PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 20 (34), 1976, pp. 9—27

QUELQUES COMPLÉMENTS AUX RÉSULTATS DU TRAVAIL „SUR LA CONVERGENCE DES RAPPORTS DE LA SOMME PARTIELLE AU TERME GÉNÉRAL ET DU RESTE AU TERME GÉNÉRAL D'UNE SÉRIE RÉELLE OU COMPLEXE"

Dušan D. Adamović

(Communiqué le 29. août 1975.)

0. Soit dans ce qui suit:

C l'ensemble des nombers complexes, **R** celui des nombres réels, **N** celui des nombres naturels, $\mathbf{N}_0=\mathbf{N}\cup\{0\}$, $\mathbf{C}_\infty=\mathbf{C}\cup\{\infty\}$;

$(a_n)_{n\in N_0}$ une suite de nombres complexes ou réels, différents de zéro pour n suffisamment grand,

$$S_n=\sum_{k=0}^{n} a_k \qquad (n\in N_0);$$

dans le cas où la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \tag{1}$$

converge (avec une somme finie),

$$S=\sum_{k=0}^{+\infty} a_k, \quad R_n=\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \qquad (n\in \mathbf{N}_0).$$

Par le symbole $\alpha_n\uparrow+\infty$ nous désignons le fait que la suite de nombres réels $(\alpha_n)_{n\in N_0}$ croît *strictement* pour n suffisamment grand et tend vers $+\infty$, et par $\alpha_n\downarrow 0$ le fait qu'elle décroît *strictement* pour n suffisamment grand et tend vers 0.

Dans cette Note, nous allons donner plusieurs compléments à notre travail [1], dans lequel nous avons traité la question suivante: sous quelles conditions on a, pour un nombre complexe w donné,

$$(\mathrm{I_w})\ \lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{a_n}=w, \qquad \text{ou bien} \qquad (\mathrm{II_w})\ \lim_{n\to+\infty}\frac{R_n}{a_n}=w?$$

Nous y avons distingué le *cas complexe*, c'est-à-dire le cas général où $a_n\in\mathbf{C}$ $(n\in\mathbf{N}_0)$ et $w\in\mathbf{C}$, du *cas réel*, où $a_n\in\mathbf{R}$ $(n\in\mathbf{N}_0)$ et $w\in\mathbf{R}$. Dans le cas réel nous avons considéré aussi $(\mathrm{I_w})$ et $(\mathrm{II_w})$ avec les valeurs $w=-\infty$ et $w=+\infty$.

D'autre part, dans le cas complexe la convergence d'une suite (z_n) vers ∞, désignée par $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=\infty$, signifiait, comme d'habitude, que $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n|=+\infty$. Cette dénomination et la désignation correspondante étaient évitées dans le cas réel, où il s'agissait, d'autre part, de la convergence vers $-\infty$ et vers $+\infty$. Dans le texte qui suit nous allons garder les mêmes significations de termes et de symboles, en y ajoutant le terme *cas complexe au sens large* pour désigner le cas où dans $(\mathrm{I_w})$ et $(\mathrm{II_w})$ w prend les valeurs de $\mathbf{C}_\infty$, $(a_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ restant toujours une suite de nombres complexes.

Entre autre, nous avons démontré dans [1] les théorèmes suivants:

Théorème A (*théorème* 2 *dans* [1]). *Dans le cas complexe et pour* $\mathrm{Re}\,(w)\neq\frac{1}{2}$:

1° *on a* $(\mathrm{I_w})$ *si et seulement si*

$$(\mathrm{I'_w})\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{w}{w-1}\wedge S=0 \text{ pourvu que la série (1) converge;}$$

2° *on a* $(\mathrm{II_w})$ *si et seulement si*

$$(\mathrm{II'_w})\qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{w-1}{w}\wedge \text{ la série (1) converge.}$$

Théorème B (*théorème* 3 *dans* [1]). *Dans le cas complexe, pour tout* $w\in C$ *satisfaisant à* $\mathrm{Re}\,(w)=\frac{1}{2}$:

1° *la condition* $(\mathrm{I'_w})$ *est nécessaire et n'est pas suffisante pour* $(\mathrm{I_w})$;

2° *la condition* $(\mathrm{II'_w})$ *est nécessaire et n'est pas suffisante pour* $(\mathrm{II_w})$.

En particulier, s'il s'agit du cas réel avec $w=\frac{1}{2}$:

3° *la condition*

$$(\mathrm{I'})\qquad \begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=-1\left(=\dfrac{^1/_2}{^1/_2-1}\right)\wedge\dfrac{a_n+a_{n+1}}{a_{n+1}+a_{n+2}}\text{ converge (vers }-1)\\ \wedge[\,|a_n|\uparrow+\infty\vee(|a_n|\downarrow 0\wedge S=0)]\end{cases}$$

est suffisante pour $(\mathrm{I}_{1/2})$;

4° *la condition*

$$(\mathrm{II'})\qquad \lim_{n\to-\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=-1\left(=\frac{^1/_2-1}{^1/_2}\right)\wedge\frac{a_n+a_{n+1}}{a_{n+1}+a_{n+2}}\text{ converge (vers }-1)\wedge|a_n|\downarrow 0$$

est suffisante pour $(\mathrm{II}_{1/2})$.

Théorème C (*théorème 3 dans* [1]). *Dans le cas réel*:

1° *chacune des conditions suivantes*

$(\mathrm{I}'_{+\infty})$ $a_n>0$ *pour* n *suffisamment grand* $\wedge$ (1) *converge avec* $S>0$;

$(\mathrm{I}''_{+\infty})$ $a_n<0$ *pour* n *suffisamment grand* $\wedge$ (1) *converge avec* $S<0$;

$$(\mathrm{I}'''_{+\infty}) \quad \begin{cases} a_n \text{ est de signe constant pour } n \text{ suffisament grand} \\ \wedge\, (1) \text{ diverge} \wedge \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=1 \end{cases}$$

est suffisante pour $(\mathrm{I}_{+\infty})$;

2° *chacune des conditions*

$(\mathrm{I}'_{-\infty})$ $a_n>0$ *pour* n *suffisamment grand* $\wedge$ (1) *converge avec* $S<0$;

$(\mathrm{I}''_{-\infty})$ $a_n<0$ *pour* n *suffisamment grand* $\wedge$ (1) *converge avec* $S>0$;

$$(\mathrm{I}'''_{-\infty}) \quad (1) \text{ converge avec } S=0 \wedge \underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=1$$

est suffisante pour $(\mathrm{I}_{-\infty})$;

