), \check{\tau}(t))$ est bornée dans G pour tout $x \in G$. Cette application étant localement bornée dans G, la conclusion résulte de $R(x/t) = \check{R}(t/x) \preccurlyeq \check{\rho}(t/x) = \rho(x)\check{\rho}(t)$ lorsque $t \to +\infty$ et $R(x/t) \preccurlyeq \tau(x/t) = \tau(x)\check{\tau}(t)$ lorsque $1/t \to +\infty$ [5, (1.8)].

a) $\Rightarrow$ b). Remarquons d'abord que $\max(\check{\rho}(t), \check{\tau}(t)) = \check{\tau}(t)$ si $t \leqslant 1$, $= \check{\rho}(t)$ si $t \geqslant 1$. Comme $\rho \in \mathcal{R}(\rho)$, la fonction $f(t)\check{\rho}(t) = \check{\rho}(x)f(t)\rho(x/t)$ est intégrable dans G et par suite dans $]1, \to[$. Il suffit donc de prouver qu'il existe un $\tau \gg \rho$ dans $\hat{G}$ tel que $f\check{\tau}$ soit intégrable dans $]\leftarrow, 1]$. En observant que

(2.1) *Tout χ dans $\hat{G}$ est de la forme $\chi_r(t) = \exp r\beta(]1, t])$ pour $t \geqslant 1$ où r parcourt l'ensemble $\mathbf{R}$; de plus, on a $\chi_r \gg 1$ pour $r > 0$,*

le problème précédant se ramène à:

Il existe un nombre réel $r > 0$ tel que

(2.2) $$\int_{]\leftarrow, 1]} |f(t)|\,\check{\rho}(t)\exp(r\beta(]1, 1/t]))\,d\beta(t) < +\infty.$$

Soit E l'espace vectoriel de toutes les applications mesurables et bornées h de G dans $\mathbf{R}$ égales à 0 dans $]\leftarrow, 1[$ et tendant vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, muni de la norme $\|h\| = \sup_{t\in G}|h(t)|$. E est un *espace de Banach*. Pour h de E et t de G posons

(2.3) $$R(h, t) = \rho(t)\exp\int_{]1, t]} h(s)\,d\beta(s).$$

La fonction $R(h, \cdot)$ est dans $\mathcal{R}(\rho)$. En effet, elle est continue et >0 dans G, $= \rho(t)$ pour $t \leqslant 1$ (par définition). On a, d'autre part, $R(h, xt)/R(h, x) = \rho(t)\exp\int_{]x, xt]} h(s)\,d\beta(s) = \rho(t)\exp\int_{]1, t]} h(xs)\,d\beta(s) \to \rho(t)$ lorsque $x \to +\infty$ (pour $t \geqslant 1$), d'où

$$R(h, xt)/R(h, x) = R(h, xt)/R(h, xt(1/t)) \to 1/\rho(1/t) = \rho(t)$$

lorsque $x \to +\infty$ (pour $t \leqslant 1$).

Posons maintenant $F(h) = \int_{]\leftarrow, 1]} |f(t)|\,R(h, 1/t)\,d\beta(t)$ pour h de E. Alors a) et l'inégalité

$$\begin{aligned}\rho(x)R(h, 1/t)/R(h, x/t) &= \exp\int_G (\varphi_{]1, 1/t]} - \varphi_{]1, x/t]})\,h\,d\beta \\ &\leqslant \exp\|h\|\,\beta(]1, 1/t] \triangle]1, x/t])^{6)} \\ &\leqslant \exp\|h\|\,\beta(]\min(1/t, x/t), \max(1/t, x/t)]) \\ &= \exp\|h\|\,\beta(]\min(1, x), \max(1, x)])\end{aligned}$$

entraînent que *$F(h)$ est un nombre réel (fini).*

Considérons l'application $h \mapsto F(h)$ de E dans $\mathbf{R}$. Si une suite (h_n) dans E converge vers h, on a $F(h) \leqslant \lim\cdot\inf_{n\to\infty} F(h_n)$ (d'après le lemme de Fatou), ce qui montre que F est semi-continue inférieurement dans E. Par conséquent, F est bornée dans une boule fermée de centre k et de rayon $r > 0$. Supposons

