PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 20 (34), 1976, pp. 209–214

SUR CERTAINES INÉGALITÉS PARTICULIÈRES

D. M. Simeunović

(Communiqué le 23 Mai 1975)

Nous démontrons, dans ce travail, certaines inégalités particulières à partir d'une inégalité intégrale obtenue dans [1]. Celles-ci renforcent, entre autres, certaines inégalités connues.

On considère, dans [1], une fonction de la forme

$$I(t)=\int_a^b \{f(x)\}^t g(x)\,dx^{1)} \tag{a}$$

et on y démontre que:

Etant donné, sur le segment $[a, b]$, *deux fonctions non négatives,* $f(x)$ *et* $g(x)$, *et un paramètre réel* t, *tels qu'existe la fonction*

$$I(t)=\int_a^b \{f(x)\}^t g(x)\,dx,$$

nous avons pour $I(t)$ *l'inégalité*

$$I(s+\alpha+\beta)\leq\{I(s+\alpha p)\}^{\frac{1}{p}}\{I(s+\beta q)\}^{\frac{1}{q}}\quad\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, p>1\right) \tag{1}$$

à condition qu'existent les intégrales du second membre.

Remarque. Nous aurions des inégalités contraires à (1) pour $p<0$ ou $q<0$.

L'inégalité (1) était appliquée à des choix simples de fonctions $f(x)$ et $g(x)$, et au cas $p=q=2$, ce qui a permis d'obtenir plusieurs inégalités particulières, entre autres

$$b^r-a^r\geqslant r(b-a)(\sqrt{ab})^{r-1}\qquad(b\geqslant a>0, r\geqslant 1) \tag{2}$$

et

$$b^r-a^r\leqslant r(b-a)(\sqrt{ab})^{r-1}\qquad(b\geqslant a>0, 0\leqslant r\leqslant 1) \tag{3}$$

L'inégalité (2) devient une égalité pour $b=a$ ou $r=1$.

L'inégalité (3) se réduit à égalité pour $b=a$ ou $r=0$, respectivement $r=1$.

---

[1]) Le segment $[a,b]$ peut être infini.

On peut obtenir, à partir de (1), pour un choix différent de fonctions $f(x)$ et $g(x)$, diverses inégalités. Nous nous arréterons ici sur un cas simple, quant au choix des fonctions $f(x)$ et $g(x)$, avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et $p>1$.

Nous considérerons ici l'inégalité (1) pour $f(x)=x$, $g(x)=\frac{1}{x}$. Dans ce cas on a d'après (a)

$$I(t)=\int_a^b x^t\cdot\frac{1}{x}\,dx=\int_a^b x^{t-1}dx. \tag{a_1}$$

De (a_1) on a

$$I(s+\alpha+\beta)=\frac{b^{s+\alpha+\beta}-a^{s+\alpha+\beta}}{s+\alpha+\beta}\qquad(s+\alpha+\beta\neq 0)$$

$$I(s+\alpha p)=\frac{b^{s+\alpha p}-a^{s+\alpha p}}{s+\alpha p}\qquad(s+\alpha p\neq 0)$$

$$I(s+\beta q)=\frac{b^{s+\beta q}-a^{s+\beta q}}{s+\beta q}\qquad(s+\beta q\neq 0)$$

D'après (1) on a dans ce cas

$$\frac{b^{s+\alpha+\beta}-a^{s+\alpha+\beta}}{s+\alpha+\beta}\leqslant\left(\frac{b^{s+\alpha p}-a^{s+\alpha p}}{s+\alpha p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{b^{s+\beta q}-a^{s+\beta q}}{s+\beta q}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4}$$

$$\left(b\geqslant a>0,\quad s+\alpha+\beta\neq 0,\quad s+\alpha p\neq 0,\quad s+\beta q\neq 0,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\quad p>1\right).$$

Pour $b=a$ ou $\alpha=\frac{1}{p}$, $\beta=\frac{1}{q}$, (4) se réduit à une égalité.

De (4) on peut obtenir une suite d'inégalités particulières.

Pour $s=1$, $\alpha=1$, $\beta=0$, $p=r-1\,(r>2)$, $q=\frac{r-1}{r-2}$, $b\geqslant a>0$, on obtient de (4) l'inégalité

$$b^r-a^r\geqslant r\,(b-a)\left(\frac{a+b}{2}\right)^{r-1}\quad(b\geqslant a>0,\ r\geqslant 2) \tag{4.1}$$

L'expression ci-dessus devient une égalité pour $b=a$ ou $r=2$.
L'inégalité (4.1) est aussi valable pour $r=1$, elle devient alors une égalité.

L'inégalité (4.1) est plus précise que (2) pour $r>2$.

