PUBLICATIONS DE L'INSTITUT MATHÉMATIQUE
Nouvelle série, tome 20 (34), 1976, pp. 145–160

О МЕТОДЕ ФЕДОРЕНКО — БАХВАЛОВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Бошко Йованович

(Сообщено 14. марта 1975)

В этой статье для решения разностной аппроксимации уравнения Пуассона, в случае осевой симметрии, используется итерационный метод предложенный Федоренко в [1] и [2] и Бахваловым в [3]. Доказывается его применимость для случая схем второго и четвертого порядка точности. Доказано что для уменьшения норми невязки, этим методом, в $\frac{1}{\varepsilon}$ раз достаточно $O(h^{-2}\ln \varepsilon^{-1})$ арифметических действий; здесь h — шаг сетки. Для метода переменных направлений (см. [5]) это число равно $O(h^{-2}\ln h^{-1}\ln \varepsilon^{-1})$, а для классических методов простой итерации и Ричардсона — $O(h^{-4}\ln \varepsilon^{-1})$, то есть $O(h^{-3}\ln \varepsilon^{-1})$.

Излагаемый метод предложен в [1] и [2] для случая задачи Дирихле для уравнения Пуассона в квадрате. В [3] доказана его применимость в случае произвольного эллиптического оператора с непрерывными коэффициентами. В работе [4] тот же метод применяется для решения третьей краевой задачи.

§ 1. Определения, обозначения и вспомогательные соотношения

Пусть в области $\Omega=\{(r, z)\,|\,0<r<R,\ 0<z<l\}$ решается уравнение

$$Lu=(L_r+L_z)\,u\equiv -\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial u}{\partial r}\right)-\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(r, z) \tag{1}$$

при граничном условии

$$u(R, z)=u(r, 0)=u(r, l)=0;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=0}=0. \tag{2}$$

Рад је финансирала Републичка заједница науке СРС

Как в [6] и [7] задачу (1) — (2) аппроксимируем разностной задачей следующим способом. Введем сетку $\bar{\omega}=\bar{\omega}_{NM}=\bar{\omega}_r\times\bar{\omega}_z$ где

$$\bar{\omega}_r=\left\{r_i=\left(i+\frac{1}{2}\right)h_r \mid i=0,1,\ldots,N;\ h_r=\frac{R}{N+\frac{1}{2}}\right\},$$

$$\bar{\omega}_z=\left\{z_k=kh_z \mid k=0,1,\ldots,M;\ h_z=\frac{l}{M}\right\}.$$

Предположим, что $c_1\leqslant\frac{h_r}{h_z}\leqslant c_2$. Пусть $\gamma=\bar{\omega}\cap\Gamma$, где Γ-граница области Ω, и $\omega=\bar{\omega}\setminus\gamma$. Введем множество сеточных функций

$$H=H_{NM}=\{(y_{ik})=(y(r_i,z_k)) \mid i=0,1,\ldots,N;\ k=0,1,\ldots,M;\ y|_\gamma=0\}.$$

В множестве H определим скалярное произведение и норму

$$(3)\qquad (y,v)=(y,v)_{NM}=h_rh_z\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{M-1}r_iy_{ik}v_{ik};\quad \|y\|=\|y\|_{NM}=(y,y)^{1/2}.$$

Определим разностные операторы:

$$(y_r)_{ik}=(y_{\bar{r}})_{i+1\cdot k}=\frac{y_{i+1\cdot k}-y_{i\cdot k}}{h_r},\quad (y_z)_{ik}=(y_{\bar{z}})_{i\cdot k+1}=\frac{y_{i\cdot k+1}-y_{ik}}{h_z},$$

$$(\Lambda_ry)_{ik}=\begin{cases}-\dfrac{1}{r_0h_r}\check{r}_1(y_{\bar{r}})_{1\cdot k}, & i=0,\quad k=0,1,\ldots,M,\\ -\dfrac{1}{r_i}(\bar{r}y_{\bar{r}})_{r,i\cdot k}, & i=1,2,\ldots,N-1,\ k=0,1,\ldots,M;\ \bar{r}_i=r_{i-\frac{1}{2}}=ih_r,\\ 0, & i=N,\qquad k=0,1,\ldots,M,\end{cases}$$

$$(\Lambda_zy)_{ik}=\begin{cases}-y_{z\bar{z},i\cdot k}, & i=0,1,\ldots,N,\quad k=1,2,\ldots,M-1,\\ 0, & i=0,1,\ldots,N,\quad k=0,M.\end{cases}$$

Оператор $\Lambda=\Lambda_{NM}=\Lambda_r+\Lambda_z$ отображает H в H. Задачу (1) — (2) аппроксимируем следующим образом:

$$(4)\qquad \Lambda y=f,\quad y,f\in H.$$

Погрешность аппроксимации, при достаточной гладкости решения u задачи (1) — (2) равна $\Lambda u-f=O\left(\frac{h_r^2}{r}+h_z^2\right)$.

Оператор Λ самосопряженный в пространстве H:

$$(5)\qquad (\Lambda y,v)=h_rh_z\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{M-1}\bar{r}_iy_{\bar{r},ik}v_{\bar{r},ik}+h_rh_z\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{M}r_iy_{\bar{z},ik}v_{\bar{z},ik}.$$

Непосредственно проверяется что операторы Λ_r и Λ_z перестановочны.

Собственные числа оператора Λ_z хорошо известны (см. напр. [8] стр. 48): $\lambda_m^{(z)} = \frac{4}{h_z^2}\sin^2\frac{m\pi h_z}{2l}$, $m=1, 2, \ldots, M-1$. Из этого следует: $\frac{4}{l^2} \leqslant \lambda_m^{(z)} < \frac{4}{h_z^2}$. Собственные функции $\Lambda_z - \psi_k^{z,m} = \sin\frac{m\pi z_k}{l}$.

В [9] показано, что собственные числа оператора Λ_r равны

$$\lambda_n^{(r)} = \frac{2}{h_r^2}(1-x_n), \quad n=1, 2, \ldots, N,$$

где x_n корни многочлена Лежандра степени N. Собственные функции Λ_r равны $\psi_i^{r,n} = P_i(x_n)$, где $P_i(x)$ — многочлены Лежандра (сеточные аналоги функций Беселя $J_0(\xi_n r)$, где ξ_n корни уравнения $J_0(\xi R)=0$). Действительно, из равенства

$$\Lambda_r y_i \equiv -\frac{1}{\left(i+\frac{1}{2}\right)h_r^2}[(i+1)y_{i+1}-(2i+1)y_i+iy_{i-1}] = \lambda^{(r)} y_i.$$

следует

$$(i+1)y_{i+1}-(2i+1)xy_i+iy_{i-1}=0, \quad i=1, 2, \ldots, N-1$$

где $x = 1-\frac{R_r^2}{2}\lambda^{(r)}$. Получено рекуррентное соотношение для многочленов Лежандра, так что $y_i = P_i(x)$. Из $y_N = P_N(x) = 0$ получаем условие, которому должно удовлетворять x, то есть $\lambda^{(r)}$. Пусть x_1 пронумерованы в порядке убывания: $1 > x_1 > x_2 > \cdots > x_N > -1$. Известна оценка $x_n = \cos\theta_n\pi$, $\frac{2n-1}{2N+1} \leqslant \theta_n \leqslant \frac{2n}{2N+1}$, из которой следует $\frac{1}{R^2} \leqslant \frac{4}{h_r^2}\sin^2\frac{\pi h_r}{4R} \leqslant \lambda_n^{(r)} \leqslant \frac{4}{h_r^2}$.