---

[6] On note $A \triangle B$ la différence symétrique de deux ensembles A et B.

que k soit à support compact, vu que telles fonctions forment une partie partout dense dans E. Il résulte alors de l'inégalité

$$(2.4)\qquad |\log(R(h,t)/R(h+k,t))|=\left|\int_{]1,t]}(-k)\,d\beta\right|\leqslant\int_{[1,\to[}|k|\,d\beta$$

qu'on peut supposer $k=0$. Soit $M>0$ un nombre réel tel que $F(h)\leqslant M$ pour tout $h\in E$, $\|h\|\leqslant r$. La relation (2.2) découle alors de

$$\int_{]1/x,1]}|f(t)|\,\check{\rho}(t)\exp(r\beta(]1,1/t]))\,d\beta(t)=$$

$$=\int_{]1/x,1]}|f(t)|\,R(r\varphi_{[1,x[},1/t)\,d\beta(t)\leqslant M$$

lorsque $x\to+\infty$.

d) $\Rightarrow$ e). En considérant la partie réelle et la partie imaginaire de f, on peut se borner au cas où la fonction f est réelle.

Il est clair que d) entraîne a). En utilisant b) on voit alors que la fonction $f\check{\tau}$ est intrégrable dans $]\leftarrow,1]$ pour un $\tau\gg\rho$ de $\hat{G}$. Il suffit donc de montrer que $f\check{\sigma}$ est intégrable dans $[1,\to[$ pour un $\sigma\ll\rho$ de $\hat{G}$, ce qui se réduit, compte tenu de (2.1), à:

Il existe un nombre réel $r>0$ tel que

$$(2.5)\qquad \int_{[1,\to[}|f(t)|\,\check{\rho}(t)\exp(r\beta(]1,t]))\,d\beta(t)<+\infty.$$

Appliquant (1.1) (i) à la fonction $f\varphi_{]\leftarrow,1]}$, on obtient

$$\int_{]\leftarrow,1]}f(t)\,R(x/t)\,d\beta(t)\leqslant R(x)$$

et par suite

$$\int_{[1,\to[}f(t)\,R(x/t)\,d\beta(t)\leqslant R(x)$$

pour tout R de $\mathcal{R}(\rho)$. Nous montrerons d'abord

(2.6) *Soit $a\geqslant1$ un élément de G, R un élément de $\mathcal{R}(\rho)$. Si la fonction $\log R$ est localement bornée dans l'intervalle $[a,\to[$, l'application*

$$x\mapsto(1/R(x))\int_{[1,x]}|f(t)|\,R(x/t)\,d\beta(t)$$

de $[a,\to[$ dans $\mathbf{R}$ est bornée.

Pour tout $h\neq0$ de E la fonction $(2\|h\|+h)R\sim2\|h\|R$ est aussi dans $\mathcal{R}(\rho)$ et la fonction $\log(2\|h\|+h)$ est bornée dans G, d'où

$$2\|h\|\int_{[1,\to[}f(t)\,R(x/t)\,d\beta(t)+\int_{[1,\to[}f(t)\,R(x/t)\,h(x/t)\,d\beta(t)\leqslant R(x),$$

$$R(x)\,u_x(h)=\int_{[1,x]}f(x/t)\,R(t)\,h(t)\,d\beta(t)=\int_{[1,x]}f(t)\,R(x/t)\,h(x/t)\,d\beta(t)=$$