Pour $r\leqslant 2$ (4.1) devient l'inégalité de sens contraire, c'est-à-dire

$$b^r-a^r\leqslant r\,(b-a)\left(\frac{a+b}{2}\right)^{r-1}\qquad(b\geqslant a>0,\ r\leqslant 2) \tag{4.2}$$

L'inégalité (4.2) se réduit à égalité pour $b=a$ ou $r=2$, respectivement $r=1$.

D'après (2) et (4.2) on obtient

$$r(b-a)\left(\frac{a+b}{2}\right)^{r-1}\geqslant b^r-a^r\geqslant r(b-a)(\sqrt{ab})^{r-1}\qquad(b\geqslant a>0,\ 1\leqslant r\leqslant 2).$$

On peut obtenir de (4.1) et (4.2) diverses inégalités particulières.

Pour $b=2n+1$, $a=2n-1$, $r=n>2$ (n entier positif) l'inégalité (4.1) se réduit à

$$(2n-1)^n+(2n)^n<(2n+1)^n\qquad(n=3,4,\dots).$$

La dernière inégalité est donnée, comme problème, par C.M. Frye [2] (voir également [3], p. 190). Une solution de ce problème est donnée dans [4].

En posant, dans (4.1) $b=x^s$, $a=x^{-s}$ ($x\geqslant 1$, $s\geqslant 0$), on obtient l'inégalité

$$x^{rs}-x^{-rs}\geqslant r(x^s-x^{-s})\left(\frac{x^s+x^{-s}}{2}\right)^{r-1}\qquad(x\geqslant 1,\ r\geqslant 2,\ s\geqslant 0)$$

laquelle se réduit pour $x=e$, à l'inégalité

$$shrs\geqslant rshs\,(chs)^{r-1}\qquad(r\geqslant 2,\ s\geqslant 0).$$

La dernière inégalité est plus précise que

$$shrs\geqslant rshs\qquad(r\geqslant 1,\ s\geqslant 0),$$

pour $r>2$ (voir [1] p. 103).

L'application de l'inégalité (4.1) permet de démontrer que:

Pour une fonction $f(x)$, représentée par la série de Taylor

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_kx^k \tag{5}$$

convergente pour $|x|<R$, avec les coefficients $c_k\geqslant 0$ $(k=2,3,\dots)$, nous avons l'inégalité

$$f(b)-f(a)\geqslant(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\qquad(R>b\geqslant a\geqslant 0). \tag{6}$$

Démonstration. On a, d'après (5)

$$f(b)-f(a)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k(b^k-a^k).$$

Mais, puisque d'après (4.1),

$$b^k-a^k\geqslant k(b-a)\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k-1}\qquad(k=1,\dots)$$

il résulte que (7) se réduit à

$$f(b)-f(a)\geqslant(b-a)\sum_{k=0}^{\infty}kc_k\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k-1}. \tag{8}$$

A cause de

$$f'\left(\frac{a+b}{2}\right)=\sum_{k=1}^{\infty} kc_k\left(\frac{a+b}{2}\right)^{k-1},$$

l'inégalité (8) se réduit, en fait, à (6).

Exemple. Etant donné que

$$chx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2k!}\quad\left(c_k=\frac{1}{2k!}>0,\qquad k=0,\,1,\,2,\,\ldots;\,|x|<\infty\right)$$

nous avons

$$chb-cha\geqslant(b-a)sh\left(\frac{a+b}{2}\right)\quad(b\geqslant a\geqslant 0).$$

Pour $b\geqslant a>0$, on obtient de (a_1):

$$I(0)=\ln b-\ln a$$

$$I(p-1)=\frac{b^{p-1}-a^{p-1}}{p-1}\qquad(p\neq 1)$$

$$I(-1)=\frac{b-a}{ab}.$$

L'inégalité (1), pour $s=-1,\quad \alpha=1,\quad \beta=0,\quad p>1,\quad q=\frac{p}{p-1}$, se réduit à

$$I(0)\leqslant\left\{I(p-1)\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{I(-1)\right\}^{\frac{p-1}{p}},$$

c'est-à-dire à

$$\ln b-\ln a\leqslant\left(\frac{b^{p-1}-a^{p-1}}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\frac{b-a}{ab}\right)^{\frac{p-1}{p}},$$

d'où on obtient, pour $b>a>0$, l'inégalité suivante

(9) $$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\left(\frac{b^{p-1}-a^{p-1}}{(p-1)(b-a)(ab)^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}\qquad(b>a>0,\ p>1)$$

En posant, dans (9). $b=x>1,\ a=1$, on obtient

(9.1) $$\frac{\ln x}{x-1}<\left(\frac{x^{p-1}-1}{(p-1)(x-1)x^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}(x>1,\ p>1)$$

En substituant, dans (9.1), $\frac{1}{x}$ à x, on obtient de nouveau l'inégalité (9.1), ce que signifie que nous avons aussi

(9.2) $$\frac{\ln x}{x-1}<\left(\frac{x^{p-1}-1}{(p-1)(x-1)x^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}\qquad(x>0,\ x\neq 1,\ p>1)$$

Pour $p=2$ l'inégalité (9.2) se réduit à

(9.3) $$\frac{\ln x}{x-1}<\frac{1}{\sqrt{x}} \qquad (x>0,\ x\neq 1),$$

l'expression obtenue par J. Karamata [5].