Из предыдущего неравенства следует, что оператор Λ положительно определен. Его собственные числа равны

$$\lambda_{nm} = \lambda_n^{(r)} + \lambda_m^{(z)} = \frac{2}{h_r^2}(1-x_n) + \frac{4}{h_z^2}\sin^2\frac{m\pi h_z}{2l}, \; n=1, 2, \ldots, N; \; m=1, 2, \ldots, M-1.$$

Собственными функциями Λ являются $\psi_{ik}^{nm} = P_i(x_n)\sin\frac{m\pi z_k}{l}$.

Из этого непосредственно следует, что выполнены неравенства

$$\|\Lambda_r y\| \leqslant \|\Lambda y\|, \quad \|\Lambda_z y\| \leqslant \|\Lambda y\|. \tag{6}$$

Действительно, если $y = \sum_{n,m} c_{nm}\psi^{nm}$, тогда $\|\Lambda_r y\| = \{\sum_{n,m}(\lambda_n^{(r)})^2 c_{nm}^2\}^{1/2}$,

$$\|\Lambda_z y\| = \{\sum_{n,m}(\lambda_m^{(z)})^2 c_{nm}^2\}^{1/2} \quad \text{и} \quad \|\Lambda y\| = \{\sum_{n,m}(\lambda_n^{(r)}+\lambda_m^{(z)})^2 c_{nm}^2\}^{1/2}.$$

Определим нормы

$$\|y\|_\Lambda = (\Lambda y, y)^{1/2} \quad \text{и} \quad \|y\|_{\Lambda^{-1}} = (\Lambda^{-1}y, y)^{1/2} = \max_{v\in H}\frac{|(y, v)|}{\|v\|_\Lambda}. \tag{7}$$

Норма $\|y\|_\Lambda$ эквивалентна норме

$$\|y\|_{W_2^1(\omega)}=\left\{h_r h_z\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{M-1}\bar r_i y_{\bar r,ik}^2+h_r h_z\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{M} r_i y_{\bar z,ik}^2+h_r h_z\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{M-1} r_i y_{ik}^2\right\}^{1/2},$$

а норма $\|y\|_{\Lambda^{-1}}$ норме $\|y\|_{W_2^{-1}(\omega)}=\max\limits_{v\in H}\dfrac{|(y,v)|}{\|v\|_{W_2^1(\omega)}}$. Если y решение уравнения (4), а $\tilde y$ его приближение, тогда $\|\tilde y-y\|_\Lambda=\|\Lambda\tilde y-f\|_{\Lambda^{-1}}$.

Предположим, что N и M чётные числа и введем сетку

$$\bar\omega'=\bar\omega_{\frac{N}{2}\frac{M}{2}}=\left\{(r_i',z_k')\mid i=0,\ 1,\ \ldots,\ \frac{N}{2};\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ \frac{M}{2}\right\}$$

где

$$r_i'=\left(i+\frac{1}{2}\right)h_r',\quad z_k'=kh_z',\quad h_r'=\frac{R}{\frac{N}{2}+\frac{1}{2}},\quad h_z'=2h_z.$$

Определим соответствующее пространство сеточных функций

$$H'=H_{\frac{N}{2}\frac{M}{2}}=\left\{(y_{ik})=(y(r_i',z_k'))\mid i=0,\ 1,\ \ldots,\ \frac{N}{2};\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ \frac{M}{2}\right\},$$

скалярное произведение $(y,v)'=(y,v)_{\frac{N}{2}\frac{M}{2}}$, и оператор $\Lambda'=\Lambda_{\frac{N}{2}\frac{M}{2}}:H'\to H'$.

Определим опрераторы $\Pi_0:H'\to H$, $\Pi_1:H'\to H$ и $P:H\to H'$ следующим способом

$$(\Pi_0\xi)_{2i\cdot 2k}=(\Pi_0\xi)_{2i+1\cdot 2k}=\xi_{ik},$$

$$(\Pi_0\xi)_{i\cdot 2k+1}=\frac{1}{2}[(\Pi_0\xi)_{i\cdot 2k}+(\Pi_0\xi)_{i\cdot 2k+2}],$$

$$(\Pi_1\xi)_{0\cdot 2k}=\xi_{0k},$$

$$(\Pi_1\xi)_{2i+1\cdot 2k}=\frac{1}{2N+1}\left[\left(\frac{3N}{2}-i\right)\xi_{ik}+\left(\frac{N}{2}+i+1\right)\xi_{i+1\cdot k}\right],\quad i\geqslant 0.$$

$$(\Pi_1\xi)_{2i+2\cdot 2k}=\frac{1}{2N+1}\left[\left(\frac{N}{2}-i-1\right)\xi_{ik}+\left(\frac{3N}{2}+i+2\right)\xi_{i+1\cdot k}\right],\quad i\geqslant 0,$$

$$(\Pi_1\xi)_{i\cdot 2k+1}=\frac{1}{2}\left[(\Pi_1\xi)_{i\cdot 2k}+(\Pi_1\xi)_{i\cdot 2k+2}\right],$$

$$(P\eta)_{ik}=\frac{1}{8}\left[\frac{2i+\frac{1}{2}}{2i+1}(\eta_{2i\cdot 2k-1}+2\eta_{2i\cdot 2k}+\eta_{2i\cdot 2k+1})+\right.$$

$$\left.+\frac{2i+\frac{3}{2}}{2i+1}(\eta_{2i+1\cdot 2k-1}+2\eta_{2i+1\cdot 2k}+\eta_{2i+1\cdot 2k+1})\right],\quad b\ \omega'.$$

$$(P\eta)|_{\gamma'}=0.$$

Оператор Π_1 является точным для многочленов первой степени, а оператор Π_0 — для многочленов нулевой степени.

Лемма 1. *Выполнены неравенства*

$$\|\Pi_0\xi\|_\Lambda\leqslant\sqrt{2}\,\|\xi\|_{\Lambda'},\quad \|\Pi_1\xi\|_\Lambda\leqslant\sqrt{\frac{3}{2}}\,\|\xi\|_{\Lambda'}\quad \text{и}\quad \|P\eta\|_{\Lambda'^{-1}}\leqslant\sqrt{2}\,\|\eta\|_{\Lambda^{-1}}.$$

Доказательство. Два первых неравенства получаем из (7), пользуясь равенствами $(\Pi_0\xi)_{\bar r,2i\cdot 2k}=\frac{h_r'}{h_r}\xi_{\bar r,ik}$, $(\Pi_1\xi)_{\bar r,2i\cdot 2k}=\xi_{\bar r,ik}$, итд. Третье следует из первого, и из равенства $(\Pi_0\xi,\eta)=\left(\dfrac{N+1}{N+\frac{1}{2}}\right)^2(\xi,P\eta)'$.

В дальнейшем через c_i будем обозначать постоянные.

§ 2. Шаг итерационного процесса

Схема процесса состоит в следующем. Пусть мы умеем уменьшать норму невязки $\|\Lambda'v-f\|_{\Lambda'^{-1}}$ в $\frac{1}{\varepsilon_0}$ раз за $\Phi\left(\varepsilon_0,\frac{N}{2},\frac{M}{2}\right)$ арифметичечких действий при любой функции f и любом начальном приближении $v\in H'$. Шаг итерационного процесса, которым норма невязки $\|\Lambda Y^\circ-f\|_{\Lambda^{-1}}$ уменьшается в $\frac{1}{\sqrt[t]{\varepsilon_0}}$ раз ($t>1$) состоит из трёх этапов:

1. Производим p итераций по формуле

(8) $$y^0=Y^0,\quad y^{j+1}=y^j+\tau(\Lambda y^j-f),\quad \tau=-\left(\frac{4}{h_r^2}+\frac{4}{h_z^2}\right)^{-1},\quad j=0,1,\ldots,p-1.$$

Обозначним $\Lambda y^p-f=g$.