3° *l'inégalité*

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1$$

est une condition nécessaire pour $(\mathrm{I}_{+\infty})$, *de même que pour* $(\mathrm{I}_{-\infty})$;

4° *la condition*

$$(\mathrm{II}'_{-\infty}) \qquad (1) \text{ converge} \wedge \underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=1$$

est suffisante pour $(\mathrm{II}_{+\infty})$;

5° *l'égalité* $(\mathrm{II}_{-\infty})$ *n'est pas possible.*

Corollaire de C. *L'égalité*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=1 \tag{2}$$

entraîne $(\mathrm{I}_{+\infty})$ *ou* $(\mathrm{I}_{-\infty})$, *suivant qu'il s'agit des cas où* (1) *diverge ou converge avec* $a_nS>0$ *pour* n *suffisamment grand, d'une part, ou du cas où* (1) *converge avec* $a_nS\leqslant 0$ *pour* n *suffisamment grand, d'autre part. L'égalité* (2) *et la convergence de* (1) *entraînent* $(\mathrm{II}_{+\infty})$.

1. On peut dire que le théorème A et la première partie du théorème B se rapportent à la liaison entre l'égalité (I_w) et la condition (I'_w), de même qu'entre l'égalité (II_w) et la condition (II'_w). Si l'on pose

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}=\zeta,$$

cette limite dans $(\mathrm{I}'_{\mathrm{w}})$ est liée à w de $(\mathrm{I}_{\mathrm{w}})$ par la relation

$$\zeta=\frac{w}{w-1}\quad\left(\Leftrightarrow\ w=\frac{\zeta}{\zeta-1}\right), \tag{3}$$

et la même limite dans $(\mathrm{II}'_{\mathrm{w}})$ et w de $(\mathrm{II}_{\mathrm{w}})$ sont liés par

$$\zeta=\frac{w-1}{w}\quad\left(\Leftrightarrow\ w=\frac{1}{1-\zeta}\right). \tag{4}$$

D'après A, pour $\operatorname{Re}(w)\neq\frac{1}{2}$ on a $(\mathrm{I}_{\mathrm{w}})\Leftrightarrow(\mathrm{I}'_{\mathrm{w}})$ et $(\mathrm{II}_{\mathrm{w}})\Leftrightarrow(\mathrm{I}'_{\mathrm{w}})$. D'après la première partie de B, ces liaisons entre $(\mathrm{I}_{\mathrm{w}})$ et $(\mathrm{I}'_{\mathrm{w}})$, et entre $(\mathrm{II}_{\mathrm{w}})$ et $(\mathrm{II}'_{\mathrm{w}})$, sont moins étroites pour tout $w\in\mathbf{C}$ satisfaisant à $\operatorname{Re}(w)=\frac{1}{2}$: elle se réduisent pour ces valeurs à $(\mathrm{I}_{\mathrm{w}})\Rightarrow(\mathrm{I}'_{\mathrm{w}})$ et à $(\mathrm{II}_{\mathrm{w}})\Rightarrow(\mathrm{II}'_{\mathrm{w}})$. Or, la droite „singulière" $\operatorname{Re}(w)=\frac{1}{2}$ dans le plan des w correspond, selon (3), de même que selon (4) au cercle unité non complet

$$|\zeta|=1\wedge\zeta\neq 1$$

dans le plan des ζ (voir les figures 1 et 2). D'après chacune des relations

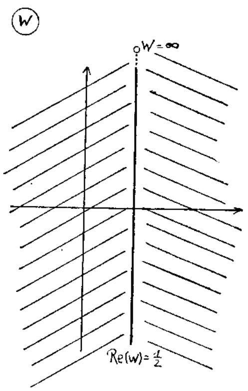

Fig. 1

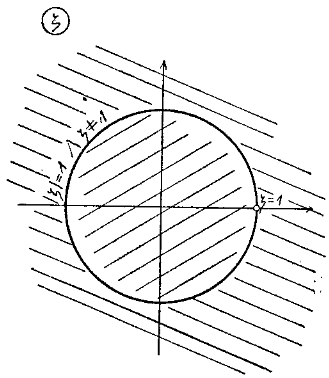

Fig. 2

(3) et (4), les valeurs $w=\infty$ et $\zeta=1$ sont mutuellement correspondantes. C'est à ce cas particulier, qui n'a pas été traité dans [1], que se rapporte l'énoncé suivant.

Théorème 1. *Dans le cas complexe au sens large:*

1° *la condition*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1\wedge S=0\ \textit{pourvu que}\ (1)\ \textit{converge} \tag{I'_∞}$$

n'est ni nécessaire ni suffisante pour

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{a_n}=\infty; \tag{I_∞}$$

2° *la condition*

$$(\mathrm{II}'_\infty) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \wedge (1) \text{ converge}$$

n'est ni nécessaire ni suffisante pour

$$(\mathrm{II}_\infty) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{R_n}{a_n} = \infty;$$

3° *sous l'hypothèse*

$$(5) \qquad \mathrm{Im}\left(\frac{S_n}{a_n}\right) = 0(1) \quad (n\to+\infty),$$

la condition (I'_∞) *est suffisante pour* (I_∞), *plus précisément, pour qu'on ait*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{S_n}{a_n}\right) = -\infty \vee \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{S_n}{a_n}\right) = +\infty;$$

4° *sous l'hypothèse*

$$(6) \qquad \mathrm{Im}\left(\frac{R_n}{a_n}\right) = 0(1) \quad (n\to+\infty),$$

la condition (I'_∞) *est suffisante pour* (I_∞), *plus précisément, pour qu'on ait*

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{R_n}{a_n}\right) = -\infty \vee \lim_{n\to+\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{R_n}{a_n}\right) = +\infty;$$

Remarque. Il résulte immédiatement des assertions 3° et 4° du théorème précédent que dans le cas réel (I'_∞) entraîne

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{a_n} = -\infty \vee \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{a_n} = +\infty$$

et (II'_∞) entraîne

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{R_n}{a_n} = -\infty \vee \lim_{n\to+\infty} \frac{R_n}{a_n} = +\infty.$$

Cependant, cette conclusion est contenue dans le corollaire cité du théorème C (en réalité, ce corollaire est plus précis que cette conclusion).