Pour $1<p<2$ l'inégalité (9.2) est plus stricte que l'inégalité (9.3). En effet, si on substitue, dans (3), x à b, 1 à a, et $p-1$ à $r\,(0<p-1<1)$, on obtiendra

$$x^{p-1}-1<(p-1)(x-1)(\sqrt{x})^{p-2} \qquad (x>1,\ 1<p<2)$$

d'où

$$\frac{x^{p-1}-1}{(p-1)(x-1)\,x^{p-1}}<\frac{1}{(\sqrt{x})^p},$$

donc

(10) $$\left(\frac{x^{p-1}-1}{(p-1)(x-1)x^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}<\left(\frac{1}{(\sqrt{x})^p}\right)^{\frac{1}{p}}=\frac{1}{(\sqrt{x})} \qquad (x>1,\ 1<p<2).$$

Si on substitue, dans (10), $\frac{1}{x}$ à x, on obtient de nouveau l'inégalité (10), à la suite de quoi on a

$$\left(\frac{x^{p-1}-1}{(p-1)(x-1)\,x^{p-1}}\right)^{\frac{1}{p}}<\frac{1}{\sqrt{x}} \qquad (x>0,\ x\neq 1,\ 1<p<2).$$

Pour $b\geqslant a>0$, on obtient de (a_1)

$$I(1)=b-a$$

$$I(p)=\frac{b^p-a^p}{p} \qquad (p\neq 0)$$

$$I(0)=\ln b-\ln a.$$

L'inégalité (1), pour $s=0$, $\alpha=1$, $\beta=0$, $p>1$, $q=\frac{p}{p-1}$, se réduit à

$$I(1)\leqslant\{I(p)\}^{\frac{1}{p}}\,\{I(0)\}^{\frac{p-1}{p}},$$

c'est-à-dire à

$$b-a\leqslant\left(\frac{b^p-a^p}{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\ln b-\ln a\right)^{\frac{p-1}{p}},$$

d'où on obtient, pour $b>a>0$, l'inégalité

(11) $$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}>\left(\frac{p\,(b-a)}{b^p-a^p}\right)^{\frac{1}{p-1}} \qquad (b>a>0,\ p>1).$$

Pour $p=2$, (11) se réduit à

$$\frac{\ln b - \ln a}{b-a} > \frac{2}{b+a} \qquad (b>a>0) \tag{11.1}$$

Il existe plusieurs preuves de l'inégalité (11.1). L'une d'elles est donnée dans [6], une autre dans [7, p. 158], une troisième dans [8, p. 192], deux autres preuves dans [9, pp. 273 et 274], et une enfin dans [1].

Pour $1<p<2$ l'inégalité (11) est plus précise que (11.1). En effet, d'après (4.2) on a

$$b^p - a^p < p(b-a)\left(\frac{a+b}{2}\right)^{p-1} \qquad (b>a>0, 1<p<2)$$

d'où

$$\frac{p(b-a)}{b^p-a^p} > \left(\frac{2}{b+a}\right)^{p-1},$$

donc

$$\left(\frac{p(b-a)}{b^p-a^p}\right)^{\frac{1}{p-1}} > \frac{2}{b+a} \qquad (b>a>0,\ 1<p<2).$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. M. Simeunović, *Sur certaines inégalités intégrales et leurs applications.* Publ. Inst. Math. (Beograd) 11 (25) (1971), 99—105.

[2] C. M. Frye, *Problem E* 1264, Amer. Math. Monthly 70 (1963), 891.

[3] D. S. Mitrinović (Saradnik P. M. Vasić), *Analitičke nejednakosti* Beograd 1970,

[4] Amer. Math. Monthly 71(1964), 683.

[5] J. Karamata, Vesnik Društva matematičara i fizičara SRS, knjiga I, sveska 1 (1949), 78—79, Pitanja i zadaci.

[6] B. Ostle and H. L. Terwillinger, Proceedings of the Montana Academy of Sciences, 17 (1957), 69—70.

[7] D. S. Mitrinović, *Elementary Inequalities*, Groningen 1964.

[8] D. S. Mitrinović, *Nejednakosti*, Beograd 1965.

[9] D. S. Mitrinović *Analytic inequalities*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.