2. Находим приближение $v\in H'$ к решению w уравнения $\Lambda'w=Pg$ так что выполняется соотношение

(9) $$\|\Lambda'v-Pg\|_{\Lambda'^{-1}}\leqslant\varepsilon_0\|Pg\|_{\Lambda'^{-1}}.$$

В соответствии с нашим преположением, для этого нам нужно не более чем $\Phi\left(\varepsilon_0,\frac{N}{2},\frac{M}{2}\right)$ арифметических действий.

3. Интерполируем функцию v с сетки $\bar\omega'$ на сетку $\bar\omega$ с помощью оператора Π_1. Положим

(10) $$Y^1=y^p-\Pi_1 v.$$

§ 3. Оценка убывания погрешности на одном шаге итерационного процесса

Пусть λ_{nm} собственные числа оператор Λ, и ψ^{nm} соответствующие собственные функции. Пусть $0<\theta<1$. Через H_θ^0 обозначим подпространство линейных комбинаций функций ψ^{nm}, для которых $\lambda_{nm}\leqslant\theta\left(\frac{4}{h_r^2}+\frac{4}{h_z^2}\right)$, а через

H_θ^1 подпространство линейных комбинаций остальных ψ^{nm}. Функции из H_θ^0 можем условно назвать гладкими, а функции из H_θ^1 — колеблющимися.

Разложим начальную невязку по системе функций ψ^{nm}:

$$\Lambda Y^0 - f = \varphi = \sum_{n,m} \alpha_{nm} \psi^{nm} = \sum_{\psi^{nm} \in H_\theta^0} \alpha_{nm} \psi^{nm} + \sum_{\psi^{nm} \in H_\theta^1} \alpha_{nm} \psi^{nm} = \varphi^0 + \varphi^1.$$

Очевидно,

$$\|\varphi\|^2_{\Lambda^{-1}} = \sum_{n,m} \frac{\alpha^2_{nm}}{\lambda_{nm}} = \|\varphi^0\|^2_{\Lambda^{-1}} + \|\varphi^1\|^2_{\Lambda^{-1}}.$$

Далее получаем

$$g = \Lambda y^P - f = (E + \tau\Lambda)^P (\Lambda Y^0 - f) = (E + \tau\Lambda)^P \varphi^0 + (E + \tau\Lambda)^P \varphi^1 = g^0 + g^1.$$

Обозначим $v = v^0 + v^1$, где

$$\Lambda' v^0 = Pg^0 \quad \text{и} \quad \|\Lambda' v^1 - Pg^1\|_{\Lambda'^{-1}} \leqslant \varepsilon_0 \|Pg\|_{\Lambda'^{-1}}.$$

Тогда невязку $\Lambda Y^1 - f$ можем представить в виде

$$\Lambda Y^1 - f = \Lambda y^P - \Lambda \Pi_1 v - f = g^1 - \Lambda \Pi_1 v^1 + (g^0 - \Pi_0 P g^0) + (\Pi_0 \Lambda' v^0 - \Lambda \Pi_1 v^0). \tag{11}$$

Наша цель — оценить $\|\Lambda Y^1 - f\|_{\Lambda^{-1}}$. Оценим отдельно каждое из слагаемых в (11).

1.
$$\|g^1\|_{\Lambda^{-1}} = \|(E + \tau\Lambda)^P \varphi^1\|_{\Lambda^{-1}} = \left\{ \sum_{\psi^{nm} \in H_\theta^1} (1 + \tau\lambda_{nm})^{2P} \frac{\alpha^2_{nm}}{\lambda_{nm}} \right\}^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant (1-\theta)^P \left\{ \sum_{\psi^{nm} \in H_\theta^1} \frac{\alpha^2_{nm}}{\lambda_{nm}} \right\}^{1/2} \leqslant (1-\theta)^P \|\varphi\|_{\Lambda^{-1}}. \tag{12}$$

2.
$$\|\Lambda \Pi_1 v^1\|_{\Lambda^{-1}} = \|\Pi_1 v^1\|_\Lambda \leqslant \sqrt{\frac{3}{2}} \|v^1\|_{\Lambda'} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\Lambda' v^1\|_{\Lambda'^{-1}} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\frac{3}{2}} (\|\Lambda' v^1 - Pg^1\|_{\Lambda'^{-1}} + \|Pg^1\|_{\Lambda'^{-}}) \leqslant \sqrt{\frac{3}{2}} (\varepsilon_0 \|Pg\|_{\Lambda'^{-1}} + \|Pg^1\|_{\Lambda'^{-1}}) \leqslant \tag{13}$$
$$\leqslant \sqrt{3} (\varepsilon_0 \|g\|_{\Lambda^{-1}} + \|g^1\|_{\Lambda^{-1}}) \leqslant \sqrt{3} [\varepsilon_0 + (1-\theta)^P] \|\varphi\|_{\Lambda^{-1}}.$$

3.
$$(g^0 - \Pi_0 P g^0, \eta) = (g^0, \eta - \Pi_0 P \eta) \leqslant \|g^0\| \cdot \|\eta - \Pi_0 P \eta\|.$$

Далее

$$(\eta - \Pi_0 P \eta)_{2i \cdot 2k} = \frac{1}{8} \left[\frac{2i + \frac{1}{2}}{2i+1} (-\eta_{2i \cdot 2k-1} + 2\eta_{2i \cdot 2k} - \eta_{2i \cdot 2k+1}) + \right.$$
$$\left. + \frac{2i + \frac{3}{2}}{2i+1} (4\eta_{2i \cdot 2k} - \eta_{2i+1 \cdot 2k-1} - 2\eta_{2i+1 \cdot 2k} - \eta_{2i+1 \cdot 2k-1}) \right].$$

Подобным образом представляется $\eta - \Pi_0 P \eta$ и в остальных точках сетки. Следует $\|\eta - \Pi_0 P \eta\| \leqslant c_3 h \|\eta\|_\Lambda$, где $h = \sqrt{h_r^2 + h_z^2}$. Отсюда получаем:

$$\|g^0 - \Pi_0 P g^0\|_{\Lambda^{-1}} \leqslant c_3 h \|g^0\| \leqslant c_3 h \sqrt{\theta \left(\frac{4}{h_r^2} + \frac{4}{h_z^2} \right)} \|g^0\|_{\Lambda^{-1}} \leqslant c_4 \sqrt{\theta} \|\varphi\|_{\Lambda^{-1}}. \tag{14}$$

4. Воспользовавшись равенствами:

$$(\Lambda_z \Pi_1 v)_{2i+1\cdot 2k}=\frac{2}{2N+1}\left[\left(\frac{3N}{2}-i\right)\Lambda_z' v_{ik}+\left(\frac{N}{2}+i+1\right)\Lambda_z' v_{i+1\cdot k}\right],$$

$$(\Lambda_z \Pi_1 v)_{2i+2\cdot 2k}=\frac{2}{2N+1}\left[\left(\frac{N}{2}-i-1\right)\Lambda_z' v_{ik}+\left(\frac{3N}{3}+i+2\right)\Lambda_z' v_{i+1\cdot k}\right],$$

$$(\Lambda_z \Pi_1 v)_{0\cdot 2k}=2\Lambda_z' v_{0\cdot k},$$

$$(\Lambda_z \Pi_1 v)_{i\cdot 2k+1}=0,$$

получаем

$$\Big|(\Pi_0\Lambda_z' v-\Lambda_z\Pi_1 v,\eta)\Big|=\Big|h_r h_z\sum_{k=1}^{\frac{M}{2}-1} r_0\Lambda_z' v_{0k}\frac{1}{2}(\eta_{0\cdot 2k+1}-2\eta_{0\cdot 2k}+\eta_{0\cdot 2k-1})+$$