$$=\int_{[1,\to[}f(t)\,R(x/t)\,h(x/t)\,d\beta(t)\leqslant R(x).$$

L'application $x\mapsto u_x(h)$, définie par l'égalité précédente, est localement bornée dans $[a,\to[$ pour tout h de E. En effet, pour tout $b\geqslant a$ de G il existe un nombre réel $m>0$ tel que $R(x)\geqslant1/m$ dans $[a,b]$. La fonction f étant localement intégrable (d'après b) et la fonction R localement bornée dans G (par l'hypothèse), la conclusion résulte de l'inégalité

$$|u_x(h)|\leqslant m\|h\|\int_{[1,b]}|f(t)|R(x/t)\,d\beta(t) \qquad (a\leqslant x\leqslant b).$$

La famille $(u_x)_{x\geqslant a}$ des formes linéaires continues sur E est alors bornée dans tout point h de E (i. e. $\sup_{x\geqslant a}|u_x(h)|<+\infty$). Par conséquent, la famille $(\|u_x\|)_{x\geqslant a}$ est bornée, ce qui prouve (2.6).

Enfin, par

$$F_x(h)=\int_{[1,x]}|f(t)|\,(R(h,x/t)/R(h,x))\,d\beta(t)$$

$$=\int_{[1,x]}|f(t)|\,\check{\rho}(t)\exp\Big(-\int_{]x/t,x]}h(s)\,d\beta(s)\Big)\,d\beta(t)$$

$(x\geqslant 1)$ est définie une famille des applications continues de E dans $\mathbf{R}$ bornée dans tout point h de E, vu que $\log R(h,\cdot)$ est localement bornée dans $[1,\to[$. Cette famille est alors uniformément bornée dans une boule fermée de centre k et de rayon $r>0$. On peut supposer d'abord que k est à support compact et puis, en utilisant (2.4), que $k=0$. Soit $M>0$ un nombre réel tel que $F_x(h)\leqslant M$ pour tout $h\in E$, $\|h\|\leqslant r$ et tout $x\geqslant 1$. La relation (2.5) résulte alors de

$$\int_{[1,x]}|f(t)|\,\check{\rho}(t)\exp(r\beta(]1,t]))\,d\beta(t)=F_x(-r\varphi_{[1,x]})\leqslant M$$

lorsque $x\to+\infty$.

D é m o n s t r a t i o n d e (1.3). Posons $w=\max(\check{\sigma},\check{\tau})$, $v=1/\check{w}$. Les fonctions v et w sont continues et >0 dans G. On a de plus $w(st)\leqslant w(s)\,w(t)$, $v(st)\leqslant v(s)\,w(t)$ pout tout s et t de G.

Désignons par $L^w=L^w(G)$ l'algèbre de Banach commutative pour le produit de convolution des fonctions complexes $w\beta$-intégrables dans G, par $L^{w\sim}$ l'algèbre déduite de L^w par adjonction d'un élément unité (ε_1 = mesure de Dirac en 1) si $G=\mathbf{R}_+^*$, L^w si $G=\mathbf{Z}$. Soit $\hat{G}(w)$ l'ensemble des homomorphismes continus χ de G dans $\mathbf{C}^*$ vérifiant $\sigma\leqslant\chi\leqslant\tau$. Alors $\lambda\varepsilon_1+f\in L^{w\sim}$ (d'après a)) est inversible (d'après c)), vu que les caractères de $L^{w\sim}$ sont les applications $\alpha\varepsilon_1+h\mapsto\alpha+\int_G h\check{\chi}\,d\beta\ (\chi\in\hat{G}(w))$ [6, §§ 18, 19]. Soient $f_\lambda\in L^w$ et $\mu\in\mathbf{C}$ tels que $\mu\varepsilon_1+f_\lambda=(\lambda\varepsilon_1+f)^{-1}$ et, par suite, $\mu+\int_G f_\lambda\check{\rho}\,d\beta=\big(\lambda+\int_G f\check{\rho}\,d\beta\big)^{-1}$.