Dans la démonstration du théorème 1 on va s'appuyer sur les deux lemmes suivants.

Lemme 1. *Pour deux suites de nombres complexes*

$$(z_n)_{n\in\mathbf{N}_0} \quad \text{et} \quad (c_n)_{n\in\mathbf{N}_0},$$

la conjonction

$$(7) \qquad \begin{cases} |c_n| = 1 \ (n\in\mathbf{N}_0) \wedge \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 1 \wedge z_0 = 1 \\ \wedge z_{n+1} = 1 + c_n z_n \ (n\in\mathbf{N}_0) \end{cases}$$

n'entraîne pas $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = \infty$.

Démonstration. Soit:

$$\varepsilon_n = e^{\frac{2\pi}{n}i} \quad (n \in \mathbf{N}); \tag{8}$$

$$c_0 = \varepsilon_2, \ c_1 = c_2 = c_3 = \varepsilon_3, \ c_4 = c_5 = c_6 = c_7 = \varepsilon_4,$$

$$c_8 = c_9 = c_{10} = c_{11} = c_{12} = \varepsilon_5, \ c_{13} = \cdots = c_{18} = \varepsilon_6, \ \ldots;$$

$$z_0 = 1, \ z_{n+1} = 1 + c_n z_n \quad (n \in \mathbf{N}_0).$$

Dans ce cas-là on a évidemment $|c_n| = 1$ $(n \in \mathbf{N}_0)$, $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = 1$, et aussi:

$$z_0 = 1, \ z_1 = 1 + \varepsilon_2 = 0, \ z_2 = 1 + \varepsilon_3 \cdot 0 = 1, \ z_3 = 1 + \varepsilon_3,$$

$$z_4 = 1 + \varepsilon_3 + \varepsilon_3^2 = 0, \ z_5 = 1 + \varepsilon_4 \cdot 0 = 1, \ z_6 = 1 + \varepsilon_4,$$

$$z_7 = 1 + \varepsilon_4 + \varepsilon_4^2, \ z_8 = 1 + \varepsilon_4 + \varepsilon^2{}_4 + \varepsilon_4^3 = 0, \ z_9 = 1 + \varepsilon_5 \cdot 0 = 1, \ \ldots .$$

Donc, ces suites $(z_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$ et $(c_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$ satisfont à (7) et la première d'elles ne tend pas vers ∞, prenant une infinité de fois la valeur 0 (et une infinité de fois la valeur 1).

Lemme 2. *La conjonction des conditions*

$$z_{n+1} = d_n + c_n z_n \quad (n \in \mathbf{N}_0), \tag{9}$$

$$\lim_{n \to +\infty} c_n = 1, \tag{10}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \operatorname{Re}(d_n) = \gamma \neq 0 \quad et \quad \operatorname{Im}(z_n) = 0(1) \quad (n \to +\infty)$$

entraîne

$$\lim_{n \to +\infty} \operatorname{Re}(z_n) = -\infty \vee \lim_{n \to +\infty} \operatorname{Re}(z_n) = +\infty.$$

En particulier, pour le ssuites de nombres réels $(c_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$, $(d_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$ *et* $(z_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$ *la conjonctions des conditions* (9), (10) *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n = \gamma \neq 0$ *entraîne*

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = -\infty \vee \lim_{n \to +\infty} z_n = +\infty. \tag{11}$$

Démonstration. Considérons tout d'abord le cas particulier, où il s'agit de trois suites de nombres réels. Soit $\gamma > 0$. L'hypothèse ($\neg$ symbole de négation)

$$\neg (\lim_{n \to +\infty} z_n = -\infty)$$

entraîne l'existence d'un point d'accumulation $z > -\infty$ de la suite (z_n). D'après (9), les valeurs

$$z + k\gamma \quad (k \in \mathbf{N})$$

sont aussi points d'accumulation, d'où la conclusion que la suite (z_n) n'est pas bornée de droite. Donc, avec un $\rho \in (0, 1)$ arbitrairement choisi, on a, pour un $n_0 \in \mathbf{N}$,

$$d_n \geqslant \frac{1}{2}\gamma \overset{\text{def}}{=} \gamma_0 \ (n \geqslant n_0), \quad c_n \geqslant \rho \ (n \geqslant n_0), \quad z_{n_0} > 1,$$

et par conséquent

$$z_{n_0+1} > \gamma_0 + \rho$$

$$z_{n_0+2} > \gamma_0 + \gamma_0 \rho + \rho^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_{n_0+k} > \gamma_0 \frac{1-\rho^k}{1-\rho} + \rho^k \quad (k \in \mathbf{N}).$$

Il en résulte

$$\varliminf_{n \to +\infty} z_n \geqslant \frac{\gamma_0}{1-\rho};$$

faisant $\rho \to 1-0$, on obtient

$$\varliminf_{n \to +\infty} z_n \geqslant +\infty, \quad \text{c.à.d.} \quad \lim_{n \to +\infty} z_n = +\infty.$$

Soit $\gamma < 0$. Écrivant (9) sous la forme

$$-z_{n+1} = (-d_n) + c_n(-z_n) \quad (n \in \mathbf{N}_0)$$

et appliquant le résultat précédent, on conclut qu'on a aussi nécessairement (11) dans ce cas.

Dans le cas géneral, si l'on pose

$$\operatorname{Re}(z_n) = x_n, \ \operatorname{Im}(z_n) = y_n, \ \operatorname{Re}(c_n) = \alpha_n, \ \operatorname{Im}(c_n) = \beta_n, \ \operatorname{Re}(d_n) = \gamma_n, \ \operatorname{Im}(d_n) = \delta_n$$

et l'on égale les parties réelles des membres de (9), on obtient

$$x_{n+1} = (\gamma_n - \beta_n y_n) + \alpha_n x_n \quad (n \in \mathbf{N}_0). \tag{12}$$

Etant donné que les hypothèses du lemme entraînent

$$\lim_{n \to +\infty} (\gamma_n - \beta_n y_n) = \lim_{n \to +\infty} \gamma_n - \lim_{n \to +\infty} (\beta_n y_n) = \gamma - 0 = \gamma \neq 0, \quad \lim_{n \to +\infty} \alpha_n = 1,$$

il résulte de (12), d'après ce qui précède, qu'on a

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = -\infty \vee \lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty,$$

c.q.f.d.