$$+h_r h_z\sum_{i=0}^{\frac{N}{1}-1}\sum_{k=1}^{\frac{M}{2}-1} r_{2i+1}\Lambda_z' v_{ik}\frac{1}{2}(\eta_{2i+1\cdot 2k+1}-2\eta_{2i+1\cdot 2k}+\eta_{2i+1\cdot 2k-1})+$$

$$+h_r h_z\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-2}\sum_{k=1}^{\frac{M}{2}-1} r_{2i+2}\Lambda_z' v_{i+1\cdot k}\frac{1}{2}(\eta_{2i+2\cdot 2k+1}-2\eta_{2i+2\cdot 2k}+\eta_{2i+2\cdot 2k-1})+$$

$$+h_r h_z\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{k=1}^{\frac{M}{2}} r_{2i+1}\frac{N+2i+2}{2N+1}(v_{\bar z,i+1\cdot k}-v_{\bar z,ik})\frac{\eta_{2i+1\cdot 2k}-\eta_{2i+1\cdot 2k-2}}{2h_z}+$$

$$+h_r h_z\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-2}\sum_{k=1}^{\frac{M}{2}} r_{2i+2}\frac{-N+2i+2}{2N+1}(v_{\bar z,i+1\cdot k}-v_{\bar z,ik})\frac{\eta_{2i+2\cdot 2k}-\eta_{2i+2\cdot 2k-2}}{2h_z}\Big|\leqslant$$

$$\leqslant c_5 h\left[\|\Lambda_z' v\|'+\left(h_r' h_z'\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{k=1}^{\frac{M}{2}}\bar r_i' v^2_{\bar r\bar z,ik}\right)^{1/2}\right]\|\eta\|_\Lambda\leqslant$$

$$\leqslant c_5 h(\|\Lambda_z' v\|'+\|\Lambda_z' v\|'^{1/2}\cdot\|\Lambda_r' v\|'^{1/2})\|\eta\|_\Lambda.$$

Также, из равенств

$$(\Lambda_r\Pi_1 v)_{2i+1\cdot 2k}=\frac{i+\frac{1}{2}}{i+\frac{3}{4}}\,\frac{\left(N+\frac{1}{2}\right)(N-2i-1)}{(N+1)^2}\Lambda_r' v_{ik}-$$

$$-\frac{\frac{N}{2}+\frac{1}{4}}{\left(i+\frac{3}{4}\right)R^2}\left[\left(i+1+\frac{N}{4}\right)v_{i+1\cdot k}-\left(i+1+\frac{N}{2}\right)v_{ik}+\frac{N}{4}v_{i-1\cdot k}\right],$$

$$(\Lambda_r \Pi_1 v)_{2i+2\cdot 2k} = \frac{i+\frac{3}{2}}{i+\frac{5}{4}} \cdot \frac{\left(N+\frac{1}{2}\right)(N+2i+5)}{(N+1)^2} \Lambda_r' v_{i+1\cdot k} -$$

$$-\frac{\frac{N}{2}+\frac{1}{4}}{\left(i+\frac{5}{4}\right)R^2}\left[-\left(i+2+\frac{N}{4}\right)v_{i+2\cdot k}+\left(i+2+\frac{N}{2}\right)v_{i+1\cdot k}-\frac{N}{4}v_{ik}\right],$$

$$(\Lambda_r \Pi_1 v)_{1\cdot 2k} = \frac{(2N+1)(3N+2)}{6(N+1)^2}\Lambda_r' v_{0\cdot k},$$

$$(\Lambda_r \Pi_1 v)_{0\cdot 2k} = \frac{(2N+1)(N+2)}{2(N+1)^2}\Lambda_r' v_{0\cdot k},$$

$$(\Lambda_r \Pi_1 v)_{i\cdot 2k+1} = \frac{1}{2}\left[(\Lambda_r \Pi_1 v)_{i\cdot 2k} + (\Lambda_r \Pi_1 v)_{i\cdot 2k+2}\right],$$

следует, что

$$(\Pi_0 \Lambda_r' v - \Lambda_r \Pi_1 v, \eta) = 2h_z \sum_{k=1}^{\frac{M}{2}-1}\left\{\frac{h_r^2}{(N+1)^2}\Lambda_r' v_{0k}\left[-\frac{N}{4}\hat{\eta}_{0k}+\left(\frac{5N}{4}+1\right)\hat{\eta}_{1k}\right]+\right.$$

$$+h_r\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1}\frac{h_r}{(N+1)^2}\left(4i^2N+2i^2+7iN+\frac{N^2}{2}+4i+\frac{7}{2}N+2\right)\Lambda_r' v_{ik}(\hat{\eta}_{2i+1\cdot k}-\hat{\eta}_{2i\cdot k})-$$

$$-h_r\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1}\frac{h_r}{(N+1)^2}(2iN+2i+N+1)\Lambda_r' v_{ik}\hat{\eta}_{2i\cdot k}+$$

$$+h_r\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1}\frac{1}{R}(i+1)(v_{i+1\cdot k}-v_{ik})(\hat{\eta}_{2i+1\cdot k}-\hat{\eta}_{2i\cdot k})+$$

$$\left.+h_r\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}-1}\frac{N}{4R}(v_{i+1\cdot k}-2v_{ik}+v_{i-1\cdot k})(\hat{\eta}_{2i+1\cdot k}-\hat{\eta}_{2i\cdot k})\right\}.$$

Здесь положено $\hat{\eta}_{ik} = \frac{1}{4}(\eta_{i\cdot 2k+1}+2\eta_{i\cdot 2k}+\eta_{i\cdot 2k-1})$. Пользуясь равенством

$$\|\Lambda_r y\|^2 = h_z \sum_{k=1}^{M-1}\left[h_r \sum_{i=1}^{N-1} r_i y^2_{r\bar{r},ik} + h_r \sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{r_i}\left(\frac{y_r+y_{\bar{r}}}{2}\right)^2_{ik} + y^2_{\bar{r},1k} + y^2_{\bar{r},Nk}\right],$$

далее получаем

$$|(\Pi_0 \Lambda_r' v - \Lambda_r \Pi_1 v, \eta)| \leqslant c_6 h \|\Lambda_r' v\|' \cdot \|\eta\|_\Lambda.$$

Из получених оценок следует

$$\|\Pi_0\Lambda' v^0-\Lambda\Pi_1 v^0\|_{\Lambda^{-1}}\leqslant c_5 h(\|\Lambda_z' v^0\|'+\|\Lambda_z' v^0\|'^{1/2}\cdot\|\Lambda_r' v^0\|'^{1/2})+c_6 h\|\Lambda_r' v^0\|'\leqslant \tag{15}$$
$$\leqslant c_7 h\|\Lambda' v^0\|'=c_7 h\|Pg^0\|'\leqslant c_8 h\|g^0\|\leqslant c_9\sqrt{\theta}\|\varphi\|_{\Lambda^{-1}}.$$

Складывая оценки (12)—(15), окончательно получаем

$$\|\Lambda Y^1-f\|_{\Lambda^{-1}}\leqslant[\sqrt{3}\,\varepsilon_0+(1+\sqrt{3})(1-\theta)^p+c_{10}\sqrt{\theta}]\cdot\|\Lambda Y^0-f\|_{\Lambda^{-1}}. \tag{16}$$

Возьмем некоторое $t>1$ и определим ε_0 из условия $\sqrt{3}\,\varepsilon_0\leqslant\frac{\sqrt[t]{\varepsilon_0}}{3}$, θ из условия $c_{10}\sqrt{\theta}\leqslant\frac{\sqrt[t]{\varepsilon_0}}{3}$ и p из условия $(1+\sqrt{3})(1-\theta)^p\leqslant\frac{\sqrt[t]{\varepsilon_0}}{3}$.