La fonction gv étant bornée (d'après b)), l'inégalité

$$|f(t)\,g(x/t)|\,v(x)\leqslant|f(t)|\,w(t)\,|g(x/t)|\,v(x/t) \quad (x,\ t\in G)$$

montre que la fonction $(f*g)\,v$, où $(f*g)(x)=\int_G f(t)\,g(x/t)\,d\beta(t)$ pour x de G, est aussi bornée; il en est de même de $g_\lambda v=(\lambda g+f*g)\,v$. Les fonctions f et g étant convolables, il en sera de même de f_λ et $|f|*|g|$. Par conséquent, $f_\lambda*(f*g)=(f_\lambda*f)*g$, d'où

$$g=\varepsilon_1*g=\big((\mu\varepsilon_1+f_\lambda)*(\lambda\varepsilon_1+f)\big)*g=(\mu\varepsilon_1+f_\lambda)*\big((\lambda\varepsilon_1+f)*g\big)=$$

$$=(\mu\varepsilon_1+f_\lambda)*g_\lambda=\mu g_\lambda+f_\lambda*g_\lambda,$$

ce qui peut s'écrire

$$g(x)=\mu g_\lambda(x)+\int_G f_\lambda(t)\, g_\lambda(x/t)\, d\beta(t) \quad \textit{presque partout dans } G.$$

Cette égalité est vraie pour *tout* x de G car les fonctions

$$(\mu g_\lambda - g)(x)=\mu\int_G f(t)\, g(x/t)\, d\beta(t) \quad (\lambda\neq 0) \quad \text{et} \quad \int_G f_\lambda(t)\, g_\lambda(x/t)\, d\beta(t)$$

sont continues dans G. Cela étant, une application de (1.1) termine la démonstration.

D é m o n s t r a t i o n d e (1.4). La démonstration de la première partie de (1.4) est identique à celle de (1.3). Nous allons prouver la deuxième.

Soient σ, τ deux éléments de $\bar{\hat{G}}=\hat{G}\cup\{\sigma_\infty, \tau_\infty\}$ vérifiant $\sigma\lll\rho\lll\tau$, $(\sigma,\tau)\neq(\sigma_\infty,\tau_\infty)$ et tels que la fonction $f\ \max(\check{\sigma},\check{\tau})$ soit intégrable. Posons $\sigma_0=\rho$ ($\tau_0=\rho$) si l'on a remplacé σ par ρ (τ par ρ), $\sigma_0=\sigma$ ($\tau_0=\tau$) dans le cas opposé. Par l'hypothèse la fonction $g/\max(\sigma_0,\tau_0)$ est bornée. Pour tout σ', τ' de $\bar{\hat{G}}$ vérifiant $\sigma\leqslant\sigma'\leqslant\sigma_0$, $\tau_0\leqslant\tau'\leqslant\tau$ la fonction $f\ \max(\check{\sigma}',\check{\tau}')$ est intégrable et la fonction $g/\max(\sigma',\tau')$ est bornée car $\max(\check{\sigma}',\check{\tau}')\leqslant\max(\check{\sigma},\check{\tau})$ et $\max(\sigma_0,\tau_0)\leqslant\leqslant\max(\sigma',\tau')$. Il suffit, d'après la première partie du théorème, de montrer qu'il existe σ', τ' dans $\bar{\hat{G}}$ tels que l'on a $\sigma\leqslant\sigma'\leqslant\sigma_0$, $\tau_0\leqslant\tau'\leqslant\tau$, $\sigma'\lll\rho\lll\tau'$ et

$$\hat{f}(\chi)=\int_G f\check{\chi}\, d\beta\neq-\lambda \quad \textit{pour tout } \chi \textit{ de } \bar{\hat{G}}(\sigma',\tau')$$

où $\bar{\hat{G}}(\sigma',\tau')$ désigne l'ensemble des homomorphismes continus χ de G dans $\mathbf{C}^*$ vérifiant $\sigma'\leqslant\chi\leqslant\tau'$.