D é m o n s t r a t i o n du théorème 1. Il résulte de l'assertion 1° (ou 2°) du théorème C que (I'_∞) n'est pas une condition nécessaire pour (I_∞), et l'assertion 4° du même théorème implique que la condition (II'_∞) n'est pas nécessaire pour (II_∞).

Soit $(c_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$ une suite de nombres complexes qui, avec la suite correspondante de nombres complexes $(z_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$, remplit la condition (7) sans qu'on ait $\lim_{n \to +\infty} z_n = \infty$ (lemme 1; on peut par exemple définir la suite (c_n) comme dans la démonstration de ce lemme). Si l'on pose

$$a_0 = 1, \quad a_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} c_k\right)^{-1} \quad (n \in \mathbf{N}),$$

on a:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = c_n^{-1} \quad (n \in \mathbf{N}_0), \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1;$$

$|a_n| = 1$ $(n \in \mathbf{N}_0)$, ce qui entraîne la divergence de la série (1);

$$\frac{S_0}{a_0} = 1, \quad \frac{S_{n+1}}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{S_n}{a_n} = 1 + c_n \frac{S_n}{a_n} \quad (n \in \mathbf{N}_0).$$

Donc, dans ce cas la condition (I'_∞) est remplie et la suite $z_n = \frac{S_n}{a_n}$ $(n \in \mathbf{N}_0)$ n'a pas la propriété $\lim_{n \to -\infty} z_n = \infty$. Par suite, la condition (I'_∞) n'est pas suffisante pour (I_∞).

Avec ε_n $(n \in \mathbf{N})$ donné par (8), la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$ définie comme suit:

$$a_0 = \frac{1}{2^3}, \quad a_1 = \frac{\varepsilon_2}{2^3}, \quad a_2 = \frac{1}{3^3}, \quad a_3 = \frac{\varepsilon_3}{3^3}, \quad a_4 = \frac{\varepsilon_3{}^2}{3^3},$$

$$a_5 = \frac{1}{4^3}, \quad a_6 = \frac{\varepsilon_4}{4^3}, \quad a_7 = \frac{\varepsilon_4{}^2}{4^3}, \quad a_8 = \frac{\varepsilon_4{}^3}{4^3}, \quad a_9 = \frac{1}{5^3}, \ \ldots$$

satisfait à (II'_∞), ce qu'on établit sans difficulté. On a pourtant, pour la même suite,

$$\frac{R_{\frac{n(n+1)}{2}-1}}{a_{\frac{n(n+1)}{2}-1}} = 0 \quad (n \in \mathbf{N}),$$

de manière que (II_∞) n'est pas valable.

Les assertions 3° et 4° du théorème résultent du lemme 2, étant donné qu'on a, au moins pour n suffisamment grand (ce qui, évidemment, n'est pas une restriction essentielle de la possibilité d'appliquer le lemme 2):

$$\frac{S_{n+1}}{a_{n+1}} = 1 + \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{S_n}{a_n} \quad \text{et} \quad \frac{R_{n+1}}{a_{n+1}} = \left(-1 + \frac{R_n}{a_n}\right) \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

1.1. C'est de la manière suivante que l'on peut résumer toutes les assertions des théorèmes A, B et 1 relatives au cas complexe et au cas complexe au sens large:

Dans le cas complexe, si $\mathrm{Re}(w) \neq \frac{1}{2}$: (I'_w) *est une condition nécessaire et suffisante pour* (I_w) *et* (II'_w) *est une condition nécessaire et suffisante pour* (II_w).

Dans le cas complexe, pour tout w *avec la propriété* $\mathrm{Re}(w)=\frac{1}{2}$: *la condition* (I'_w) *est nécessaire et n'est pas suffisante pour* (I_w), *et la condition* (II'_w) *est nécessaire et n'est pas suffisante pour* (II_w).

Dans le cas complexe au sens large: la condition (I'_∞) *n'est ni nécessaire ni suffisante pour* (I_∞), *et la condition* (II'_∞) *n'est ni nécessaire ni suffisante pour* (II_∞).

Si l'on veut donner à ces assertions-là la forme d'un énoncé établissant le rapport logique entre les conditions

$$(\mathrm{U}_\zeta') \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\zeta\wedge S=0 \text{ pourvu que (1) converge}$$

et

$$(\mathrm{U}_\zeta) \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{a_n}=\frac{\zeta}{\zeta-1},$$

de même qu'entre les conditions

$$(\mathrm{V}_\zeta') \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\zeta\wedge(1) \text{ converge}$$

et

$$(\mathrm{V}_\zeta) \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{R_n}{a_n}=\frac{1}{1-\zeta},$$

on peut les formuler de la manière suivante:

Théorème 1'. 1° *Pour tout* $\zeta\in\mathbf{C}_\infty$ *satisfaisant à* $|\zeta|\neq 1$: (U_ζ') *est une condition nécessaire et suffisante pour* (U_ζ), *et* (V_ζ') *est une condition nécessaire et suffisante pour* (V_ζ).

2° *Pour tout* $\zeta\in\mathbf{C}$ *satisfaisant à* $|\zeta|=1\wedge\zeta\neq 1$: *la condition* (U_ζ') *est nécessaire est n'est pas suffisante pour* (U_ζ), *et la condition* (V_ζ') *est nécessaire et n'est pas suffisante pour* (V_ζ).

3° *La condition* (U_1') *n'est ni nécessaire ni suffisante pour* (U_1), *et la condition* (V_1') *n'est ni nécessaire ni suffisante pour* (V_1).

Les figures 1 et 2 représentent visuellement les énoncés dans **1.1**, c'est-à-dire la variation de la connexion logique entre les conditions correspondantes dans le plan des w et dans celui des ζ: sur chacune de ces figures, les hachures marquent les régions où les conditions sont nécessaires et suffisantes, la grosse ligne l'ensemble des points où les conditions ne sont que nécessaires et le petit cercle le point où il n'y a ni nécessité ni suffisance de conditions.