И так, получаем оценку:

$$\|\Lambda Y^1-f\|_{\Lambda^{-1}}\leqslant\sqrt[t]{\varepsilon_0}\,\|\Lambda Y^0-f\|_{\Lambda^{-1}}. \tag{17}$$

Таким образом доказана.

Теорема. *Для каждого $t>1$ можно определить числа p и ε_0 зависящие от t, R, l, c_1 и c_2, такие, что выполняется неравенство* (17).

§ 4. Оценка числа арифметических действий

Пусть $t>1$ целое, $N=N_0 2^q$, $M=M_0 2^q$, N_0 и M_0 — постянные. Повторяя t раз описанный шаг итерации, мы сможем уменьшить норму вевязки $\|\Lambda Y^0-f\|_{\Lambda^{-1}}$ в $\frac{1}{\varepsilon_0}$ раз. На осуществление одного шага нам нужно не более чем $\Phi\left(\varepsilon_0, \frac{N}{2}, \frac{M}{2}\right)+c_{11}\frac{N}{2}\cdot\frac{M}{2}$ арифметических действий. Величина $c_{11}\frac{N}{2}\cdot\frac{M}{2}$ оценивает сверху число действий, нужное для осуществления p итераций по формуле (8) и определения Pg и $\Pi_1 v$. Оттуда следует неравенство

$$\Phi(\varepsilon_0, N, M)\leqslant t\left[\Phi\left(\varepsilon_0, \frac{N}{2}, \frac{M}{2}\right)+c_{11}\frac{N}{2}\cdot\frac{M}{2}\right].$$

Далее получаем

$$\Phi(\varepsilon_0, N, M)\leqslant t^q\Phi(\varepsilon_0, N_0, M_0)+c_{11}NM\left(\frac{t}{4}+\frac{t^2}{4^2}+\cdots+\frac{t^q}{4^q}\right). \tag{18}$$

Можем считать что $\Phi(\varepsilon_0, N_0, M_0)=c_{12}$ — постоянная (напр. в случае, когда разностное уравнение на сетке $\omega_{N_0M_0}$ решается методом исключений, это число не зависит от ε_0).

Самые сильные по порядку оценки при $q\to\infty$ получаются из (18) при $t=2$ и $t=3$. В этом случае

$$\Phi(\varepsilon_0, N, M)\leqslant c_{12}t^q+c_{11}NM\frac{t}{4-t}\leqslant c_{13}\frac{t}{4-t}NM=O(h^{-2}). \tag{19}$$

При $t=4$ получаем $\Phi(\varepsilon_0, N, M) \leqslant c_{12}4^q + c_{11}qNM = O(h^{-2}\ln h)$ а при

$$t>4 - \Phi(\varepsilon_0, N, M) \leqslant \left(c_{12}+c_{11}N_0M_0\frac{t}{t-4}\right)t^q = O(h^{-\log_2 t}).$$

Если норму невязки надо уменьшить в $\frac{1}{\varepsilon}$ раз, где $\varepsilon<\varepsilon_0$, тогда описанный процесс повторяем $|\log_{\varepsilon_0}\varepsilon|$ раз, так что нужное число арифметических действий — $O(h^{-2}\ln\varepsilon^{-1})$.

§ 5. Схема повышенного порядка точности

Для решения задачи (1)—(2) в работе [10] предложена разностная схема четвёртого порядка точности.

Пусть $\bar{\omega}_r = \left\{ r_i = \left(i+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)h_r \,\middle|\, i=0, 1, \dots, N;\ h_r = \frac{R}{N+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}} \right\}$ и $\bar{\hat{\omega}} = \bar{\hat{\omega}}_{NM} = \bar{\hat{\omega}}_r = \bar{\omega}_z$. Обозначим $\gamma = \bar{\hat{\omega}} \cap \Gamma$, и $\hat{\omega} = \bar{\hat{\omega}} \setminus \gamma$. Пространство сеточных функций $\hat{H} = \hat{H}_{NM}$, скалярное произведнние и норму вводим как в § 1. Определим разностный оператор

$$(\hat{\Lambda}_r y)_{ik} = \begin{cases} -\dfrac{1}{r_0 h_r}\hat{r}_1 y_{\bar{r},1\cdot k}, & i=0, \qquad k=0, 1, \dots, M, \\ -\dfrac{1}{r_i}(\hat{r} y_{\bar{r}})_{r,i,k}, & i=1, 2, \dots, N-1, \quad k=0, 1, \dots, M, \\ 0, & i=N, \qquad k=0, 1, \dots, M. \end{cases}$$

Здесь положено $\hat{r}_i = r_{i-\frac{1}{2}} - \dfrac{h_r^2}{12 r_{i-\frac{1}{2}}}$, $r_{i-\frac{1}{2}} = \left(i+\dfrac{1}{\sqrt{12}}\right)h_r$.

Задачу (1) – (2) аппроксимируем следующим образом:

$$\hat{\Lambda} y = \hat{f}, \quad y, \hat{f} \in \hat{H} \tag{20}$$

где

$$\hat{\Lambda} y \equiv \left(\hat{\Lambda}_r + \Lambda_z - \frac{h_r^2+h_z^2}{12}\hat{\Lambda}_r\Lambda_z\right)y, \quad \text{и} \quad \hat{f} \equiv f - \frac{h_r^2}{12}L_r f - \frac{h_z^2}{12}L_z f.$$

При достаточной гладкости решения u задачи (1) – (2) погрешность аппроксимации равна $\hat{\Lambda}u - \hat{f} = O\left(\dfrac{h_r^4}{r} + h_z^4\right)$.

Операторы $\hat{\Lambda}_r$ и Λ_z самосопряженны и перестановочны.

Так же, как и в § 1 для оператора Λ_r, доказывается что собственные числа оператора $\hat{\Lambda}_r$ равны $\hat{\lambda}_n^{(r)} = \dfrac{2}{h_r^2}(1-x_n)$, $n=1, 2, \dots, N$ где x_n корни многочлена Якоби $P_N^{\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}(x)$ (см. [10]). Отсюда следует, что выполнены оценки $\frac{4}{R^2}<\hat{\lambda}_n^{(r)}<\frac{4}{h_r^2}\sin^2\frac{\pi(2N-1)}{2(2N+3)}<\frac{4}{h_r^2}$. Собственные функции $\hat{\Lambda}_r$ равны $\hat{\psi}_i^{r,n}=P_i^{\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}(x_n)$. Здесь $P_i^{\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}(x)$ многочлены Якоби с показателями 0 и $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Из предыдущего следует, что собственные числа оператора $\hat{\Lambda}$ равны $\hat{\lambda}_{nm}=\hat{\lambda}_n^{(r)}+\lambda_m^{(z)}-\frac{h_r^2+h_z^2}{12}\hat{\lambda}_n^{(r)}\lambda_m^{(z)}$ и выполнены оценки:

$$\frac{2}{3}\left(\frac{4}{R^2}+\frac{4}{l^2}\right)<\frac{2}{3}(\hat{\lambda}_n^{(r)}+\lambda_m^{(z)})<\hat{\lambda}_{nm}<\hat{\lambda}_n^{(r)}+\lambda_m^{(z)}<\frac{4}{h_r^2}+\frac{4}{h_z^2}. \tag{21}$$

Собственные функции оператора $\hat{\Lambda}$—

$$\hat{\psi}_{ik}^{nm}=P_i^{\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}(x_n)\sin\frac{m\pi z_k}{l}.$$

Из (21) следуют неравенства:

$$\|\hat{\Lambda}_r y\|\leqslant\frac{3}{2}\|\hat{\Lambda}y\| \quad \text{и} \quad \|\Lambda_z y\|\leqslant\frac{3}{2}\|\hat{\Lambda}y\|. \tag{22}$$