On conserve les notations de la démonstration de (1.3).

Soit $G=\mathbf{R}_+^*$. Par l'identification donnée dans (1.5) l'espace des caractères d'algèbre de Banach $L^w(\mathbf{R}_+^*)$ s'identifie à la partie $U(\sigma,\tau)$ de $\mathbf{C}$ formée des nombres complexes z vérifiant $\sigma\leqslant\mathcal{R}z\leqslant\tau$ [6, § 18] et la transformation de Gelfand de f s'identifie à la fonction

$$\hat{f}(z)=\int_0^\infty f(t)\, t^{-z}\frac{dt}{t}$$

sur $U(\sigma,\tau)$. Comme $\hat{f}$ est continue et tend vers 0 à l'infini sur $U(\sigma,\tau)$, l'ensemble $N=\hat{f}^{-1}(-\lambda)$ sera compact; on a, d'autre part, $U(\sigma_0,\tau_0)\cap N=\varnothing$. Si $\sigma_0=\rho$ (resp. $\tau_0=\rho$), il suffit de prendre $\sigma'\in]m,\rho[$ (resp. $\tau'\in]\rho, M[$) où $m=\max\{\mathcal{R}z\,|\,z\in N, \mathcal{R}z<\rho\}$ (resp. $M=\min\{\mathcal{R}z\,|\,z\in N, \mathcal{R}z>\rho\}$).

Soit $G=\mathbf{Z}$. En identifiant un homomorphisme χ de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{C}^*$ au nombre complexe z tel que $\chi(n)=z^n$ pour tout entier n et désignant z par χ si χ est strictement positif, on peut identifier l'espace des caractères d'algèbre de Banach $L^w(\mathbf{Z})$ à la partie $U(\sigma,\tau)$ de $\mathbf{C}$ formée des nombres complexes z vérifiant $\sigma\leqslant|z|\leqslant\tau$ [6, § 19], la transformation de Gelfand de f à la fonction $\hat{f}(z)==\sum_{n\in\mathbf{Z}}f(n)\, z^{-n}$ sur $U(\sigma,\tau)$. Comme la fonction $\hat{f}$ est continue, l'ensemble $N=\hat{f}^{-1}(0)$ sera compact; on a, d'autre part, $U(\sigma_0,\tau_0)\cap N=\varnothing$. Si $\sigma_0=\rho$ (resp. $\tau_0=\rho$), il suffit de prendre $\sigma'\in]m,\rho[$ (resp. $\tau'\in]\rho, M[$) où $m=\max\{|z|\,|\,z\in N, |z|<\rho\}$ (resp. $M=\min\{|z|\,|\,z\in N, |z|>\rho\}$).

RÉFÉRENCES

[1] J. Karamata, *Sur un mode de croissance régulière des fonctions*, Mathematica, Cluj, 4 (1930), 38—53.

[2] J. Karamata, *Sur un mode de croissance régulière, Théorèmes fondamentaux*, Bull. Soc. Math. France 61 (1933), 55—62.

[3] R. Bojanić and M. Vuilleumier, *Asymptotic Properties of Linear Operators*, Enseignement Math. 19 (1973), 283—308.

[4] S. Aljančić, *Asymptotische Mercersätze für Hölder-und Cesàro-Mittel*, Publ. Inst. Math., Beograd, 17 (31) (1974), 5—16.

[5] D. Aranđelović, *Fonctions à comportement régulier et convergence uniforme*, Publ. Inst. Math., Beograd, 19 (33) (1975), 17—24.

[6] I. M. Gelfand, D. A. Raikov, G. E. Šilov, *Commutative normed rings*, Gostehizdat, Moscow, 1960 (Russian).

Omladinskih brigada 212/21
11070 Beograd, Yougoslavie