1.2. Ajoutons aux considérations précédentes une remarque supplémentaire concernant le théorème C (c'est-à-dire le théorème 4 de [1]). A savoir, on peut se demander, au sujet de ce théorème-là, si, en supposant la constance de signe de a_n, de même que toutes les autres conditions correspondantes remplies, la condition

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1, \quad \text{ou} \quad \underline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1,$$

est nécessaire pour $(\mathrm{I}_{+\infty})$, $(\mathrm{I}_{-\infty})$ ou $(\mathrm{II}_{+\infty})$, selon le cas. La réponse est négative dans chacun des trois cas. Plus précisément, on a l'énoncé suivant:

Soit, dans le cas réel, a_n de signe constant pour n suffisament grand. Alors:

α) *si* (1) *diverge, la condition*

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$$

n'est pas nécessaire pour

$$(\mathrm{I}_{+\infty}) \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{a_n}=+\infty;$$

β) *si* (1) *converge avec $S=0$, la condition*

$$(*) \qquad \underline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$$

n'est pas nécessaire pour

$$(\mathrm{I}_{-\infty}) \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{a_n}=-\infty;$$

γ) *si* (1) *converge, la condition* (*) *n'est pas nécessaire pour*

$$(\mathrm{II}_{+\infty}) \qquad \lim_{n\to+\infty}\frac{R_n}{a_n}=+\infty.$$

Il est aisé de voir que le contre-exemple suivant:

$$a_{2k}=1, \quad a_{2k+1}=2 \qquad (k=0,\ 1,\ \ldots)$$

prouve l'assertion α) et que le contre-exemple:

$$a_0=-\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu^2}+\frac{1}{\nu^3}\right), \quad a_{2k-1}=\frac{1}{k^2}, \quad a_{2k}=\frac{1}{k^3} \qquad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

prouve les assertions β) et γ).

2. D'après la seconde partie du théorème B, les égalités (I_w) et (II_w) sont possibles pour $w=\frac{1}{2}$; en réalité, ces assertions indiquent les classes assez larges de suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}_0}$ pour lesquelles on a $(\mathrm{I}_{1/2})$ ou $(\mathrm{II}_{1/2})$. Cependant, dans [1] on a omis d'établir la possibilité effective de (I_w) et de (II_w) pour tout $w\in\mathbf{C}$ satisfaisant à $\mathrm{Re}(w)=\frac{1}{2}$. C'est ce que nous faisont maintenant par le

Théorème 2. *Pour tout* $w \in C$ *satisfaisant à* $\operatorname{Re}(w) = \frac{1}{2}$ *les égalités* $(\mathrm{I_w})$ *et* $(\mathrm{II_w})$ *sont effectivement possibles; à savoir, avec tout* $w \in C$ *satisfaisant à* $\operatorname{Re}(w) = \frac{1}{2}$:

1° *on a* $(\mathrm{I_w})$ *pour*

$$a_n = n\left(\frac{w}{w-1}\right)^n \quad (n \in \mathbf{N}_0); \tag{13}$$

2° *on a* $(\mathrm{II_w})$ *pour*

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n=0) \\ \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{w-1}{w}\right)^n & (n \in \mathbf{N}). \end{cases} \tag{14}$$

Démonstration. 1° Soit, pour $\operatorname{Re}(w) = \frac{1}{2}$, la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$ définie par (13). Alors $\left|\frac{w}{w-1}\right| = 1$, de manière que l'on peut poser

$$\frac{w}{w-1} = e^{\theta i}, \quad \text{avec} \quad \theta \in (0, 2\pi). \tag{15}$$

Après la différentiation des membres de l'identité

$$\sum_{k=0}^{n} e^{k\theta i} = \frac{e^{(n+1)\theta i} - 1}{e^{\theta i} - 1} \qquad (0 < \theta < 2\pi),$$

on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} ki\, e^{k\theta i} = (n+1)\, i \frac{e^{(n+1)\theta i}}{e^{\theta i} - 1} - ie^{\theta i} \frac{e^{(n+1)\theta i} - 1}{(e^{\theta i} - 1)^2} \qquad (0 < \theta < 2\pi),$$

d'où, d'après (15),

$$\frac{S_n}{a_n} = \frac{\sum_{k=0}^{n} ke^{k\theta i}}{n\, e^{n\theta i}} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{e^{\theta i}}{e^{\theta i} - 1} - \frac{e^{\theta i}}{n} \cdot \frac{e^{\theta i} - e^{-n\theta i}}{(e^{\theta i} - 1)^2} \to \frac{e^{\theta i}}{e^{\theta i} - 1} = w \quad (n \to +\infty).$$

2° Soit maintenant, pour $\operatorname{Re}(w) = \frac{1}{2}$, la suite $(a_n)_{n \in \mathbf{N}_0}$ définie par (14). On peut poser

$$\frac{w-1}{w} = e^{\theta i}, \quad \text{avec} \quad \theta \in (0, 2\pi).$$

Pour $t \in (0,2\pi)$, $n=2, 3, \ldots$, on a

$$\sum_{k=1}^{n-1} e^{kti} = -\frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} e^{kti} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{e^{nti}-1}{e^{ti}-1} - \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{e^{nti}}{e^{ti}-1} - \frac{1}{2}\,\frac{e^{ti}+1}{e^{ti}-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2i}\,\frac{e^{\left(n-\frac{1}{2}\right)ti}}{\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2i}\operatorname{cotg}\frac{t}{2}.$$

L'intégration de π à $\theta \in (0,2\pi)$ donne

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{e^{k\theta i} - (-1)^k}{ki} = \frac{1}{2}(\pi-\theta) - \frac{1}{i}\ln\sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2i}\int_{\pi}^{\theta} \frac{e^{\left(n-\frac{1}{2}\right)ti}}{\sin\frac{t}{2}}\,dt \qquad (n=2, 3, \ldots),$$

d'où

$$S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{e^{k\theta i}}{k} = \frac{i}{2}(\pi-\theta) - \ln\sin\frac{\theta}{2} + \frac{1}{2}\int_{\pi}^{\theta} \frac{e^{\left(n-\frac{1}{2}\right)ti}}{\sin\frac{t}{2}}\,dt + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k}$$

$$(n=2, 3, \ldots).$$

Il en résulte que

$$S = \frac{i}{2}(\pi-\theta) - \ln\sin\frac{\theta}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k} \qquad (n=2, 3, \ldots)$$

(d'après le théorème de Rieman-Lebesque). Par conséquent,

$$R_n = S - S_{n-1} = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k} - \frac{1}{2}\int_{\pi}^{\theta} \frac{e^{\left(n-\frac{1}{2}\right)ti}}{\sin\frac{t}{2}}\,dt \qquad (n=2, 3, \ldots).$$