Обозначим

$$\bar{\Lambda}=\bar{\Lambda}_{NM}=\hat{\Lambda}_r+\Lambda_z \tag{23}$$

и введем нормы

$$\|y\|_{\bar{\Lambda}}=(\bar{\Lambda}y,\,y)^{1/2} \quad \text{и} \quad \|y\|_{\bar{\Lambda}^{-1}}=(\bar{\Lambda}^{-1}y,\,y)^{1/2}=\max_{v\in\hat{H}}\frac{(y,\,v)}{\|v\|_{\bar{\Lambda}}}. \tag{24}$$

Предположим, что N и M чётные числа и. как в § 1, введем сетку $\bar{\omega}'=\bar{\hat{\omega}}_{\frac{N}{2}\frac{M}{2}}$, пространство сеточных функций $\hat{H}'=\hat{H}_{\frac{N}{2}\frac{M}{2}}$, скалярное произведение $(y,\,v)'=(y,\,v)_{\frac{N}{2}\frac{M}{2}}$ и операторы $\hat{\Lambda}'=\hat{\Lambda}_{\frac{N}{2}\frac{M}{2}}$ и $\bar{\Lambda}'=\bar{\Lambda}_{\frac{N}{2}\frac{M}{2}}$.

Опрeделим оператори $\hat{\Pi}_0:\hat{H}'\to\hat{H}$, $\hat{\Pi}_1:\hat{H}'\to\hat{H}$ и $\hat{P}:\hat{H}\to\hat{H}'$, где $\hat{\Pi}_0$ будет точным для многочленов нулевой степени, а $\hat{\Pi}_1$ для многочленов первой степени. Положим

$$(\hat{\Pi}_0\xi)_{0\cdot 2k}=\xi_{0k},$$

$$(\hat{\Pi}_0\xi)_{2i+1\cdot 2k}=a_i\xi_{ik}+(1-a_i)\xi_{i+1\cdot k}, \qquad i\geqslant 0,$$

$$(\hat{\Pi}_0\xi)_{2i+2\cdot 2k}=b_i\xi_{ik}+(1-b_i)\xi_{i+1\cdot k}, \qquad i\geqslant 0,$$

$$(\hat{\Pi}_0\xi)_{i\cdot 2k+1}=\frac{1}{2}[(\hat{\Pi}_0\xi)_{i\cdot 2k}+(\hat{\Pi}_0\xi)_{i\cdot 2k+2}].$$

Оператор $\hat{P}$ определяем из условия

$$(\hat{\Pi}_0\xi, \eta)=\left(\frac{N+1+\frac{2}{\sqrt{12}}}{N+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}}\right)^2 (\xi, \hat{P}\eta)'.$$

Отсюда следует:

$$(\hat{P}\eta)_{0k}=\frac{1}{4\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)}\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\hat{\eta}_{0k}+a_0\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\hat{\eta}_{1k}+b_0\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\hat{\eta}_{2k}\right),$$

$$(\hat{P}\eta)_{ik}=\frac{1}{4\left(i+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)}\left[(1-a_{i-1})\left(2i-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\hat{\eta}_{2i-1\cdot k}+\right.$$

$$+(1-b_{i-1})\left(2i+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\hat{\eta}_{2i\cdot k}+a_i\left(2i+\frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\hat{\eta}_{2i+1\cdot k}+$$

$$\left.+b_i\left(2i+\frac{5}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\hat{\eta}_{2i+2\cdot k}\right],$$

$$(\hat{P}\eta)|_{\gamma'}=0$$

где, как раньше, обозначено $\hat{\eta}_{ik}=\frac{1}{4}(\eta_{i\cdot 2k+1}+2\eta_{i\cdot 2k}+\eta_{i\cdot 2k-1})$. Для a_i и b_i ставим условия

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)+a_0\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)+b_0\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)=4\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right).$$

$$(1-a_{i-1})\left(2i-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)+(1-b_{i-1})\left(2i+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)+a_i\left(2i+\frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)+$$

$$+b_i\left(2i+\frac{5}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)=4\left(i+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right).$$

Отсюда следует:

$$a_i\left(2i+\frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)+b_i\left(2i+\frac{5}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)=\left(2+\frac{2}{\sqrt{12}}\right)i+3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right).$$

Далее предположим, что a_i, $b_i\in[0, 1]$ (для этого достаточно, напр., положить $a_i=b_i$). Оператор $\hat{\Pi}_1$ определим линейной интерполяцией:

$$(\hat{\Pi}_1\xi)_{0\cdot 2k}=\xi_{0k},$$

$$(\hat{\Pi}_1\xi)_{2i+1\cdot 2k}=\frac{1}{N+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}}\left[\left(\frac{3N}{4}+\frac{N}{2\sqrt{12}}-\frac{i}{2}-\frac{i}{\sqrt{12}}\right)\xi_{ik}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{N}{4}-\frac{N}{2\sqrt{12}}+\frac{i}{2}+\frac{i}{\sqrt{12}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\xi_{i+1\cdot k}\right].$$

$$(\hat{\Pi}_1\xi)_{2i+2\cdot 2k}=\frac{1}{N+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}}\left[\left(\frac{N}{4}+\frac{N}{2\sqrt{12}}-\frac{i}{2}-\frac{i}{\sqrt{12}}-\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\xi_{ik}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{3N}{4}-\frac{N}{2\sqrt{12}}+\frac{i}{2}+\frac{i}{\sqrt{12}}+1+\frac{2}{\sqrt{12}}\right)\xi_{i+1\cdot k}\right],$$

$$(\hat{\Pi}_1\xi)_{i\cdot 2k+1}=\frac{1}{2}[(\hat{\Pi}_1\xi)_{i\cdot 2k}+(\hat{\Pi}_1\xi)_{i\cdot 2k+2}].$$

Непосредственно доказывается

Лемма 2. *Выполнены неравенства*

$$\|\hat{\Pi}_0\xi\|_{\bar{\Lambda}}\leqslant c_{14}\|\xi\|_{\bar{\Lambda}'},\quad \|\hat{\Pi}_1\xi\|_{\bar{\Lambda}}\leqslant c_{15}\|\xi\|_{\bar{\Lambda}'}\quad \text{и}\quad \|\hat{P}\eta\|_{\bar{\Lambda}'^{-1}}\leqslant c_{14}\|\eta\|_{\bar{\Lambda}^{-1}}.$$

§ 6. Оценка убывания погрешности на одном шаге итерационного процесса для схемы повышенного порядка точности

Тем же способом, как и в § 3, определим подпространства $\hat{H}_\theta^0$ и $\hat{H}_\theta^1$. Невязку после первого шага итерационного процесса снова представим в виде

$$\hat{\Lambda}Y^1-\hat{f}=g^1-\hat{\Lambda}\hat{\Pi}_1 v^1+(g^0-\hat{\Pi}_0\hat{P}g^0)+(\hat{\Pi}_0\hat{\Lambda}' v^0-\hat{\Lambda}\hat{\Pi}_1 v^1).$$

1. Колеблющуюся часть невязки оцениваем как раньше:

$$\|g^1\|_{\bar{\Lambda}^{-1}}\leqslant\|g^1\|_{\hat{\Lambda}^{-1}}\leqslant(1-\theta)^p\|\varphi\|_{\hat{\Lambda}^{-1}}\leqslant\sqrt{\frac{3}{2}}(1-\theta)^p\|\varphi\|_{\bar{\Lambda}^{-1}} \tag{25}$$

то есть

$$\|\hat{\Lambda}\hat{\Pi}_1 v^1\|_{\bar{\Lambda}^{-1}}\leqslant\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}c_{14}c_{15}[\varepsilon_0+(1-\theta)^p]\|\varphi\|_{\bar{\Lambda}^{-1}}=c_{16}[\varepsilon_0+(1-\theta)^p]\|\varphi\|_{\bar{\Lambda}^{-1}}. \tag{26}$$