Utilisant le fait que, d'après l'assertion 4° du théorème B, on a

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k} \sim \frac{(-1)^n}{2}\cdot\frac{1}{n} \qquad (n \to +\infty);$$

effectuant l'intégration par parties et appliquant de nouveau le théorème de Riemann-Lebesgue, on obtient

$$R_n = \frac{(-1)^n}{2}\cdot\frac{1}{n}\,[1+o(1)] - \frac{e^{\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta i}}{2i\left(n-\frac{1}{2}\right)\sin\frac{\theta}{2}} - \frac{(-1)^n}{2\left(n-\frac{1}{2}\right)} -$$

$$-\frac{1}{4i\left(n-\frac{1}{2}\right)}\int_{\pi}^{\theta}\frac{e^{\left(n-\frac{1}{2}\right)ti}\cos\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}}dt$$

$$=\frac{1}{n}o(1)+\frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{n-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1-e^{\theta i}}e^{n\theta i}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$=\frac{1}{n-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{1-e^{\theta i}}e^{n\theta i}+o\left(\frac{1}{n}\right)\qquad(n\to+\infty),$$

d'où

$$\frac{R_n}{a_n}=\frac{n}{n-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1-e^{\theta i}}+o(1)\to\frac{1}{1-e^{\theta i}}=w\qquad(n\to+\infty).$$

2.1. L'énoncé suivant, généralisant à la fois les assertions 3° et 4° du théorème B et le théorème 2, nous semble vrai, bien que nous n'ayons pas réussi à le demontrer: c'est pourquoi nous lui donnons ici la forme d'une

Hypothèse. 1° *Si*

$$\alpha_n\uparrow+\infty \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha_n-\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2}}=1,$$

alors on a pour tout $\theta\in(0,2\pi)$

$$\sum_{k=0}^{n}e^{k\theta i}\alpha_k\sim\frac{e^{\theta i}}{e^{\theta i}-1}e^{n\theta i}\alpha_n\qquad(n\to+\infty).$$

2° *Si*

$$\alpha_n\downarrow+o \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha_n-\alpha_{n+1}}{\alpha_{n+1}-\alpha_{n+2}}=1,$$

alors pour tout $\theta\in(0,2\pi)$

$$\sum_{k=n}^{+\infty}e^{k\theta i}\alpha_k\sim\frac{1}{1-e^{\theta i}}e^{n\theta i}\alpha_n\qquad(n\to+\infty).$$

Voici maintenant deux énoncés simplement démontrables, mais complétant aussi utilement les résultats de [1].

2.2. La proposition suivante détermine, dans le cas réel, deux classes de suites $(a_n)_{n\in N_0}$ remplissant les conditions suffisantes (I') et (II') des assertions 3° et 4° du théorème B, respectivement. Ces classes-là sont bien plus larges que les classes dont il s'agit dans l'énoncé analogue **3.4** de [1]. Dans cette proposition interviennent les *fonctions logarithmico-exponentielles*, appelées aussi *fonctions L* (voir, par exemple, la section **3.2** dans [2], laquelle contient la définition de cette classe de fonctions réelles, de même qu'un théorème qui en établit les propriétés fondamentales).

Proposition 1. *Soit* $x \mapsto \alpha(x)$ *une fonction L réelle, définie pour* $x \geqslant 0$ *et différente de zéro pour* x *suffisamment grand, et supposons que* $\alpha(x)$ *ne tende pas vers un nombre réel différent de zéro lorsque* $x \to +\infty$ *et que l'on ait*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha(x+1)}{\alpha(x)} = 1.$$

Alors

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \alpha(k) \sim \frac{(-1)^n}{2} \alpha(n) \quad (n \to +\infty),$$

ou

$$\sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k \alpha(k) \sim \frac{(-1)^n}{2} \alpha(n) \quad (n \to +\infty),$$

suivant que l'on a

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha(x) = 0, \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to+\infty} |\alpha(x)| = +\infty.$$

On déduit cette proposition immédiatement des assertions 3° et 4° du théorème B, tenant compte des propriétés fondamentales des fonctions logarithmico-exponentielles ([2], théorème 13, page 17).

2.3. L'énoncé suivant établit une connection étroite entre (I_w) et (II_w); bien sûr, la convergence de (1) avec $S=0$ étant supposée.

Proposition 2. *Soit la série* (1) *convergente et soit* $S=0$. *Alors pour tout* $w \in \mathbf{C}$ $\left(\textit{c'est-à-dire pour tout } w \in \mathbf{C} \textit{ satisfaisant à } \operatorname{Re}(w) \leqslant \frac{1}{2}, \textit{ puisque la convergence de } (1) \textit{ n'est pas possible si } \operatorname{Re}(w) > \frac{1}{2}\right)$ *on a*

$$(\mathrm{I}_w) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{a_n} = w$$

si et seulement si

$$(\mathrm{I}_{1-w}) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{R_n}{a_n} = 1-w.$$

La conjonction $(\mathrm{I}_w) \wedge (\mathrm{II}_w)$, *c'est-à-dire l'égalité*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{R_n}{a_n} = w, \tag{16}$$

n'est possible que pour $w = \frac{1}{2}$ *et pour* $w = \infty$; *pour ces deux valeurs de* w (16) *se réalise effectivement.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit la série (1) convergente avec $S=0$. On a alors, pour n suffisamment grand,

$$\frac{S_n}{a_n}=\frac{S-R_{n+1}}{a_n}=-\frac{R_{n+1}}{a_n}=-\frac{R_n-a_n}{a_n}=1-\frac{R_n}{a_n},$$

d'où la première assertion. La seconde résulte immédiatement de la première et des assertions correspondantes des théorèmes **B** et **C**.

3. Cette section traite, entre autre, la question du comportement des suites

$$\left(\frac{S_n^{(m)}}{a_n}\right)_{n\in\mathbf{N}_0} \quad \text{et} \quad \left(\frac{R_n^{(m)}}{a_n}\right)_{n\in\mathbf{N}_0} \qquad (m\in\mathbf{N}), \tag{17}$$

où $S_n^{(m)}$ désigne la m-ième itération de la n-ième somme et $R_n^{(m)}$ la m-ième itération du n-ième reste, c'est-à-dire:

$$\left.\begin{aligned} &S_n^{(0)} \overset{\text{def}}{=} S_n, \quad S_n^{(m+1)} \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n} S_k^{(m)}; \\ &R_n^{(0)} \overset{\text{def}}{=} R_n, \quad R_n^{(m+1)} \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=n}^{+\infty} R_k^{(m)} \end{aligned}\right\} \qquad (n\in\mathbf{N}_0; \quad m\in\mathbf{N}_0).$$

Le théorème 3.1 se rapporte directement à cette question. Voici d'abord un résultat bien plus général:

T h é o r è m e 3. *Soient*

$$\left(u_n^{(m)}\right)_{n\in\mathbf{N}_0} \quad \textit{et} \quad \left(v_n^{(m)}\right)_{n\in\mathbf{N}_0} \qquad (m\in\mathbf{N})$$

des suites de nombres complexes qui remplissent les conditions suivantes:

$$u_n^{(m)}\neq 0, \quad v_n^{(m)}\neq 0 \qquad (n\in\mathbf{N}_0; \quad m\in\mathbf{N}),$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}^{(m)}}{u_n^{(m)}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{v_{n+1}^{(m)}}{v_n^{(m)}}=1 \qquad (m\in\mathbf{N}), \tag{18}$$

et soient les suites $\left(\sigma_n^{(m)}\right)_{n\in\mathbf{N}_0}$ *et* $\left(\tau_n^{(m)}\right)_{n\in\mathbf{N}_0}$ $(m\in\mathbf{N})$ *définies comme suit*:

$$\sigma_n^{(0)} \overset{\text{def}}{=} S_n \ (n\in\mathbf{N}_0), \quad \sigma_n^{(m+1)} \overset{\text{def}}{=} u_n^{(m+1)} \sum_{k=0}^{n} v_k^{(m+1)}\sigma_\kappa^{(m)} \qquad (n\in\mathbf{N}_0; \quad m\in\mathbf{N}_0);$$

$$\tau_n^{(m)} \overset{\text{def}}{=} R_n \ (n\in\mathbf{N}_0), \quad \tau_n^{(m+1)} \overset{\text{def}}{=} u_n^{(m+1)} \sum_{k=n}^{+\infty} v_k^{(m+1)}\tau_k^{(m)} \qquad (n\in\mathbf{N}_0; \quad m\in\mathbf{N}_0).$$

Alors, dans le cas complexe et pour $\operatorname{Re}(w)>\frac{1}{2}$:

1° (I_w) (*c'est-à-dire* $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} wa_n$)

entraîne

$$\sigma_n^{(m)} \underset{n\to+\infty}{\sim} w^{m+1}a_n \prod_{\nu=1}^{m} u_n^{(\nu)} v_n^{(\nu)} \qquad (m\in\mathbf{N}); \tag{19}$$

2° ($\mathrm{II_w}$) (*c'est-à-dire* $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} wa_n$)

entraîne

(20)
$$\tau_n^{(m)} \underset{n\to+\infty}{\sim} w^{m+1} a_n \prod_{\nu=1}^{m} u_n^{(\nu)} v_n^{(\nu)} \quad (m\in\mathbf{N}).$$

Démonstration 1° Soit remplie la condition ($\mathrm{I_w}$) avec $\operatorname{Re}(w)>\frac{1}{2}$. Alors on a, d'après le théorème A,

($\mathrm{I'_w}$)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{w}{w-1},$$

et la relation

(21)
$$\sigma_n^{(m)} \underset{n\to+\infty}{\sim} w^{m+1} a_n \prod_{\nu=1}^{m} u_n^{(\nu)} v_n^{(\nu)}$$

a lieu pour $m=0$ (on attribue pour $m=0$ la valeur 1 au produit dans (21)). Supposons (21) valable pour un $m\in\mathbf{N}_0$ fixe. Alors $\sigma_n^{(m)}\neq 0$ pour n suffisamment grand, de sorte qu'on a, d'après (21) et ($\mathrm{I'_w}$),

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sigma_{n+1}^{(m)}}{\sigma_n^{(m)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{w^{m+1} a_{n+1} \prod_{\nu=1}^{m} u_{n+1}^{(\nu)} v_{n+1}^{(\nu)}}{w^{m+1} a_n \prod_{\nu=1}^{m} u_n^{(\nu)} v_n^{(\nu)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \prod_{\nu=1}^{m} \frac{u_{n+1}^{(\nu)}}{u_n^{(\nu)}} \cdot \frac{v_{n+1}^{(\nu)}}{v_n^{(\nu)}} = \frac{w}{w-1},$$

et puis

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}^{(m+1)} \sigma_{n+1}^{(m)}}{v_n^{(m+1)} \sigma_n^{(m)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}^{(m+1)}}{v_n^{(m+1)}} \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{\sigma_{n+1}^{(m)}}{\sigma_n^{(m)}} = \frac{w}{w-1}.$$

Par suite, appliquant le théorème A, on obtient

$$\frac{1}{u_n^{(m+1)}} \sigma_n^{(m+1)} = \sum_{k=0}^{n} v_k^{(m+1)} \sigma_k^{(m)} \underset{n\to+\infty}{\sim} w v_n^{(m+1)} \sigma_n^{(m)} \underset{n\to+\infty}{\sim} w v_n^{(m+1)} w^{m+1} a_n \prod_{\nu=1}^{m} u_n^{(\nu)} v_n^{(\nu)},$$

d'où

$$\sigma_n^{(m+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} w^{m+2} a_n u_n^{(m+1)} v_n^{(m+1)} \prod_{\nu=1}^{m} u_n^{(\nu)} v_n^{(\nu)} = w^{m+2} a_n \prod_{\nu=1}^{m+1} u_n^{(\nu)} v_n^{(\nu)}.$$

Nous venons ainsi d'établir, par induction mathématique, que ($\mathrm{I_w}$) avec $\operatorname{Re}(w)>\frac{1}{2}$ entraîne (19).