2. $(g^0-\hat{\Pi}_0\hat{P}g^0,\eta)=(g^0,\eta-\hat{\Pi}_0\hat{P}\eta)\leqslant\|g^0\|\cdot\|\eta-\hat{\Pi}_0\hat{P}\eta\|.$

Далее

$$(\eta-\hat{\Pi}_0\hat{P}\eta)_{2i+1\cdot 2k}=-\frac{1}{4}(\eta_{2i+1\cdot 2k+1}-2\eta_{2i+1\cdot 2k}+\eta_{2i+1\cdot 2k-1})+$$

$$+\frac{a_i}{4\left(i+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)}\left[(1-a_{i-1})\left(2i-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)(\eta_{2i-1\cdot k}-\eta_{2i-1\cdot k})+\right.$$

$$\left.+(1-b_{i-1})\left(2i+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)(\hat{\eta}_{2i+1\cdot k}-\hat{\eta}_{2i\cdot k})+b_i\left(2i+\frac{5}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)(\hat{\eta}_{2i+1\cdot k}-\hat{\eta}_{2i+2\cdot k})\right]+$$

$$+\frac{1-a_i}{4\left(i+\frac{3}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)}\left[(1-b_{i-1})\left(2i+\frac{5}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)(\hat{\eta}_{2i+1\cdot k}-\hat{\eta}_{2i+2\cdot k})+\right.$$

$$\left.+a_{i+1}\left(2i+\frac{7}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)(\hat{\eta}_{2i+1\cdot k}-\hat{\eta}_{2i+3\cdot k})+b_{i+1}\left(2i+\frac{9}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)(\hat{\eta}_{2i+1\cdot k}-\hat{\eta}_{2i+4\cdot k})\right].$$

Подобным образом представляется $\eta-\hat{\Pi}_0\hat{P}\eta$ и в остальных точках сетки. Следовательно $\|\eta-\hat{\Pi}_0\hat{P}\eta\|\leqslant c_{17}h\|\eta\|_{\bar{\Lambda}}$; отсюда получаем

$$\|g^0-\hat{\Pi}_0\hat{P}g^0\|_{\bar{\Lambda}^{-1}}\leqslant c_{18}\sqrt{\theta}\,\|\varphi\|_{\bar{\Lambda}^{-1}}. \tag{27}$$

3. Пользуясь равенствами

$$(\Lambda_z\hat{\Pi}_1 v)_{2i+1\cdot 2k}=\frac{2}{N+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}}\left[\left(\frac{3N}{4}+\frac{N}{2\sqrt{12}}-\frac{i}{2}-\frac{i}{\sqrt{12}}\right)\Lambda_z' v_{ik}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{N}{4}-\frac{N}{2\sqrt{12}}+\frac{i}{2}+\frac{i}{\sqrt{12}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\Lambda_z' v_{i+1\cdot k}\right],$$

$$(\Lambda_z\hat{\Pi}_1 v)_{2i+2\cdot 2k}=\frac{2}{N+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}}\left[\left(\frac{N}{4}+\frac{N}{2\sqrt{12}}-\frac{i}{2}-\frac{i}{\sqrt{12}}-\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\Lambda_z' v_{ik}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{3N}{4}-\frac{N}{2\sqrt{12}}+\frac{i}{2}+\frac{i}{\sqrt{12}}+1+\frac{2}{\sqrt{12}}\right)\Lambda_z' v_{i+1\cdot k}\right],$$

$$(\Lambda_z\hat{\Pi}_1 v)_{0\cdot 2k}=2\Lambda_z' v_{0k},$$

$$(\Lambda_z\Pi_1\hat{v})_{i\cdot 2k+1}=0,$$

получаем

$$|(\hat{\Pi}_0\Lambda_z' v-\Lambda_z\hat{\Pi}_1 v,\eta)|=\left|\frac{1}{2}h_r h_z\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{\frac{M}{2}-1} r_i(\hat{\Pi}_0\Lambda_z' v)_{i\cdot 2k}(\eta_{i\cdot 2k+1}-2\eta_{i\cdot 2k}+\eta_{i\cdot 2k-1})+\right.$$

$$+h_r'\cdot h_z\sum_{k=1}^{\frac{M}{2}}\left[h_r\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} r_{2i+1}\left(1-a_i-\frac{\frac{N}{4}-\frac{N}{2\sqrt{12}}+\frac{i}{2}+\frac{i}{\sqrt{12}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}}{N+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}}\right)v_{r\bar{z},ik}\cdot\right.$$

$$\cdot\frac{\eta_{2i+1\cdot 2k}-\eta_{2i+1\cdot 2k-2}}{h_z}+h_r\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1} r_{2i+2}\left(1-b_i-\frac{\frac{3N}{4}-\frac{N}{2\sqrt{12}}+\frac{i}{2}+\frac{i}{\sqrt{12}}+1+\frac{2}{\sqrt{12}}}{N+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}}\right)v_{r\bar{z},ik}\cdot$$

$$\left.\left.\cdot\frac{\eta_{2i+2\cdot 2k}-\eta_{2i+2\cdot 2k-2}}{h_z}\right]\right|\leqslant c_{19}h(\|\Lambda_z' v\|'+\|v_{rz}\|')\cdot\|\eta\|_{\bar{\Lambda}}.$$

Далее

$$\|v_{rz}\|'=\left(h_r' h_z'\sum_{i=0}^{\frac{N}{2}-1}\sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1} r_i' v_{rz,ik}^2\right)^{1/2}\leqslant\left(h_r' h_z'\sum_{i=1}^{\frac{N}{2}}\sum_{k=0}^{\frac{M}{2}-1}\hat{r}_i' v_{\bar{r}z,ik}^2\right)^{1/2}=$$

$$=(\hat{\Lambda}_r' v,\Lambda_z' v)'^{1/2}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\|\hat{\Lambda}_r' v\|'+\frac{1}{\sqrt{2}}\|\Lambda_z' v\|'.$$

Так же, как в § 3, цользуясь равенствами

$$(\hat{\Lambda}_r \hat{\Pi}_1 v)_{0\cdot 2k} = \frac{N+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}}{\left(N+1+\frac{2}{\sqrt{12}}\right)^2}\left(N-\frac{2N}{\sqrt{12}}+2+\frac{4}{\sqrt{12}}\right)\hat{\Lambda}_r' v_{0k},$$

$$(\hat{\Lambda}_r \hat{\Pi}_1 v)_{1\cdot 2k} = \frac{N+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}}{\left(N+1+\frac{2}{\sqrt{12}}\right)^2}\left[\frac{8(\sqrt{12}+1)^2}{(2\sqrt{12}+1)(3\sqrt{12}+2)}\left(N+1+\frac{2}{\sqrt{12}}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{\sqrt{12}+2}{3\sqrt{12}+2}\left(-N+\frac{2N}{\sqrt{12}}-2-\frac{4}{\sqrt{12}}\right)\right]\hat{\Lambda}_r' v_{0\cdot k}.$$