2° Soit remplie la condition ($\mathrm{II_w}$) avec $\operatorname{Re}(w)>\frac{1}{2}$. On a alors, d'après le théorème A,

($\mathrm{II'_w}$)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{w-1}{w},$$

et la relation

$$\tau_n^{(m)} \underset{n\to+\infty}{\sim} w^{m+1} a_n \prod_{\nu=1}^{m} u_n^{(\nu)} v_n^{(\nu)} \tag{22}$$

a lieu pour $m=0$. Supposons (22) valable pour un $m \in \mathbf{N}_0$ fixe. Alors $\tau_n^{(m)} \neq 0$ pour n suffisamment grand, de manière que l'on a, d'après (22) et $(\mathrm{II}'_{\mathrm{w}})$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\tau_{n+1}^{(m)}}{\tau_n^{(m)}} = \frac{w-1}{w},$$

et puis

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}^{(m+1)}\,\tau_{n+1}^{(m)}}{v_n^{(m+1)}\,\tau_n^{(m)}} = \frac{w-1}{w}.$$

On en conclut d'abord que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^{(m+1)} \tau_n^{(m)}$$

converge, puisque $\left|\frac{w-1}{w}\right| < 1$. On établit ensuite, en appliquant le théorème A, que

$$\frac{1}{u_n^{(m+1)}}\tau_n^{(m+1)} = \sum_{k=n}^{+\infty} v_k^{(m+1)} \tau_k^{(m)} \underset{n\to+\infty}{\sim} w v_n^{(m+1)} \tau_n^{(m)} \underset{n\to+\infty}{\sim} w v_n^{(m+1)} w^{m+1} \prod_{\nu=1}^{m} u_n^{(\nu)} v_n^{(\nu)},$$

d'où

$$\tau_n^{(m+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} w^{m+2} a_n u_n^{(m+1)} v_n^{(m+1)} \sum_{\nu=1}^{m} u_n^{(\nu)} v_n^{(\nu)} = w^{m+2} a_n \prod_{\nu=1}^{m+1} u_n^{(\nu)} v_n^{(\nu)}.$$

Ainsi, nous avons établi, par induction mathématique, que $(\mathrm{II}_{\mathrm{w}})$ avec $\mathrm{Re}(w) > \frac{1}{2}$ entraîne (20).

3.1. En posant dans le théorème précédent, d'abord

$$u_n^{(m)} = v_n^{(m)} = 1 \quad (n \in \mathbf{N}_0;\ m \in \mathbf{N}),$$

et ensuite, avec un nombre réel $\alpha \neq 0$ fixe,

$$u_n^{(m)} = (n+1)^{-\alpha}, \quad v_n^{(m)} = \alpha (n+1)^{\alpha-1} \quad (n \in \mathbf{N}_0;\ m \in \mathbf{N}),$$

on en obtient deux cas particuliers, que nous exprimons par les deux théorèmes suivants. Le premier, déjà mentionné, se rapporte aux sommes et restes itérés, et la première partie du second aux moyennes de Riesz itérées, dont le cas spécial, pour $\alpha = 1$, sont les moyennes de Cesarò itérées.

Théorème 3.1. *Dans le cas complexe et pour* $\mathrm{Re}(w) > \frac{1}{2}$:

1° $(\mathrm{I}_{\mathrm{w}})$ (*c'est-à-dire* $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w a_n$)

entraîne

$$S_n^{(m)} \underset{n\to+\infty}{\sim} w^{m+1} a_n \quad (m \in \mathbf{N});$$

2° ($\mathrm{II_w}$) (*c'est-à-dire* $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w a_n$)

entraîne

$$R_n^{(m)} \underset{n\to+\infty}{\sim} w^{m+1} a_n \quad (m\in\mathbf{N}).$$

Théorème 3.2. *Soit, avec un nombre réel* $\alpha\neq0$ *fixe*:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_n^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} S_n, \quad \varphi_n^{(m+1)} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(n+1)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{n} (k+1)^{\alpha-1} \varphi_k^{(m)}; \\ &\theta_n^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} R_n, \quad \theta_n^{(m+1)} \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(n+1)^{-\alpha} \sum_{k=n}^{+\infty} (k+1)^{\alpha-1} \theta_k^{(m)} \end{aligned}\right\} \quad (n\in\mathbf{N}_0;\ m\in\mathbf{N}_0).$$

Dans le cas complexe, pour $\mathrm{Re}(w)>\frac{1}{2}$:

1° ($\mathrm{I_w}$) (*c'est-à-dire* $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w a_n$)

entraîne

$$\varphi_n^{(m)} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{-m} \alpha^m w^{m+1} a_n \quad (m\in\mathbf{N});$$

2° ($\mathrm{II_w}$) (*c'est-à-dire* $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w a_n$)

entraîne

$$\theta_n^{(m)} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{-m} \alpha^m w^{m+1} a_n \quad (m\in\mathbf{N}).$$

Remarques. 1. La formule

$$S_n^{(m)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+m-k}{m} a_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+m-k-1}{m-1} S_k \quad (n\in\mathbf{N}_0;\ m\in\mathbf{N})$$

est bien connue. C'est en appliquant la formule sommatoire d'Abel et en utilisant le fait que $(\mathrm{II_w}) \wedge \mathrm{Re}(w)>\frac{1}{2}$ entraîne la convergence des suites (a_n) et (R_n) vers zéro à une vitesse exponentielle (théorème A) que l'on prouve sans difficulté *la validité de la formule*

$$R_n^{(m)} = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k+m-n}{m} a_k = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k+m-n-1}{m-1} R_k \quad (n\in\mathbf{N}_0;\ m\in\mathbf{N})$$

sous l'hypothèse $(\mathrm{II_w}) \wedge \mathrm{Re}(w)>\frac{1}{2}$. Donc, on peut donner au théorème 3.1 la forme suivante:

Dans le cas complexe, pour $\operatorname{Re}(w) > \frac{1}{2}$:

1° $(\mathrm{I_w})$ *entraîne*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+m-k}{m} a_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+m-k-1}{m-1} S_k \underset{n\to+\infty}{\sim} w^{m+1} a_n \quad (m \in \mathbf{N});$$

2° $(\mathrm{II_w})$ *entraîne*

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k+m-n}{m} a_k = \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k+m-n-1}{m-1} R_k \underset{n\to+\infty}{\sim} w^{m+1} a_n \quad (m \in \mathbf{N}).$$

2. Par d'autres spécifications de $u_n^{(m)}$ et $v_n^{(m)}$, on peut obtenir des résultats analogues pour plusieurs autres procédés de sommation.

Nous notons que c'est une idée de Mr. M. Ašić qui nous a aidé à donner à la démonstration du théorème 1 une forme plus simple.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. D. Adamović, *Sur la convergence des rapports de la somme partielle au terme général et du reste au terme général d'une série réelle ou complexe*, Publications de l'Institut Mathématique, Nouvelle série, tome 15 (29), 1973, pp. 5—20.

[2] G. H. Hardy, *Orders of Infinity*, Cambridge University Press, 1954.