$$(\hat{\Lambda}_r \hat{\Pi}_1 v)_{2i\cdot 2k} = \frac{i+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}}{i+\frac{1}{4}+\frac{1}{2\sqrt{12}}}\cdot\frac{\left(N+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)^2}{\left(N+1+\frac{2}{\sqrt{12}}\right)^3}\left(N-\frac{2N}{\sqrt{12}}+2i+\frac{4i}{\sqrt{12}}+2+\right.$$
$$\left.+\frac{4}{\sqrt{12}}\right)\hat{\Lambda}_r' v_{ik} - \frac{1}{Rh_r r_{2i}}\left\{v_{i+1\cdot k}(\hat{r}_{2i+1}-\hat{r}'_{i+1})\left(\frac{N}{4}-\frac{N}{2\sqrt{12}}+\frac{i}{2}+\frac{i}{\sqrt{12}}+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)-v_{ik}\left[\left(\hat{r}_{2i+1}-\frac{\hat{r}'_{i+1}+\hat{r}'_i}{2}\right)\left(-\frac{N}{\sqrt{12}}+i+\frac{2i}{\sqrt{12}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\hat{r}_{2i}-\frac{\hat{r}'_{i+1}+\hat{r}'_i}{2}\right)\left(\frac{N}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\right]+v_{i-1\cdot k}\left[(\hat{r}_{2i+1}-\hat{r}'_i)\left(-\frac{N}{4}-\frac{N}{2\sqrt{12}}+\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+\frac{i}{2}+\frac{i}{\sqrt{12}}\right)+(\hat{r}_{2i}-\hat{r}'_i)\left(\frac{N}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\right]\right\}.$$

$$(\hat{\Lambda}_r \hat{\Pi}_1 v)_{2i+1\cdot 2k} = \frac{i+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}}{i+\frac{3}{4}+\frac{1}{2\sqrt{12}}}\cdot\frac{\left(N+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)^2}{\left(N+1+\frac{2}{\sqrt{12}}\right)^3}\left(N+\frac{2N}{\sqrt{12}}-2i-\frac{4i}{\sqrt{12}}\right)\hat{\Lambda}_r' v_{ik}-$$
$$-\frac{1}{Rh_r r_{2i+1}}\left\{v_{i+1\cdot k}\left[(\hat{r}_{2i+2}-\hat{r}'_{i+1})\left(\frac{N}{2}+\frac{i}{2}+\frac{i}{\sqrt{12}}\right)+(\hat{r}_{2i+1}-\right.\right.$$
$$\left.-\hat{r}'_{i+1})\left(-\frac{N}{4}+\frac{N}{2\sqrt{12}}-\frac{i}{2}-\frac{i}{\sqrt{12}}-\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\right]-v_{ik}\left[\left(\hat{r}_{2i+2}-\right.\right.$$
$$\left.-\frac{\hat{r}'_{i+1}+\hat{r}'_i}{2}\right)\left(\frac{N}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{12}}\right)+\left(\hat{r}_{2i+1}-\frac{\hat{r}_{i+1}+\hat{r}'_i}{2}\right)\left(\frac{N}{\sqrt{12}}-i-\frac{2i}{\sqrt{12}}-\right.$$
$$\left.\left.\left.-\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{12}}\right)\right]+v_{i-1\cdot k}(\hat{r}_{2i+1}-\hat{r}'_i)\left(\frac{N}{4}+\frac{N}{2\sqrt{12}}-\frac{i}{2}-\frac{i}{\sqrt{12}}\right)\right\},$$

$$(\hat{\Lambda}_r \hat{\Pi}_1 v)_{i\cdot 2k+1} = \frac{1}{2}\left[(\hat{\Lambda}_r \hat{\Pi}_1 v)_{i\cdot 2k}+(\hat{\Lambda}_r \hat{\Pi}_1 v)_{i\cdot 2k+2}\right]$$

получаем оценку

$$|(\hat{\Pi}_0\hat{\Lambda}_r{}'v-\hat{\Lambda}_r\hat{\Pi}_1 v,\ \eta)|\leqslant c_{20}h\,\|\hat{\Lambda}_r{}'v\|'\cdot\|\eta\|_{\bar\Lambda}.$$

Оставшиеся члены легко оценить:

$$\left|\left(\Pi_0\frac{h_r'^2+h_z'^2}{12}\hat{\Lambda}_r{}'\Lambda_z{}'v,\ \eta\right)\right|=\left|\frac{h_r'^2+h_z'^2}{12}2h_z\sum_{k=1}^{\frac{M}{2}-1}h_r\sum_{i=0}^{N-1}r_i\hat{\Pi}_0\hat{\Lambda}_r{}'\Lambda_z{}'v_{i\cdot 2k}\hat{\eta}_{ik}\right|=$$

$$=\left|\frac{h_r'^2+h_z'^2}{12}2h_z\sum_{k=1}^{\frac{M}{2}-1}h_r\sum_{i=0}^{N-1}r_i\hat{\Pi}_0\hat{\Lambda}_r{}'v_{i\cdot 2k}\Lambda_z{}'\hat{\eta}_{ik}\right|\leqslant c_{21}h\,\|\hat{\Lambda}_r{}'v\|'\cdot\|\eta\|_{\bar\Lambda},$$

то есть

$$\left|\left(-\frac{h_r{}^2+h_z{}^2}{12}\hat{\Lambda}_r\Lambda_z\hat{\Pi}_1 v,\ \eta\right)\right|=\left|-\frac{h_r{}^2+h_z{}'}{12}(\Lambda_z\hat{\Pi}_1 v,\ \hat{\Lambda}_r\eta)\right|\leqslant c_{22}h\,\|\Lambda_z{}'v\|'\cdot\|\eta\|_{\bar\Lambda}.$$

Из полученных оценок следует:

$$\|\hat{\Pi}_0\hat{\Lambda}'v^0-\hat{\Lambda}\hat{\Pi}_1 v_0\|_{\bar\Lambda^{-1}}\leqslant c_{23}h(\|\hat{\Lambda}_r{}'v^0\|'+\|\Lambda_z{}'v^0\|')\leqslant c_{24}\sqrt{\theta}\,\|\varphi\|_{\bar\Lambda^{-1}}.\tag{28}$$

Складывая оценки (25)—(28) получаем

$$\|\hat{\Lambda}Y^1-\hat{f}\|_{\bar\Lambda^{-1}}\leqslant[c_{16}\varepsilon_0+c_{25}(1-\theta)^p+c_{26}\sqrt{\theta}]\,\|\hat{\Lambda}Y^0-\hat{f}\|_{\bar\Lambda^{-1}}.\tag{29}$$

Таким образом, и для схемы повышенного порядка точности (20), верна теорема доказанная в § 3, и оценка числа арифметических действий полученная в § 4.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. П. Федоренко, *Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, 1, № 5, 922—927.

[2] Р. П. Федоренко, *О скорости сходымости одного итерационного процесса*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, 4, № 3, 559—564.

[3] Н. С. Бахвалов, *О сходимости одного релаксационного метода при естественных ограничениях на эллиптический оператор*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1966, 6, № 5, 861—883.

[4] Г. П. Астраханцев, *Об одном итерационном методе решения сеточных эллиптических задач*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1971, 11, № 2, 439—448.

[5] D. W. Peaceman, H. H. Rachford, *The numerical solution of parabolic and elliptic differential equation*, J. Soc. Industr. and Appl. Math. 1955, 3, № 1, 28—41,

[6] И. В. Фрязинов, *О разностных схемах для уравнения Пуассона в полярной, цилиндрической и сферической системах координат*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1971, 11, № 5, 1219—1228.

[7] М. И. Бакирова, И. В. Фрязинов, *Об итерационном методе переменных направлений для разностного уравнения Пуассона в криволинейных ортогональных координатах*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1973, 13, № 4, 907—922.

[8] А. А. Самарский, *Введение в теорию разностных схем*, Москва, Наука, 1971.

[9] Р. Т. Дылдина, В. А. Енальский, *К вопросу о выборе оптимальных параметров при решении разностного аналога задачи Дирихле в цилиндрической геометрии*, Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1970, 10, № 3, 685—692.

[10] В. Л. Макаров, *Про формули сумарних зображень осесиметричного потенціалу для однієї схеми підвищеного порядку точності*, Доп. АН УРСР, 1970, серія А, № 5, 403—408.